УДК 515.2

ТРАНСВЕРСАЛЬНІ ПОВЕРХНІ КОНГРУЕНЦІЙ В СПЕЦІАЛЬНИХ КООРДИНАТАХ

Скідан І.А., д.т.н.
Донецький національний технічний університет
Тел.: (062)338-48-85
Абрамова І.О., аспірантка*
Автомобільно – дорожній інститут ДВНЗ „Донецький національний технічний університет”
Тел.: (0642) 55-39-99

***Анотація* – В роботі пропонується спосіб вивчення поверхонь, що подаються явною формою у спеціальних координатах. Функція, що подає поверхню, є її внутрішнім рівнянням. Наводяться обчислювальні формули для обчислення перших і других частинних похідних подання поверхні внутрішнім рівнянням у спеціальних координатах.**

***Ключові слова* – спеціальні координати, трансверсальна поверхня, конгруенція ліній, дотична площина, нормаль, квадратичні форми.**

Постановка проблеми. Предметом прикладної геометрії поверхонь є їх геометричне формоутворення за специфічними умовами, головною з яких слід визнати відповідність геометричної форми прикладному функціональному призначенню. Такі умови, як застосовність відомих методів розрахунків та існуючих технологій відтворення в матеріалі надають предмету прикладної геометрії поверхонь ролі передпроектних досліджень, цінність яких зростає з орієнтацією на використання комп’ютерних технологій у проектуванні та виготовленні.

Отже, розробка методів керування формою поверхонь, що подаються кінцевими функціями, та способів врахування наперед поданих умов – актуальна проблема прикладної геометрії.

Аналіз останніх досліджень. Термін «трансверсальні поверхні конгруенції» був введений Лейном [1]. В прикладній геометрії дослідженню трансверсальних поверхонь присвячені роботи [2, 3], в яких променем конгруенцій була пряма.

Конгруенцію ліній можна подати параметричними рівняннями

---

* Науковий керівник – д.т.н., професор Скідан І.А.

$$x = f(t,u,v), y = \varphi(t,u,v), z = \psi(t,u,v) \quad (1)$$

де u, v – параметри форми чи положення променя конгруенції, t – параметр положення поточної точки на промені [4]. В області, де якобіан

$$\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(t,u.v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2)$$

через будь-яку точку простору проходить єдина лінія конгруенції. Якщо (1) – конгруенція прямих, то умова (2) свідчить про те, що конгруенція (1) першого порядку.

Також функціями (1) вводяться спеціальні координати, координатними поверхнями яких є поверхні t=const, u=const, v=const [5]. В той же час параметричні рівняння (1) подають три конгруенції параметричних ліній криволінійної системи координат, які утворюються перетинами трьох пар координатних поверхонь.

Формулювання цілей статті. В статті поставлено за ціль запропонувати спосіб подання трансверсальних поверхонь трьох конгруенцій координатних ліній певної системи криволінійних координат і отримати обчислювальні формули для визначення диференціально-геометричних характеристик цих поверхонь.

Основна частина. Трансверсальною називають поверхню як геометричне місце точок гладко і неперервно розташованих по одній на кожному промені конгруенції.

В прямокутних декартових координатах на прямих конгруенції, паралельних осі OZ, точки трансверсальної поверхні подають явною функцією

$$z = f(x, y).$$

Три трансверсальні поверхні трьох конгруенцій прямих, паралельних осям OX, OY, OZ

$$z = f(x, y), y = f(z, x), x = f(y, z)$$

мають однакову форму і відрізняються лише положенням. У випадку криволінійної системи координат t, u, v трансверсальні поверхні, які пропонується подавати явними функціями

$$v = v(t,u), \quad (3)$$

$$u = u(v,t), \quad (4)$$

$$t = t(u,v) \quad (5)$$

будуть різними, навіть якщо функції (3), (4), (5) однакові.

Подання трансверсальних поверхонь однієї з конгруенцій координатних ліній відповідною функцією (3), (4) або (5) зручне тим, що звичайна підстановка цієї функції до рівнянь (1), що вводять криволінійну систему координат, зводять останні до параметричних рівнянь відповідної трансверсальної поверхні. З іншого боку, саме на параметричне подання орієнтовано більшість програм комп’ютерної візуалізації поверхонь.

Уявити сутність процесу формоутворення трансверсальних поверхонь можна, зіставляючи подання поверхні явною формою у прямокутних декартових та у спеціальних координатах (Рис. 1, 2).

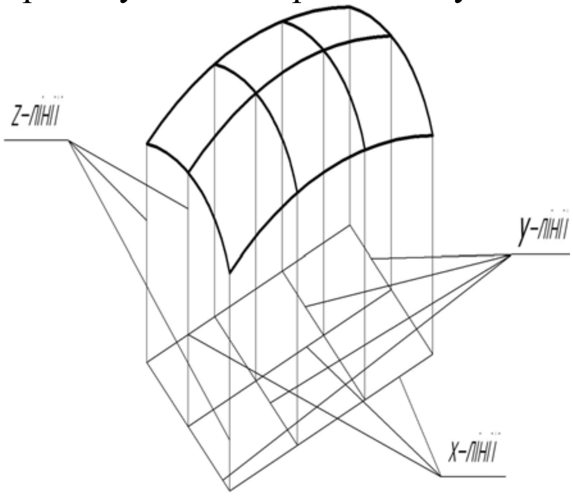

Рис.1

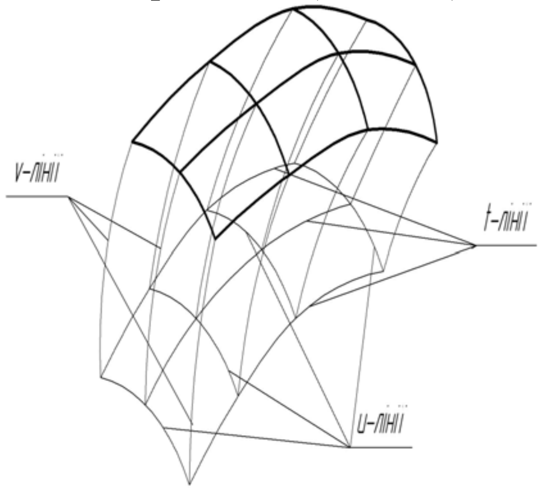

Рис.2

У випадку прямокутних декартових координат схему формоутворення можна представити таким чином: на площині z=0 ортогональними сім’ями прямих, паралельних осям OX та OY в області існування поверхні подається сітка, кожен вузол якої має координати (x_i, y_i, 0). Через вузли проводять прямі, паралельні осі OZ, і відкладають від них відстані $z_i=f(x_i, y_i)$, отримуючи точки поверхні з координатами (x_i, y_i, z_i).

У випадку криволінійних координат t, u, v принаймні одна з конгруенцій t - ліній, u – ліній, v – ліній складається з кривих. Тому сітка з t – ліній та u – ліній на поверхні v=0 у загальному випадку складається з двох сімей кривих, а точки поверхні v=(t, u) мають криволінійні координати (t_i, u_i, v_i), де t_i, u_i – криволінійні координати вузлів на поверхні v=0, v_i – значення функції $v=v(t_i, u_i)$, що подає поверхню.

З використанням функцій (1), що вводять спеціальну систему координат, криволінійні координати t_i, u_i, v_i перераховують у прямокутні декартові координати.

Щодо виразів диференціально-геометричних характеристик трансверсальних поверхонь конгруенцій координатних ліній, їх можна отримати, відштовхуючись від відповідних виразів для поверхонь у параметричному представлені [5]. При цьому можливо навести вирази для двох рівнів невизначеності:

– для невизначених функцій (1) і однієї з функцій (3), (4), (5);
– для визначених функцій (1) і невизначеної однієї з функцій (3), (4), (5).

Якщо визначені і функції (1) і одна з функцій (3), (4), (5), то вирази диференціально-геометричних характеристик трансверсальних поверхонь, що подаються однією з функцій (3), (4), (5) отримують як відомі вирази для поверхні, поданої параметричною формою, після підстановки до (1) відповідної функції.

Диференціально-геометричні характеристики поверхонь залежать або безпосередньо від перших і других частинних похідних параметричних рівнянь, або від коефіцієнтів першої і другої квадратичних форм, які в свою чергу залежать від перших і других частинних похідних. Тому обмежимось виразами перших і других частинних похідних для першого рівняння невизначеності і трансверсальних поверхонь з внутрішнім рівнянням (5).

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial \psi}{\partial u}+\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial \psi}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial v\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial t}\frac{\partial t}{\partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial v^2}.$$

Для трансверсальних поверхонь, що подаються функціями (3) або (4) вирази частинних похідних знаходимо в [7].

Висновки. Подання трансверсальних поверхонь конгруенцій координатних ліній відомих спеціальних координатних систем внутрішнім рівнянням, яке дозволяє перейти до параметричного представлення, дозволяє підключити комп′ютерно-графічні засоби візуалізації для аналізу формоутворення.

Література

1. *E.P.Lane*. Surface and curvelinear congruences. Transactions of American Mathematical Society. V.34., №3, 1932
2. *И.А. Скидан.* Гладкосопряженные поверхности как трансверсальные поверхности конгруэнций прямых // Вопросы естественных наук /Научные труды. Вып.18(4). Ташкентский госуниверситет, Бухарский госуд. Пединститут.- Ташкент- 1969. с.263-270.
3. *Н.И. Седлецкая.* Принципы и некоторые конструктивные приемы построения трансверсальных поверхностей конгруэнций прямых // Прикладная геометрия и инженерная графика. Вып.11. – Киев, «Будівельник», 1970
4. *G. Darboux.* Leçons sur la theorie générale des surfaces. II partie. Paris, Gauthier – Villars et Cie, Éduteurs, 1915. – 512 с.
5. *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч.I. М. – Л: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947. – 512 с.
6. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометри. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 420 с.
7. *Скидан И.А.* Геометрическое моделирование кинематических поверхностей в специальных координатах: Дис…докт. техн. наук: 05.01.01. - М.; 1989. - 340 с.

TRANSVERSAL SUERFACES OF CONGRUENCES IN SPECIAL COORDINATES

I. SKIDAN, I. ABRAMOVA

Summary

The representation of a surface as set of the points each of which is disposed on the line of a congruence by explicit function in special coordinates is proposed.