УДК 517.2

К ПРАКТИКЕ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Косолапов Ю.Ф.

Кафедра высшей математики ДонНТУ

Статтю присвячено питанням існування умовних екстремумів та порівняльному аналізу відповідних методів.

Мы говорили [1, 2] о методике изучения общей задачи на условный экстремум в терминах функции Лагранжа и, для установления достаточных условий, - матрицы Гессе. Скажем несколько слов о работе с матрицей Гессе в условиях простейшей задачи на условный экстремум

$$z = f(x, y); \quad \varphi(x, y) = 0 .$$

Если (λ_0, x_0, y_0) - стационарная точка функции Лагранжа

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \quad \varphi_x'^2(x_0, y_0) + \varphi_y'^2(x_0, y_0) \neq 0,$$

то для установления существования в этой точке условного экстремума используют две формы матрицы Гессе -

$$H(\lambda_0, x_0, y_0) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_x'(x_0, y_0) & \varphi_y'(x_0, y_0) \\ \varphi_x'(x_0, y_0) & L''_{xx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{xy}(\lambda_0, x_0, y_0) \\ \varphi_y'(x_0, y_0) & L''_{yx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{yy}(\lambda_0, x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

в случае $\varphi_x'^2(x_0, y_0) \neq 0$ и

$$H(\lambda_0, y_0, x_0) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda x} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yy} & L''_{yx} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_y'(x_0, y_0) & \varphi_x'(x_0, y_0) \\ \varphi_y'(x_0, y_0) & L''_{yy}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{yx}(\lambda_0, x_0, y_0) \\ \varphi_x'(x_0, y_0) & L''_{xy}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{xx}(\lambda_0, x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

если $\varphi_x'^2(x_0, y_0) = 0$, но $\varphi_y'^2(x_0, y_0) \neq 0$. В обоих случаях

$$\Delta_1 = 0; \ \Delta_2 < 0 ,$$

т.е. первый отличный от нуля главный минор имеет «нужный» знак $(-1)^1$. Если теперь

$$\Delta_3 < 0 \ \text{ или } \ \Delta_3 > 0 ,$$

то на основании общей теории имеем в точке $(x_0; y_0)$ соответственно условный минимум или максимум [1, 2]. Отметим, что в книге [3] наличие условного экстремума ставится в зависимость от знака одного только определителя

$$-\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{xy}(\lambda_0, x_0, y_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{yx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{yy}(\lambda_0, x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

без указания на условие $\varphi'^2_x(x_0, y_0) \neq 0$. В нашей терминологии это означает использование только первой формы матрицы Гессе, а этого, как мы видели, недостаточно.

В качестве примера рассмотрим задачу:

$$f(x, y) = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 4 \quad \left(\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 4\right).$$

Стационарными точками функции Лагранжа

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 4\right)$$

являются здесь две пары

$$(\lambda_1; x_1; y_1) = (-1; 2; 0); \quad (\lambda_2; x_2; y_2) = (-1; -2; 0);$$
$$(\lambda_3; x_3; y_3) = (1; 0; 2); \quad (\lambda_4; x_4; y_4) = (1; 0; -2).$$

Для каждой пары имеем соответственно

$$\varphi'_x(\pm 2, 0) \neq 0; \quad \varphi'_x(0, \pm 2) = 0, \varphi'_y(x_j, y_j) = \varphi'_y(0, \pm 2) \neq 0.$$

Поэтому для первой пары мы берем первую форму матрицы Гессе, а для второй – другую, именно

$$H(\lambda_i, x_i, y_i) = \begin{pmatrix} 0 & 2x_i & 2y_i \\ 2x_i & 2 + 2\lambda_i & 0 \\ 2y_i & 0 & -2 + 2\lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2;$$

$$H(\lambda_j, y_j, x_j) = \begin{pmatrix} 0 & 2y_j & 2x_j \\ 2y_j & -2 + 2\lambda_j & 0 \\ 2x_j & 0 & 2 + 2\lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = 3, 4.$$

Для точек $(-1; 2; 0)$ и $(-1; -2; 0)$ имеем соответственно

$$\Delta_3(\lambda_i, x_i, y_i) = \Delta_3(-1, \pm 2, 0) = \begin{vmatrix} 0 & \pm 4 & 0 \\ \pm 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 64 > 0, \quad i = 1, 2;$$

Для другой пары точек $(1; 0; 2)$, $(1; 0; -2)$ аналогично $\Delta_3 < 0$.

Следовательно, данная функция имеет условный максимум 4 в точках $(\pm 2; 0)$, и условный минимум –4 в точках $(0; \pm 2)$.

Если бы при решении задачи мы исходили из сказанного в [3], то не смогли бы довести исследование до конца.

Разговор о достаточных условиях существования условного экстремума в стационарных точках функции Лагранжа мы начали в терминах матрицы Гессе ввиду достаточной прозрачности используемых здесь процедур. Но нельзя не отметить, что привлечение матрицы связано с необходимостью достаточно громоздкой вычислительной работы. Так, в приведенной нами задаче на екстремум функции трех переменных с двумя наложенными связями нужно было вычислять определители до пятого порядка включительно. И хотя их вычисление можно поручить одной из математических программ (Maple, MathCad и пр.), интересно рассмотреть и другие подходы, не основанные, по крайней мере изначально, на матрице Гессе.

Обратимся прежде всего к методу, основанному на исследовании знака дифференциала второго порядка функции Лагранжа в ее стационарной точке [4, 5, 6]. Позже мы скажем несколько слов и еще об одном подходе.

Пусть

$$(\lambda_0, x_0), \quad \lambda_0 = (\lambda_{10}, \ldots, \lambda_{k0}), x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$$

- стационарная точка функции Лагранжа в общей задаче на условный екстремум. Возьмем сначала частный (по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$) дифференциал второго порядка функции в точке x_0, то есть

$$d_x^2 L(\lambda_0, x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} L''_{x_i x_j}(\lambda_0, x_0) dx_i dx_j. \qquad (*)$$

Необходимо учесть заданные связи $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, k}$. Для этого фигурирующие в них функции заменяем значениями их дифференциалов в точке x_0,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(x_0)}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad i = \overline{1, k},$$

и получаем систему линейных уравнений относительно дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$. Ранг матрицы значений производных $\partial \varphi_i(x_0) / \partial x_j$ предполагается равным k, а поэтому k дифференциалов dx_i можно выразить через остальные $n-k$, которые являются независимыми. Заменяя в (*) найденные дифференциалы их значениями, представляем второй дифференциал функции Лагранжа в точке (λ_0, x_0) в виде квадратичной формы от $n-k$ независимых дифференциалов. Например, если первые дифференциалы выражены через $dx_{k+1},\dots,dx_n$, то получаем форму вида

$$d_x^2 L(\lambda_0, x_0) = \sum_{i,j=k+1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j$$

с матрицей

$$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{k+1,n}}, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

В случае ее положительной (отрицательной) определенности функция имеет в точке x_0 условный минимум (максимум).

В качестве примера рассмотрим задачу

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \; x^2 + y^2 = 4.$$

Стационарными точками функции Лагранжа здесь, как мы знаем, являются $(-1; \pm 2; 0)$ при $\lambda = -1$ и $(1; 0; \pm 2)$ при $\lambda = 1$. Частный дифференциал второго порядка функции Лагранжа по x, y равен

$$d_{xy}^2 L(\lambda, x, y) = (2 + 2\lambda)dx^2 + (-2 + 2\lambda)dy^2.$$

Уравнение связи после дифференцирования

$$2xdx + 2ydy = 0.$$

Для первых двух стационарных точек имеем

$$d_{xy}^2 L(-1, \pm 2, 0) = -4dy^2,$$

а из уравнения связи получаем в точках $(\pm 2, 0)$

$$2 \cdot (\pm 2)dx + 2 \cdot 0dy = 0, \quad \pm 4dx = 0, \quad dx = 0.$$

Таким образом, дифференциал $d_{xy}^2 L(-1, \pm 2, 0)$, содержащий, на основании заданной связи между x, y, только dy, отрицателен для всех значений dy, кроме $dy = 0$. Следовательно, в точках $(\pm 2; 0)$ данная функция имеет условный максимум.

Аналогично для точек $(0; \pm 2)$

$$d_{xy}^2 L(1, 0, \pm 2) = 4dx^2, \quad 2 \cdot 0dx + 2 \cdot (\pm 2)dy = 0, \quad dy = 0,$$

дифференциал $d_{xy}^2 L(1, 0, \pm 2)$ положителен для всех значений dx, кроме $dx = 0$, и данная функция имеет в точках $(0; \pm 2)$ условный минимум.

Мы получили тот же результат, что и выше, но формально более простым способом (формально потому, что мы, например, ничего не говорили о связи между дифференциалом второго порядка функции Лагранжа и условном экстремуме функции, а аккуратный разговор об этом, как мы знаем, совсем непрост).

Применим такой же метод к решению ранее рассмотренной задаче на условный экстремум функции $u = xyz$ при двух условиях (связях) $x + y + z = 5, \quad xy + yz + zx = 8.$ Мы уже знаем стационарные точки функции Лагранжа

$$L(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8),$$

которые полезно разделить на две таких группы:

$$(4, -2, 2, 2, 1), \quad (4, -2, 1, 2, 2), \quad (4, -2, 2, 1, 2);$$

$$\left(\frac{16}{9}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \quad \left(\frac{16}{9}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \quad \left(\frac{16}{9}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Частный дифференциал функции Лагранжа по переменным x, y, z

$$d^2_{xyz}L(P) = d^2_{xyz}L(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) = 2(z + \lambda_2)dxdy + 2(y + \lambda_2)dxdz + 2(x + \lambda_2)dydz,$$

наложенные связи (после их дифференцирования) дают

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz = 0. \end{cases} \tag{*}$$

Для точки $(4, -2, 2, 2, 1)$, имеем

$$d^2_{xyz}L(P_1) = -2dxdy, \quad \begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 3dx + 3dy + 4dz = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} dz = 0, \\ dy = -dx, \end{cases} \quad d^2_{xyz}L(P_1) = 2dx^2 > 0.$$

Аналогично для точек $(4, -2, 1, 2, 2)$, $(4, -2, 2, 1, 2)$ получаем соответственно

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 4dx + 3dy + 3dz = 0, \end{cases} \begin{cases} dx = 0, \\ dz = -dy, \end{cases} d^2_{xyz}L(4, -2, 1, 2, 2) = 2dy^2 > 0;$$

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 3dx + 4dy + 3dz = 0, \end{cases} \begin{cases} dy = 0, \\ dz = -dx, \end{cases} d^2_{xyz}L(4, -2, 2, 1, 2) = 2dx^2 > 0.$$

Следовательно, данная функция имеет условный минимум в точках $(2, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$. Аналогично доказываем, что в других точках $(4/3, 4/3, 7/3)$, $(7/3, 4/3, 4/3)$, $(4/3, 7/3, 4/3)$ имеем условный максимум.

Конечно, в других задачах дифференциал второго порядка функции Лагранжа может оказаться более сложным, и тогда мы определяем его знак с помощью критерия положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы от независимых дифференциалов независимых переменных (формально – по знакам главных миноров соответствующей матрицы). Так, в задаче

$$u = \sin x + \sin y + \sin z, \quad x + y + z = \pi$$

(задача о максимальной сумме синусов внутренних углов треугольника) частный дифференциал функции Лагранжа

$$L(\lambda, x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z + \lambda(x + y + z - \pi)$$

в стационарной точке $(\lambda_0, x_0, y_0, z_0) = (-1/2,\ \pi/3, \pi/3,\ \pi/3)$ (с учетом связи $dz = -dx - dy$) равен

$$d^2_{xyz}L(-1/2,\ \pi/3, \pi/3,\ \pi/3) = -\sqrt{3}dx^2 - \sqrt{3}dxdy - \sqrt{3}dy^2$$

и принимает (при $dx^2 + dy^2 \neq 0$) только отрицательные значения. Действительно, для соответствующей матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(матрицы квадратичной формы, матрицы Гессе) имеем $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$, и в точке $(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$ достигается условный максимум.

Мы считаем полезным обратить внимание студентов на существование еще одного способа решения задач на условный экстремум (см., например, [5, 6]), применимого к большой группе интересных задач, в том числе ко всем задачам, разработанным на кафедре высшей математики ДонНТУ в качестве индивидуального задания. Здесь не используются ни матрица Гессе, ни второй дифференциал функции Лагранжа.

Так, в уже рассмотренной задаче

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \ x^2 + y^2 = 4$$

мы можем, после записи известных уравнений

$$L'_x(\lambda, x, y) \equiv 2x + 2\lambda x = 0, \quad L'_y(\lambda, x, y) \equiv -2y + 2\lambda y = 0,$$

сложить первое, умноженное на x, со вторым, умноженным на y. Получим

$$2(x^2 - y^2) + 2\lambda(x^2 + y^2) = 0, \quad x^2 - y^2 = -\lambda(x^2 + y^2), \quad x^2 - y^2 = -4\lambda,$$
$$f(x, y) = -4\lambda .$$

Так как мы уже знаем, что $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, то сразу получаем значения условных максимума и минимума (4 и -4) в точках $(\pm 2; 0)$ и $(0; \pm 2)$ соответственно.

В связи с излагаемым методом представляет интерес случай, когда функция Лагранжа имеет единственную стационарную точку. О характере возникающих здесь трудностей и путях их разрешения можно судить по следующей задаче. Другая задача подобного рода рассмотрена в книге [5] (см. также [7, №№ 3672-3674]).

Докажем, что среднее арифметическое трех неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического,

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}, \qquad (*)$$

причем равенство возможно тогда и только тогда, если эти числа равны (для произвольного количества положительных чисел рассуждения проводятся аналогично).

Для этого рассмотрим задачу на условный экстремум функции $u = f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$ при условии $x + y + z = C$, где $C \geq 0$.

Частные производные функции Лагранжа здесь равны

$$L'_x(\lambda, x, y, z) = (yz) \Big/ \left(3\sqrt[3]{(xyz)^2} \right) - \lambda = 0, \qquad (\text{а})$$

$$L'_y(\lambda, x, y, z) = (xz) \Big/ \left(3\sqrt[3]{(xyz)^2} \right) - \lambda = 0, \qquad (\text{б})$$

$$L'_z(\lambda, x, y, z) = (xy) \Big/ \left(3\sqrt[3]{(xyz)^2} \right) - \lambda = 0. \qquad (\text{в})$$

Сумма уравнений (а), (б), (в), предварительно умноженных на x, y, z соответственно, дает

$$u = f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz} = \lambda$$

Решая систему уравнений (а-в) с учетом условия $x + y + z = C$, получаем стационарную точку функции Лагранжа $(C/3, C/3, C/3, C/3)$. Функция $u = f(x, y, z)$ имеет в точке $(C/3, C/3, C/3)$ значение $\lambda_0 = C/3$. Будучи непрерывной в замкнутой ограниченной области (треугольнике, который образуется пересечением плоскости $x + y + z = C$ с координатными плоскостями и который лежит в первом октанте), функция достигает в ней наибольшего и наименьшего значений - $\lambda_0 = C/3$ в стационарной точке и нуля на границе. Следовательно, неравенство (*) справедливо в плоскости $x + y + z = C$,

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{C}{3} = \frac{x+y+z}{3}, \quad \frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz},$$

а ввиду произвольности C - во всем первом октанте.

Таким образом, мы вкратце рассмотрели три основных способа решения задач на условный экстремум. Конечно, студенту полезно знать их все, и тогда он может в зависимости от ситуации выбрать наиболее подходящий способ. Например, рассмотренную выше задачу на условный экстремум функции $u = xyz$ с двумя наложенными связями проще решать с помощью исследования второго дифференциала функции Лагранжа. Задачу на нахождение максимума суммы синусов внутренних углов треугольника можно достаточно просто решить с помощью как матрицы Гессе, так и дифференциала второго порядка функции Лагранжа. Но ни одну из этих двух задач нельзя решать с помощью третьего метода. С другой стороны мы видели, что возможность воспользоваться последним позволяет избежать громоздких построений первых двух методов. Чем большим арсеналом подходов владеешь, тем лучше. И это, конечно, относится не только к методам решения задач на условный экстремум.

В дальнейшем мы предполагаем заняться локальными экстремумами функций нескольких переменных на базе теории квадратичных форм и теории собственных векторов и собственных значений их матриц.

Литература

1. Kosolapov J. Introduction in mathematical analysis. Differential calculus/ – Донецк: РВА ДонНТУ, 2006. – 169 с.

2. Косолапов Ю.Ф. Математичний аналіз першого курсу. Електронний навчальний посібник для студентів ДонНТУ/ - Донецьк: РВА ДонНТУ, 2009. – 458 с.

3. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики. Том 2/- М.: Высшая школа, 1973. – 400 с.

4. Немыцкий В.В., Слуцкая М.И., Черкасов А.Н. Курс математического анализа. Том 2/ – М.: ГТТИ, 1957. – 499 с.

5. Гребенча М.К., Новоселов С.И. Курс математического анализа. Часть 2/ – М.: Высшая школа, 1961. – 560 с.

6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1/ – М.: Наука, 1969. – 608 с.

7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990. 624 с.