

УДК 515.2

## ПОВЕРХНІ КОНГРУЕНЦІЙ І ТРАНСВЕРСАЛЬНІ ПОВЕРХНІ КОНГРУЕНЦІЙ КООРДИНАТНИХ ЛІНІЙ

Скідан І.А., д.т.н.

Донецький національний технічний університет

Тел.: (062)338-48-85

Абрамова І.О., аспірантка\*

Автомобільно – дорожній інститут ДВНЗ „Донецький національний  
технічний університет”

Тел.: (0642) 55-39-99

**Анотація** – в статті пропонуються конструктивні схеми побудови і відповідні внутрішні рівняння поверхонь в криволінійних тривимірних координатних системах на основі їх відношення до трьох конгруенцій координатних ліній.

**Ключові слова** – спеціальні координати, координатні лінії, конгруенція, внутрішнє рівняння, параметричні рівняння, трансверсальна поверхня.

*Постановка проблеми.* Однією з основних задач прикладної геометрії поверхонь є задача управління їх формою. Успішне розв’язання цієї задачі проходить через виявлення механізму формоутворення поверхні, що полягає у складанні конструктивної схеми побудови поверхні та у її аналітичній реалізації.

*Аналіз останніх досліджень.* В роботах [1,2] трансверсальною уявляють поверхню, кожна точка якої належить певному проміну конгруенції ліній.

Функціями

$$x = f(t, u, v), y = \varphi(t, u, v), z = \psi(t, u, v) \quad (1)$$

вводять криволінійні координати  $t, u, v$  простору, якщо  $x, y, z$  – декартові координати. Область існування правильної координації простору функціями (1) визначається з нерівності [3,4]

$$\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(t, u, v)} \neq 0, \quad (2)$$

В цій області рівняння (1) можливо розв’язати відносно  $t, u, v$ , тобто, отримати функції зворотного переходу від декартових координат до криволінійних у вигляді

---

\* Науковий керівник – д.т.н., професор Скідан І.А.

$$t = f_1(x, y, z), u = \varphi_1(x, y, z), v = \psi_1(x, y, z) \quad (3)$$

Функції (1) виражають в той же час три конгруенції координатних ліній системи координат  $t, u, v$  [5].

Оскільки координатними лініями криволінійної системи координат  $t, u, v$  є в загальному випадку криві, формування поверхонь поданням внутрішніх по відношенню до (1) рівнянь, що є певними залежностями між криволінійними координатами  $t, u, v$ , становить значний інтерес з врахуванням того, що параметричні рівняння шуканої поверхні отримують безпосередньою підстановкою внутрішнього рівняння до (1). Більшість програмних комплексів візуалізації поверхонь орієнтовано саме на параметричний спосіб їх подання.

*Формулювання цілей статті.* В статті поставлено за ціль розкрити механізм формування поверхонь у криволінійних системах координації простору шляхом встановлення відповідностей між різновидами внутрішніх рівнянь і конструктивними схемами формування на основі їх відношення до конгруенцій координатних ліній.

*Основна частина. 1. Внутрішнє рівняння з довільністю вибору однієї сталої.* При поданні функціями (1) криволінійної координації простору він розшаровується на три сім'ї координатних поверхонь системи  $t, u, v$  в області, що задовільнює нерівності (2). Подання внутрішнього рівняння у вигляді рівності сталій однієї з трьох координат  $t, u, v$ , наприклад

$$u = c \quad (4)$$

і підстановка внутрішнього рівняння до функцій (1) приводить до параметричних рівнянь координатної поверхні (4) системи  $t, u, v$ . Дослідження як форми, так і внутрішньої параметризації координатної поверхні уявляється не завжди тривіальним. В цьому випадку поверхня (4) є трансверсальною поверхнею конгруенції  $u$  – ліній і одночасно поверхнею двох конгруенцій координатних  $v$  – ліній та  $t$  – ліній системи  $t, u, v$ .

На рис.1 показано координатну поверхню  $u=2$  гіперболічної системи координат, що подається функціями [6]

$$x = v \sin \alpha \cos t - u \sin t, y = v \sin \alpha \sin t + u \cos t, z = v \cos \alpha \quad (\alpha = \text{const}).$$

Ця поверхня є трансверсальною поверхнею конгруенції  $u$  – ліній (прямих, дотичних до конуса з кутом  $\alpha$  нахилу твірної до осі, паралельних площині  $XOY$ ) і одночасно поверхнею двох конгруенцій  $t$  – ліній (кіл з центрами на осі  $OZ$  у площинах, паралельних  $XOY$ ) та  $v$  – ліній (прямих у площинах, дотичних до конуса, паралельних твірній дотику).

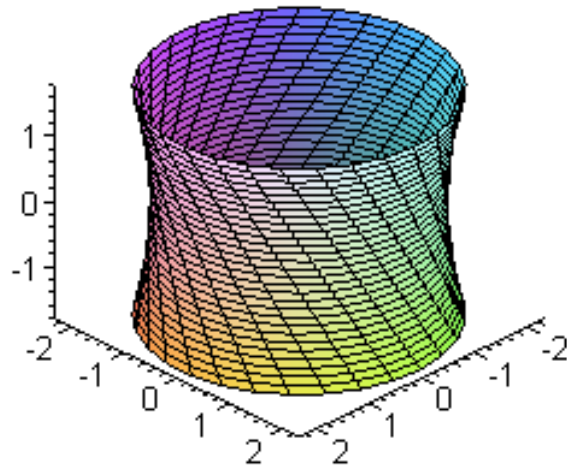


Рис. 1

Примітимо, що система віднесення однопорожнинного гіперболоїда незвична: сім'я прямих збігається з асимптотичними, сім'я кіл – з лініями кривини.

У подальшому будемо розглядати одне з трьох можливих представлень внутрішнього рівняння поверхонь, змінюючи по чергово ролі функції і параметрів циклічними підстановками криволінійних координат  $t, u, v$  системи.

**2. Внутрішнє рівняння з довільністю подання однієї функції від двох змінних.** Конструктивна схема формоутворення поверхні, трансверсальної по відношенню однієї з трьох конгруенцій координатних ліній криволінійної системи координат і відповідної форми представлення внутрішнього рівняння поверхні, наведено в [5]. Наприклад, в тангенціально-сферичній системі координат [7]

$$x = \frac{u \cos t}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{u \sin t}{u^2 + v^2}, \quad z = \frac{v}{u^2 + v^2},$$

що отримується інверсією циліндричної системи, трансверсальна поверхня конгруенції  $u$  – ліній, що має внутрішнє рівняння  $u = av + bt$  ( $a=0.5, b=0.2$ ) представлена на рис.2, а трансверсальна поверхня конгруенції  $v$  – ліній, що має внутрішнє рівняння  $v = cu + dt$  ( $c=0.5, d=0.2$ ) представлена на рис.3.

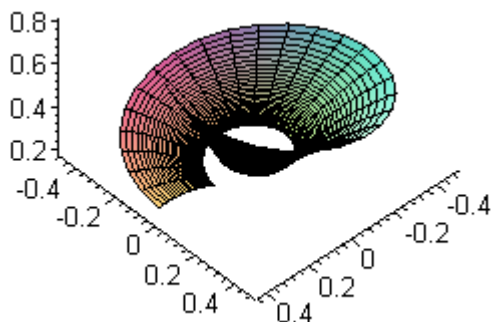


Рис. 2

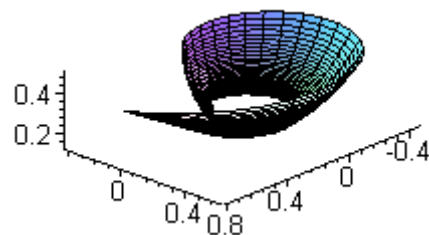


Рис. 3

### 3. Внутрішнє рівняння з довільністю вибору однієї функції від однієї змінної.

Конструктивна схема полягає у наступному. Нехай на координатній поверхні, наприклад,  $v=\text{const}$ , подана лінія  $u=u(t)$ . Ця лінія конгруенцією  $v$  – ліній проєкціюється на всі поверхні  $v=\text{const}$ , так що внутрішнє рівняння  $u=u(t)$  є спільним для всіх координатних поверхонь  $v=\text{const}$ , і це рівняння виражає сім'ю ліній на поверхнях  $v=\text{const}$ . Щодо утворюваної поверхні, іншу сім'ю координатних ліній на ній складають координатні  $v$  – лінії системи, тобто, вона є поверхнею конгруенції  $v$  – ліній.

Наприклад, в сферичній системі координат

$$x = v \cos u \cos t, \quad y = v \cos u \sin t, \quad z = v \sin u$$

внутрішньому рівнянню  $u = u_0 + a \sin(nt)$  ( $a=0.2$ ,  $u_0=0.45$ ,  $n=4$ ) відповідає поверхня конуса, на прямої якого лінія на поверхні сфери, подана внутрішнім рівнянням (рис.4). Конус виділено із конгруенції (в'язки) прямих ( $v$  – ліній) і є носієм сферичних ліній.

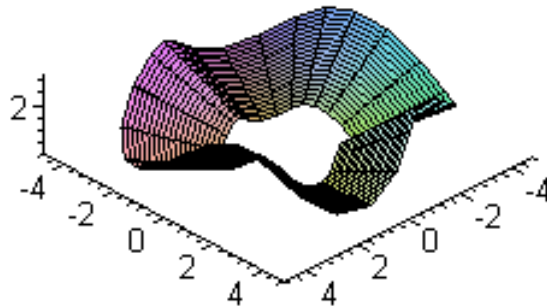


Рис. 4

### 4. Внутрішнє рівняння подається через посередництво трьох функцій однієї і тієї ж змінної,

$$x = x(w), \quad y = y(w), \quad z = z(w), \quad (5)$$

що виражають лінію у просторі.

Проекціюючи лінію (5) конгруенцією координатних ліній на координатні поверхні  $v=\text{const}$ , отримуємо сім'ю проєкцій, рівняння яких з використанням (3)

$$t = f_1[x(w), y(w), z(w)], \quad u = \varphi_1[x(w), y(w), z(w)] \quad (6)$$

Підстановка (6) до (1) дає:

$$x = x(v, w), \quad y = y(v, w), \quad z = z(v, w) - \quad (7)$$

параметричні рівняння поверхні конгруенції  $v$  – ліній, що проходить через лінію (5).

На рис.5 показано поверхню у бісферичних (біполярних) координатах, що проходить через гвинтову лінію

$$x_0 = r \cdot \cos(w), y_0 = r \cdot \sin(w), z_0 = a \cdot w; (r = 2, a = 0.3)$$

і є поверхнею конгруенції  $v$  – ліній.

Бісферичні (біполярні) координати подаються функціями (див.(1))

$$x = \frac{\sin u \cdot \cos t}{chv - \cos u}, y = \frac{\sin u \cdot \sin t}{chv - \cos u}, z = \frac{shv}{chv - \cos u}. \quad (8)$$

Функції (3) для них мають вигляд [8]

$$t = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, u = \frac{i}{2} \cdot \ln \frac{\left[ \sqrt{x^2 + y^2 - i \cdot a} \right]^2 + z^2}{\left[ \sqrt{x^2 + y^2 + i \cdot a} \right]^2 + z^2}, v = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x^2 + y^2 + (z + a)^2}{x^2 + y^2 + (z - a)^2}.$$

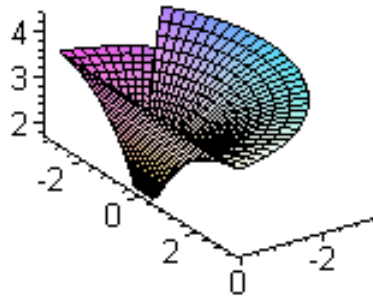


Рис. 5

*Висновки.* Виявлені геометричні сутності координатних поверхонь і координатних ліній тривимірних координатних систем, а також внутрішніх рівнянь, що подають поверхні разом з функціями введення криволінійних координат дозволяють цілеспрямовано управляти формою поверхонь і здійснювати їх візуалізацію засобами комп'ютерної графіки.

#### Література

1. *E.P.Lane.* Surface and curvilinear congruences. Transactions of American Mathematical Society. V.34., №3, 1932
2. *И.А. Скидан.* Гладкосопряженные поверхности как трансверсальные поверхности конгруэнций прямых // Вопросы естественных наук /Научные труды. Вып.18(4). Ташкентский госуниверситет, Бухарский госуд. Пединститут.- Ташкент- 1969. с.263-270.
3. *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч.1. М. – Л: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947. – 512 с.

4. *Скидан И.А.* Геометрическое моделирование кинематических поверхностей в специальных координатах: Дис...докт. техн. наук: 05.01.01. - М.; 1989. - 340 с.
5. *Скидан И.А., Абрамова И.О.* Трансверсальні поверхні конгруенцій в спеціальних координатах // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет – Вип.4, т.40. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – с.32-36.
6. *Скидан И.А.* Поверхности в гиперболических координатах.// Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1976. – Вып.21. – с.43-45.
7. *Дьяконов В.* Maple 7. Санкт - Петербург, Москва, Харьков, Минск: Питер. – 2002. – 666 с.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: "Наука", 1973. – 831 с.

## **CONGRUENCE SURFACES AND TRANSVERSAL CONGRUENCE SURFACES OF COORDINATE LINES**

I. SKIDAN, I. ABRAMOVA

### **Summary**

**The constructive schemes and the corresponding inner equations of parametrical representation of curvilinear system of coordinates which determine a surface are proposed.**