Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Донецький національний технічний університет

Кафедра "Вища математика"

Збірник науково-методичних робіт

Випуск 7

Донецьк -2011

УДК 5:371.214.114, 621.923, 517.95(09), 531.18, 915.77.54, 531.38, 517.9, 517, 518, 531, 517.8, 539.5, 517.926.

Рекомендовано до друку Радою Донецького Національного технічного університету
Протокол № 5 від 20.05.2011 р.

Збірник науково-методичних робіт. - Вип. 7. - Донецьк: ДонНТУ, 2011. –353 с.

В збірнику представлено деякі проблеми та аспекти викладання вищої математики у техничному вузі, також різні напрямки застосування математичних методів до розв’зання інженерних задач, а саме, задач механіки твердого тіла, фізики магнітних явищ, статистичної фізики та інших.

Науково-методичні роботи є узагальненням досвіду викладачів кафедри по удосконалюванню математичної підготовки спеціалістів.

Видання розраховано на широке коло наукових робітників, а також аспірантів та студентів старших курсів техничніх університетів.

Адреса редакційної колегії : Україна, 83050, м. Донецьк, вул. Артема, 96, ДонНТУ, 3-й учбовий корпус, кафедра "Вища математика", тел. (062) 3010901.

УДК 51 (071)

ЕДИНЫЙ ПОДХОД К МЕТОДУ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ И ПРАВИЛУ КРАМЕРА

Мироненко Л.П., Рубцова О.А., Бреус С.
Донецкий национальный технический университет

Розглянуто єдиний підхід до методів зворотної матриці та правила Крамера розв'язання системи лінійних рівнянь. Використовуючи тензорні позначки обидва методи можуть бути розглянуті у єдиний спосіб, що значно скорочує час для отримання бажаного результату. Підхід дозволяє вести розрахунки у стислих формах запису, замість розгорнутих виразів матриць і операцій над матричними рівняннями. Важливим результатом є отримання формул Крамера як слідство метода зворотної матриці, що означає рівноправність обох методів.

При выводе явного вида обратной матрицы обычно привлекается понятие присоединенной (союзной) матрицы $\widetilde{A}=(A_{ji})$, которая получается из исходной $A=(a_{ij})$, заменой ее элементов a_{ij} алгебраическими дополнениями A_{ij} с последующим транспонированием [1-3]. Далее вычисляется произведение $A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=E\cdot\det A$, из которого устанавливается явный вид обратной матрицы.

При выводе формул Крамера обычно используется следующий прием. Каждое уравнение квадратной системы линейных уравнений умножается на алгебраические дополнения элементов j-го столбца основной матрицы системы и производится суммирование левой и правой частей уравнений соответственно. После этого применяются свойства определителей, которые приводят к вспомогательным определителям и формулам Крамера [1-3].

В нашем подходе обратная матрица вводится с помощью рассуждений подобных выводу формул Крамера, а сами формулы Крамера следуют непосредственно из метода обратной матрицы.

Таким образом, метод обратной матрицы и правило Крамера можно сформулировать из некоторых общих позиций для обоих методов.

1. Определение обратной матрицы и ее явный вид

Рассмотрим невырожденную матрицу n–го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \Delta=\det A\neq 0. \tag{1}$$

Определим обратную матрицу равенством

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E\,, \tag{2}$$

Применяя к данному равенству теорему умножения определителей

$$\det AB = \det A \cdot \det B\,,$$

убедимся в том, что, если матрица A невырожденная, то и обратная матрица является невырожденной

$$\det AA^{-1} = \det E \to \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \to \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \neq 0.$$

Запишем равенство (2) согласно правилу умножения матриц через матричные элементы, обозначив элементы обратной матрицы $(A^{-1})_{kj}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (A^{-1})_{kj} = \delta_{ij}\,, \tag{3}$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ - символ Кронекера.

Умножим обе части равенства на алгебраические дополнения A_{im} и суммируем по i

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (A^{-1})_{kj} A_{im} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ij} A_{im}$$

В правой части равенства за счет δ –символа Кронекера остается из всей суммы только член A_{jm}. В левой части равенства воспользуемся известным равенством $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{im} = \Delta \delta_{km}$, $\Delta = \det A$ [3-5]. В результате получим равенство

$$\Delta \sum_{k=1}^{n} \delta_{km} (A^{-1})_{kj} = A_{jm}\,.$$

В сумме остается только слагаемое с индексом $k = m$, т.е. $(A^{-1})_{mj}$. В результате получим явное выражение для обратной матрицы

$$(A^{-1})_{mj} = \frac{A_{jm}}{\Delta}, \tag{4}$$

или более подробно

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Как видно, обратная матрица получается заменой элементов исходной матрицы на соответствующие алгебраические дополнения с последующим транспонированием и делением каждого элемента на детерминант основной матрицы.

2. Метод обратной матрицы

Рассмотрим квадратную систему n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{6}$$

с невырожденной основной матрицей A.

Введя матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_b \end{pmatrix},$$

Запишем систему (6) в виде матричного уравнения

$$AX = B. \tag{7}$$

Умножим это уравнение слева на обратную матрицу и используем определение обратной матрицы (2), получим решение уравнения (7)

$$X = A^{-1}B. \tag{8}$$

В развернутом виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_b \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Отсюда ясно видно требование условия $\det A \neq 0.$.

На этом этапе метод обратной матрицы завершен. Остается подставить в равенство (9) конкретные значения входящих в равенство величин.

Однако изложение только начинается для вывода правила Крамера.

3. Правило Крамера как следствие метода обратной матрицы

Вернемся к квадратной системе n линейных уравнений с невырожденной основной матрицей A. Перемножим матрицы в равенстве (9)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_b A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \ldots + b_b A_{n2} \\ \ldots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \ldots + b_b A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим j –ю строку данной матрицы Δ_j, $j = 1,2,\ldots,n$ и заметим, что каждая из величин представляет собой разложение определителя основной матрицы A системы по элементам j –го столбца, у которого вместо j - столбца матрицы A стоит столбец свободных членов

$$b_1 A_{11j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_n A_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_j.$$

Величины Δ_j называются вспомогательными определителями системы (6).

В результате получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 / \Delta \\ \Delta_2 / \Delta \\ \ldots \\ \Delta_n / \Delta \end{pmatrix}$$

или, хорошо известные формулы Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \;\; j = 1,2,\ldots,n. \qquad (11)$$

Заключение

Предложенный. подход к изучению обратной матрицы и правила Крамера является оригинальным и значительно упрощает общепринятый вывод формул как для обратной матрицы, так и формул Крамера. Следует отметить, что появление вспомогательных определителей метода является естественным и происходит из произведения обратной матрицы и матрицы свободных членов. Удалось объединить оба метода – метод обратной матрицы и правило Крамера, что значительно сокращает лекционное время изложения, чем упрощает понимание методов с точки зрения их возможностей и ограничений.

Как видно из изложения, можно провести рассуждения в обратном порядке, исходя из формул Крамера (11). Тем самым будет доказана эквивалентность методов в рамках сформулированных для обоих методов требований.

Литература

1. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра - М.: Наука, 1999, 296 с.
2. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. Vol 1. – John Wilay and Sons, Inc., 1966, 667 с.
3. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра ФМЛ, 2003 - 157 с.
4. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры - М.: Наука, 1979, 512 с.
5. Мироненко Л.П. Соглашение о суммировании в линейной алгебре. - Сб. Науково-методичних робіт - Донецьк: ДонНТУ. 2009, вип. 6, с. 85-92.

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ