МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Косолапов Ю.Ф., Косолапова Н.В.

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие по изучению элементарной и элементов высшей математики для студентов подготовительного отделения ДонНТУ

Рассмотрено на заседании
кафедры высшей математики
Протокол № 8 от 6.04.2006 г.

Утверждено на заседании
учебно-методического
совета ДонНТУ
Протокол № 2 от 24.05.2006 г.

ДОНЕЦК 2006

УДК 512.1+514.11+517.2(071)

Косолапов Ю.Ф., Косолапова Н.В. МАТЕМАТИКА: Учебное пособие по изучению элементарной и элементов высшей математики для студентов подготовительного отделения ДонНТУ/ - Донецк: РВА ДонНТУ, 2006. – с.167.

Излагаются основные поняття элементарной математики (множество вещественных чисел, арифметические и алгебраические операции над вещественными числами, алгебраические уравнения и неравенства, логарифмы, тригонометрия, основные элементарные функции, их свойства и графики, элементы планиметрии и стереометрии). Сокращенно изучаются некоторые разделы высшей математики (аналитическая геометрия на плоскости, предел и непрерывность функции, производная и ее простейшие применения). Подробно рассматриваются примеры решения типичных задач.

Для слушателей и преподавателей подготовительных отделений и подготовительных курсов высших учебных заведений.

СОСТАВИТЕЛИ: Косолапов Ю.Ф., Косолапова Н.В.

РЕЦЕНЗЕНТ: кандидат физико-математических наук, доцент Кочергин Е.В.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ ЗА ВЫПУСК:
зав. кафедрой висшей математики ДонНТУ,
доктор технических наук, профессор Улитин Г.М.

МНОЖЕСТВО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Существуют числа натуральные, целые, рациональные, иррациональные, вещественные, комплексные.

Множество

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

- это **множество всех натуральных чисел**. Число 1 принадлежит множеству $\boldsymbol{N}$ ($1 \in \boldsymbol{N}$), 1 - натуральное число. Число 0 (нуль) не принадлежит множеству $\boldsymbol{N}$ ($0 \notin \boldsymbol{N}$), 0 не является натуральным числом.

Множество

$$\boldsymbol{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \dots\} \text{ –}$$

это **множество всех целых чисел**. Число 0 принадлежит множеству $\boldsymbol{Z}$ ($0 \in \boldsymbol{Z}$), 0 - целое число. Множество всех натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ является частью (подмножеством) множества всех целых чисел $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$.

Рациональное число - это число, которое можно представить как частное (отношение) двух целых чисел m/n ($m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$). **Множество всех рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$** содержит: 1) все целые числа (в частности, натуральные); 2) все обыкновенные дроби; 3) все конечные десятичные дроби; 4) все бесконечные периодические дроби. Числа 3, -5, 3/5, 0,(2) = 0,222222...=2/9 - рациональные (принадлежат множеству $\boldsymbol{Q}$).

Иррациональное число - это число, которое можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. **Множество всех иррациональных чисел** мы будем обозначать буквой $\boldsymbol{I}$. Числа $\pi = 3,1415926\dots$, число Эйлера $e = 2,718281828459045\dots$, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ - иррациональные (принадлежат множеству $\boldsymbol{I}$).

Все рациональные и иррациональные числа образуют **множество всех вещественных** чисел $\boldsymbol{R}$. Оно является объединением множества $\boldsymbol{Q}$ всех рациональных чисел и множества $\boldsymbol{I}$ всех иррациональных чисел, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$.

Геометрическое изображение вещественного числа

Вещественные числа можно изображать точками на **координатной** (или **числовой)** оси.

Числовая (координатная) ось - это прямая линия, на которой выбраны: 1) определённая точка O (начало); 2) положительное направление, обозначенное стрелкой; 3) единица длины.

Каждому вещественному числу x соответствует (ставится в соответствие) точка числовой (координатной) оси, а именно точка M с координатой x. Справедливо обратное: каждой точке числовой (координатной) оси соответствует (ставится в соответствие) вполне определённое число: её координата. Если число a положительное ($a > 0$), оно изображается точкой A справа от начала O. Отрицательное число b ($b < 0$) изображается точкой B слева от начала O. Точка O представляет число 0 (нуль). На рис. 1 $a = |OA|$, $в = -|OB|$, где $|OA|, |OB|$ - соответственно расстояния от точки O до точек A и B.

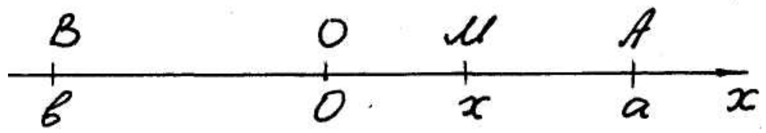

Рис. 1. Числовая (координатная) ось

В дальнейшем мы будем обозначать символом

$$\{ x \mid P(x) \} \text{ или } \{ x : P(x) \}$$

множество всех вещественных чисел, обладающих свойством $P(x)$.

Например,

$R_+ = \{x \mid x \geq 0\} \equiv \{x : x \geq 0\}$- множество всех неотрицательных (больших или равных нулю) чисел;

$R_+^* = \{x \mid x > 0\} \equiv \{x : x > 0\}$- множество всех положительных чисел;

$R_- = \{x \mid x \leq 0\} \equiv \{x : x \leq 0\}$- множество всех неположительных (меньших или равных нулю) чисел;

$R_-^* = \{x \mid x < 0\} \equiv \{x : x < 0\}$- множество всех отрицательных чисел.

Числовые интервалы

Мы будем часто использовать специальные множества вещественных чисел – интервалы. Назовём прежде всего так называемые ограниченные, или конечные интервалы:

$[a, b] = \{ x \mid a \le x \le b \} \equiv \{ x : a \le x \le b \}$ - **отрезок**, или замкнутый ограниченный (конечный) интервал, или сегмент - множество всех вещественных чисел, не меньших *a* и не больших *b;*

$(a, b) \equiv]a, b[= \{ x \mid a < x < b \} \equiv \{ x : a < x < b \}$ - **интервал***,* или открытый ограниченный (конечный) интервал - множество всех вещественных чисел, заключенных между *a* и *b* (больших, чем *a* и меньших, чем *b*)*;*

$[a, b) \equiv [a, b[= \{x \mid a \le x < b\}$, $(a, b] \equiv]a, b] = \{x \mid a < x \le b\}$ - полуоткрытые ограниченные (конечные) интервалы.

Точки *a* и *b* всех этих интервалов называются их концами, *a* - левым концом, а *b* - правым концом.

Наряду с ограниченными (конечными) интервалами используются бесконечные интервалы – полуоткрытые ($(-\infty, a] = \{ x : x < a\}$, $[a, \infty) = \{x \mid x > a\}$, множество всех неотрицательных чисел $R_+ = [0, \infty)$, множество всех неположительных чисел $R_- = (-\infty, 0]$), открытые: ($(-\infty, a)$, (a, ∞), множество всех положительных чисел $R_+^* = (0, \infty)$, множество всех отрицательных чисел $R_-^* = (-\infty, 0)$, а также множество всех вещественных чисел $\boldsymbol{R} = (-\infty, \infty)$).

Числовым интервалам соответствуют интервалы на числовой (координатной) оси. Так, множествам всех неотрицательных, положительных, неположительных и отрицательных чисел R_+, R_+^*, R_-, R_-^* соответствуют лучи на числовой оси с или без начальной точки 0 (рис. 2 а, 2 б, 2 в, 2 г). Отрезок $[a, b]$ изображается на оси отрезком *AB,* где *A* - точка с координатой *a,* а *B* - точка с координатой *b* (рис. 3 а). Интервал

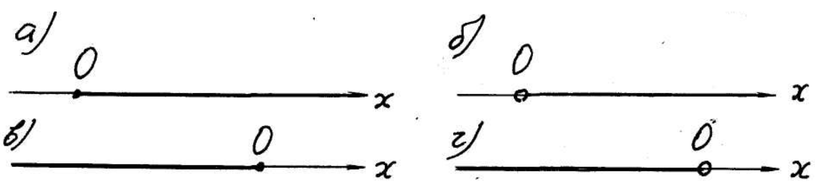

Рис. 2

(*a, b*) изображается тем же отрезком, что и [*a*, *b*], но с выколотыми концами *A*, *B* (рис. 3 б).

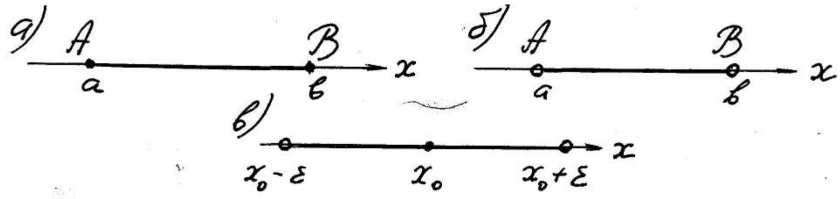

Рис. 3

Любой (открытый) интервал, содержащий точку x_0, называется окрестностью этой точки. Например, интервал (x_0 - ε, x_0 + ε) длины 2ε, симметричный относительно точки x_0, называется ε-окрестностью точки x_0 (рис. 3 с).

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Сложение

Рассмотрим равенство *a* + *b* = *c* (читается: *a* плюс *b* равно *c*). Здесь *a* + *b,* или *c* называется суммой чисел *a* и *b.* Знак «+» обозначает сумму. Число *a (b)* называется слагаемым*,* числа *a* и *b* - слагаемыми. Если нужно выполнить действие, или операцию сложения чисел *a* и *b,* говорят: сложить числа *a* и *b,* найти сумму чисел *a* и *b,* прибавить к числу *a (b)* число *b (a).*

Вычитание

Рассмотрим равенство *a* - *b* = *c* (читается *a* минус *b* равно *c*). Здесь *a* - *b,* или *c* называется разностью чисел *a* и *b.* Знак «-» обозначает разность. Число *a* называется уменьшаемым*,* а число *b* — вычитаемым. Если нужно выполнить действие, или операцию вычитания, говорят: из *a* вычесть *b,* отнять *b* от *a,* от числа *a* отнять число *b.*

Умножение

Рассмотрим равенство *ab* = *a*· *b* = *c* (читается: *a* на *b* равно *c, a* умножить на *b* равно *c*). Здесь *ab* = *a* · *b* называется произведением чисел *a* и *b.* Знак «•»(точка) обозначает произведение. Число *a (b)* называется сомножителем*,* числа a и b - сомножителями, Если нужно выполнить действие, или операцию умножения, говорят: умножить a на b, перемножить числа a и b.

Деление. Дроби и арифметические действия над ними.

Рассмотрим равенство $a : b = a/b = c$ (читается: a, делённое на b, равно c, a разделить на b). Здесь $a : b == a/b$, или c называется частным от деления числа a на число b, или отношением чисел a и b. Знак «:» (двоеточие) или «/» (чёрточка) обозначает деление, или отношение. Число a называется делимым, число b - делителем. Если нужно выполнить действие, или операцию деления, говорят: разделить, или поделить число a на число b, найти отношение чисел a и b, найти частное от деления a на b. Выражение (частное, отношение)

$$\frac{a}{b}$$

называется дробью (часто – обыкновенной дробью) с числителем a и знаменателем b. Числа a и b называются ещё членами дроби, а разделяющая их чёрточка - чертой дроби.

Величина дроби не изменится, если её числитель и знаменатель умножить на одно и то же число (**основное свойство дроби**).

На основном свойстве дроби основано приведение различных дробей к общему знаменателю, а также сокращение дроби на общий множитель числителя и знаменателя.

Например, дроби $\frac{11}{15}, \frac{7}{20}$ имеют наименьший общий знаменатель 60 (наименьшее общее кратное чисел 15 и 20). Чтобы привести дроби к общему знаменателю, умножим числитель и знаменатель первой дроби на 4, а второй – на 3. Получим

$$\frac{11}{15} = \frac{4 \cdot 11}{4 \cdot 15} = \frac{44}{60}, \frac{7}{20} = \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 20} = \frac{21}{60}.$$

Приведя дроби к общему знаменателю, мы можем их сложить или вычесть, складывая или вычитая числители дробей и оставляя неизменным их общий знаменатель. Именно,

$$\frac{11}{15}+\frac{7}{20}=\frac{44}{60}+\frac{21}{60}=\frac{44+21}{60}=\frac{65}{60}=\frac{5\cdot 13}{5\cdot 12}=\frac{13}{12}=1\frac{1}{12},\frac{11}{15}-\frac{7}{20}=\frac{44}{60}-\frac{21}{60}=\frac{44-21}{60}=\frac{23}{60}$$

Сложив дроби, мы заметили, что числитель и знаменатель суммы содержат общий множитель 5, на который мы и сократили дробь-сумму.

Найдём еще сумму дробей

$$\frac{m}{abc},\frac{n}{acd}$$

с числителями m, n и знаменателями abc, acd, где a, b, c, d - буквенные сомножители. Общим знаменателем здесь является произведение $abcd$, и для приведения дробей к общему знаменателю мы умножаем числитель и знаменатель первой на d, а второй – на b. Получим

$$\frac{m}{abc}+\frac{n}{acd}=\frac{dm}{abcd}+\frac{bn}{abcd}=\frac{dm+bn}{abcd}.$$

Напомним ещё правила умножения и деления дробей:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=\frac{ad}{bc}.$$

Чтобы перемножить две дроби, нужно перемножить их числители и знаменати. Первое произведение является числителем произведения дробей, а второе – её знаменателем.

Чтобы разделить две дроби, достаточно первую умножить на дробь, обратную второй.

Можно сформулировать и другое правило деления дробей: числитель частного равен произведению числителя первой дроби и знаменателя второй, а знаменатель частного равен произведению знаменателя первой дроби и числителя второй.

Равенство двух отношений называется пропорцией. В пропорции

$$a : b = c : d$$

числа a и d называются крайними членами пропорции, а числа b и c - средними членами пропорции.

Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов (**основное свойство пропорции**):

$$ad = bc.$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ

Рассмотрим равенство

$$a^n = b.$$

Оно читается так: a в n-ой (энной) степени равно b, или a в степени n равно b, или n-ая (энная) степень числа a равна b. Число a называется основанием степени, число n - показателем степени, выражение a^n - степенью. Если нужно выполнить действие (операцию) возведения в степень, говорят: возвести a в n-ую (энную) степень, возвести a в степень n. Выражение a^2 читается так: a-квадрат, a в квадрате, квадрат числа a, a во второй степени. Выражение a^3 читается так: a-куб, a в кубе, куб числа a, a в третьей степени.

Основные свойства степеней

1. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

2. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются,

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

3. При возведении степени в степень перемножаются показатели степеней

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

4. При умножении степеней с одинаковыми показателями перемножаются основания степеней,

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

5. При делении степеней с одинаковыми показателями делятся основания степеней,

$$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

6. Любое (отличное от нуля) число в нулевой степени равно единице,

$$a^0 = 1.$$

7. Степень с отрицательным показателем определяется следующим равенством:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

8. Если числа a и b связаны неравенством $0 \le a < b,$ то для любого натурального числа n

$$a^n < b^n$$

Формулы сокращённого умножения и деления

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

Квадрат суммы (разности) двух чисел равен квадрату первого числа плюс (минус) удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

2. $$\begin{aligned} &(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b), \\ &(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a+b). \end{aligned}$$

Куб суммы (разности) двух чисел равен кубу первого числа плюс (минус) утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго плюс (минус) куб второго числа.

$$3.\ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Разность квадратов двух чисел равна произведению их суммы на их разность.

$$4.\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Сумма кубов двух чисел равна произведению их суммы на неполный квадрат их разности.

$$5.\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Разность кубов двух чисел равна произведению их разности на неполный квадрат их суммы.

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ

Равенство

$$\sqrt[n]{a} = b$$

читается так: корень n-ой степени, или корень степени n из числа a, равен b. Оно означает, что

$$b^n = a..$$

Число a называется подкоренным числом, n - показателем корня, символ $\sqrt{\ }$ - знаком корня, или знаком радикала. Если под знаком корня (радикала) находится не число, а некоторое алгебраическое выражение, оно называется подкоренным выражением. Если нужно выполнить действие (операцию) извлечения корня, говорят: извлечь из a корень n-ой степени, или извлечь из a корень степени n.

Выражение

$$\sqrt[2m-1]{a}$$

можно прочесть так: корень два эн минус первой степени из a или как корень степени два эн минус один из a.

Корень второй степени из a, то есть $\sqrt{a}$, обычно называют квадратным корнем, или корнем квадратным из a, иногда еще проще - корень из a .

Корень третьей степени из *a,* то есть $\sqrt[3]{a}$, обычно называется кубическим корнем*,* или корнем кубическим из *a.*

Корень четной степени всегда считается арифметическим*,* то есть неотрицательным (большим нуля или равным нулю). Корень четной степени из отрицательного числа не существует. Корень же нечетной степени из отрицательного числа существует. Например,

$$\sqrt[3]{-64} = -4,$$

так как (- 4)3 = - 64.

Основные свойства корней

1. Корень из произведения двух чисел равен произведению корней той же степени из сомножителей (если эти корни существуют),

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

2. Корень из частного двух чисел равен частному корней той же степени (если они существуют) из делимого и делителя,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

3. При извлечении корня из корня перемножаются показатели корней,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

4. При возведении корня в степень в эту степень можно возвести подкоренное выражение,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}\ .$$

5. Показатель корня и показатель степени подкоренного выражения можно разделить на одно и то же число,

$$\sqrt[mn]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^k}\ .$$

6*.* n-ая (энная) степень корня той же самой n-ой (энной) степени равна подкоренному выражению, в частности, квадрат (куб) квадратного (кубического) корня равен подкоренному выражению,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a\,, \qquad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a\,, \qquad \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a\,.$$

7. Корень четной степени из той же степени числа (выражения) *a* равен абсолютной величине *a,*

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \qquad \sqrt{a^2} = |a|.$$

8. Знак «-» (минус) можно вынести за знак корня нечетной степени,

$$\sqrt[2n-1]{-a} = -\sqrt[2n-1]{a}.$$

9. Если числа *a и b* связаны неравенством $0 \le a < b$, то

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

ПРОСТЕЙШИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейным уравнением относительно неизвестного (или неизвестной) x называется уравнение вида

$$ax = b, \qquad (1)$$

где a – коэффициент (при x), а b – свободный член, которые считаются известными.

Корнем уравнения (1) называется число, которое ему удовлетворяет.

Это означает, что если в (1) заменить неизвестное x корнем уравнения, то последнее обращается в верное равенство.

Например, число 3 является корнем линейного уравнения $2x = 6$, так как $2 \cdot 3 = 6$, и 3 удовлетворяет уравнению.

Линейное уравнение имеет единственный корень, если $a \neq 0$. Для его нахождения достаточно разделить обе его части на a. Именно,

$$x = \frac{b}{a}.$$

Например, корень уравнения

$$(-4)x = 12$$

мы получим, разделив обе его части на коэффициент при неизвестном, то есть на - 4,

$$x = 12 : (-4) = -3, \; x = -3.$$

Заметим, что при $a = 0, b \neq 0$ уравнение (1) не имеет корней, а при $a = 0$ и $b = 0$ - бесконечное количество корней, так как любое число является корнем уравнения

$$0 \cdot x = 0.$$

Уравнение относительно x вида

$$ax + b = cx + d$$

сводится к линейному, если перенести содержащее x слагаемое cx его правой части налево, а известное слагаемое b левой части – направо (оба – с противоположными знаками). Выполнив это, получим

$$ax - cx = d - b$$

или, после вынесения x за скобки в левой части,

$$x(a - c) = d - b.$$

Последнее уравнение является линейным с коэффициентом при неизвестном x, равным $a - c$, и свободным членом, равным $d - b$. Если теперь коэффициент $a - c$ отличен от нуля, то уравнение имеет единственный корень, равный частному от деления свободного члена $d - b$ на $a - c$, а именно:

$$x = \frac{d - b}{a - c}.$$

Решим, например, уравнение

$$5x + 9 = 2x - 3.$$

Для этого перенесём $2x$ налево, а 9 - направо. Получим

$$5x - 2x = -3 - 9,\ x(5 - 2) = -12,\ 3x = -12,\ x = (-12):3 = -4,\ x = -4.$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системой линейных уравнений относительно неизвестных x, y называется система вида

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases} \qquad (2)$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 - известные коэффициенты, а c_1, c_2 - свободные члены (также известные).

Решением системы уравнений (2) называется пара чисел, которая удовлетворяет каждому из её уравнений. Например, пара чисел $x = 1, y = 2$ является решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 4x - y = 2, \end{cases}$$

так как $2\cdot 1+3\cdot 2=8,\ 4\cdot 1-1\cdot 2=2$, и оба уравнения системы обратились в верные равенства при $x=1,\ y=2$.

В курсе средней школы изучаются два способа решения системы (2), а именно способы подстановки и алгебраического сложения. Мы проиллюстрируем оба эти способа на конкретных примерах.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=10, \\ 5x-2y=7. \end{cases}$$

1. Способ подстановки. Выразим y через x с помощью первого уравнения,

$$y=10-2x,$$

и подставим найденное значение y во второе,

$$5x-2(10-2x)=7.$$

Мы получили уравнение относительно только одного неизвестного x. Находя значение x из этого уравнения,

$$5x-20+4x=7,\ 9x=27,\ x=3,$$

мы после этого находим соответствующее значение y,

$$y=10-2\cdot 3=4,$$

а следовательно, и искомое решение системы уравнений, именно $x=3,\ y=4$.

Способ подстановки часто применяется и при решении более сложных систем уравнений, не обязательно линейных.

2. Способ алгебраического сложения состоит в последовательном (двушаговом) исключении из системы уравнений одного неизвестного и отыскании другого.

Первый шаг. Умножим обе части первого уравнения на 2, сделав коэффициенты при y в обоих уравнениях равными по величине и противоположными по знаку. Почленно складывая оба уравнения, мы исключаем из системы неизвестное y и находим искомое значение неизвестного x. Именно,

$$\begin{cases} 4x+2y=20, \\ 5x-2y=7, \end{cases} \quad 9x=27,\ x=3.$$

Второй шаг. Мы исключаем из системы уравнений неизвестное x, находя искомое значение y. Для этого мы умножаем обе части первого уравнения на 5, а второго на – 2, делая равными по величине и противоположными по знаку коэффициенты при x, и почленно складываем полученные уравнения,

$$\begin{cases} 10x+5y=50, \\ -10x+4y=-14, \end{cases} \quad 9y=36,\ y=4.$$

Таким образом, искомое решение системы уравнений $x=3,\ y=4$.

Решение системы можно представить схематически, а именно:

$$\begin{cases} 2x+y=10, \\ 5x-2y=7, \end{cases}\left|\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 \\ -2 \end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix} 5 \\ -2 \end{matrix}}\right| \quad \begin{cases} 9x=27, \\ 9y=36, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$$

Из приведенной схемы видно, на какие числа последовательно умножались обе части уравнений системы и какие уравнения относительно каждого из неизвестных получались при этом в результате почленного сложения.

Решим способом алгебраического сложения еще одну систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x+5y=3, \\ 7x-6y=20. \end{cases}$$

Используя схематическую запись, получаем:

$$\begin{cases} 4x+5y=3, \\ 7x-6y=20, \end{cases}\left|\begin{matrix} 6 \\ 5 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -7 \\ 4 \end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix} -7 \\ 4 \end{matrix}}\right| \quad \begin{cases} 59x=118, \\ -59y=59, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Квадратным уравнением относительно неизвестной x называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0, \tag{3}$$

где a - коэффициент при x^2, или старший коэффициент, b - коэффициент при x, c - свободный член.

Левая часть квадратного уравнения, то есть выражение

$$ax^2 + bx + c$$

называется квадратным трёхчленом.

Выражение

$$D = b^2 - 4ac \tag{4}$$

называется дискриминантом квадратного уравнения.

Корни квадратного уравнения (3) определяются следующей формулой (формулой корней квадратного уравнения)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{5}$$

Квадратное уравнение имеет два различных корня, если его дискриминант положителен ($D > 0$). Оно имеет один корень (иначе говоря, два равных корня или один кратный корень), если его дискриминант равен нулю ($D = 0$). Наконец, уравнение не имеет (вещественных) корней, если его дискриминант отрицателен ($D < 0$).

Пример. Решить квадратное уравнение $12x^2 + 7x - 10 = 0$.

Здесь $a = 12, b = 7, c = -10$. Дискриминант уравнения равен

$$D = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-10) = 49 + 480 = 529 = 23^2,$$

и по формуле (5) получаем

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 23}{2 \cdot 12} = \frac{-7 \pm 23}{24}; \quad x_1 = \frac{-7 - 23}{24} = -\frac{30}{24} = -\frac{5}{4}; \quad x_2 = \frac{-7 + 23}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{5}{4}; \quad x_2 = \frac{2}{3}$.

Пусть дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, а x_1, x_2 - его корни, определённые формулой (5). Тогда квадратный трёхчлен можно разложить на множители, а именно:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{6}$$

■ Покажем, что правая часть формулы (6) равна её левой части. Раскрывая скобки, сначала получаем

$$a\left(x^2-\left(x_1+x_2\right)x+x_1x_2\right).$$

На основании формулы (5)

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\left(\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=$$

$$=\left(\frac{-b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{D}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Заменяя x_1+x_2, x_1x_2 соответственно их найденными значениями $-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$, получаем

$$a\left(x^2-\left(x_1+x_2\right)x+x_1x_2\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=ax^2+bx+c \ ■$$

Пример. Разложить на множители квадратный трёхчлен $12x^2+7x-10$.

Корни трёхчлена, на основании предыдущего примера, равны

$$x_1=-5/4,\ x_2=2/3,$$

а поэтому по формуле (6) получаем

$$12x^2+7x-10=12\left(x-\left(-5/4\right)\right)\left(x-2/3\right)=12\left(x+5/4\right)\left(x-2/3\right)=\left(4x+5\right)\left(3x-2\right).$$

Используя множитель 12, мы умножили первую скобку на 4, а вторую – на 3.

Важным частным случаем квадратного уравнения является приведённое квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0, \tag{7}$$

а именно уравнение со старшим коэффициентом, равным единице. Формула корней приведённого квадратного уравнения (7) имеет вид

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\ .$$

Теорема Виета. Сумма корней приведённого квадратного уравнения (7) равна коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Это значит, что

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1\cdot x_2=q\ . \tag{8}$$

■Действительно,

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right) = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p,$$

а на основании формулы для разности квадратов

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right)\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right) = \left(-\frac{p}{2} \right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \right) = q \; ■$$

С помощью теоремы Виета нередко можно найти корни приведённого квадратного уравнения (7), не решая его (то есть попросту угадать корни).

Например, корни приведённых квадратных уравнений

$$x^2 + 6x + 8 = 0, \quad x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x^2 - 4x - 21 = 0$$

соответственно равны - 2 и - 4, 2 и 3, - 3 и 7 ($(-2)+(-4) = -6, (-2)\cdot(-4) = 8;$ $2 + 3 = 5 = -(-5), 2 \cdot 3 = 6; \quad (-3) + 7 = 4 = -(-4), (-3)\cdot 7 = -21$).

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение относительно неизвестной *x* называется иррациональным, если оно содержит *x* под знаком радикала (или под знаками нескольких радикалов).

Пусть нужно решить иррациональное уравнение

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = e \tag{9}$$

при обязательном условии

$$\begin{cases} ax + b \ge 0, \\ cx + d \ge 0. \end{cases} \tag{10}$$

Дадим примерный план решения уравнения.

1. Перенесём второй радикал слева направо,

$$\sqrt{ax+b} = e - \sqrt{cx+d}\,. \tag{11}$$

2. Возведём обе части уравнения (11) в квадрат. Получим

$$ax + b = e^2 - 2e\sqrt{cx+d} + cx + d\,. \tag{12}$$

3. Перенесём справа налево выражение, содержащее корень, а левую часть уравнения (12) перенесём направо,

$$2e\sqrt{cx+d} = e^2 + cx + d - ax - b. \qquad (13)$$

4. Приводя подобные члены в правой части уравнения (13), получаем уравнение вида

$$2e\sqrt{cx+d} = fx + g, \qquad (14)$$

где f, g - некоторые числа.

Если $e > 0$, мы должны дополнительно потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$fx + g \geq 0; \qquad (15\ а)$$

если же $e < 0$, нужно потребовать, чтобы выполнялось противоположное неравенство

$$fx + g \leq 0. \qquad (15\ б)$$

5. Если обе части уравнения (14) имеют общий множитель, мы можем разделить их на этот множитель, получая ещё более простое уравнение вида

$$h\sqrt{cx+d} = kx + l, \qquad (16)$$

где h, k, l - некоторые числа.

6. Обе части уравнения (16) возводим в квадрат, избавляясь тем самым от знака радикала,

$$h^2(cx+d) = k^2x^2 + 2klx + l^2. \qquad (17)$$

7. В левой части уравнения (17) раскроем скобки, а все члены правой части перенесём налево,

$$h^2cx + h^2d - k^2x^2 - 2klx - l^2 = 0.$$

Приводя подобные члены, получаем уравнение вида

$$Ax^2 + Bx + C = 0. \qquad (18)$$

которое является квадратным при $A \neq 0$ или линейным, если $A = 0$.

8. Решаем уравнение (18). Пусть, например, оно является квадратным, а его дискриминант – положительным. В таком случае уравнение имеет два раз-

личных корня x_1, x_2.

9. Теперь необходимо сделать проверку, то есть проверить, являются ли корни уравнения (16) корнями данного уравнения (9). Для этого нужно подставить их в уравнение (9). Корень уравнения (16), который обращает уравнение (9) в верное равенство, является корнем данного уравнения.

Если хотя бы один из корней уравнения (16) не удовлетворяет условиям (10), (15 а) (при $e > 0$) или (10), (15 б) (при $e < 0$), мы не подставляем его в данное уравнение (9), а просто отбрасываем.

10. В заключение нужно записать ответ.

Подчеркнем еще раз, что изложенный план является примерным. Он не может охватить всех возможных случаев даже для уравнения вида (9), не говоря уже о других видах иррациональных уравнений.

Пример. Решить иррациональное уравнение $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$.

Выясним сначала, каким условиям должны удовлетворять корни уравнения. Имеем

$$\begin{cases} 3x+7 \ge 0, \\ x+1 \ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge -7/2, \\ x \ge -1, \end{cases} \quad x \ge -1.$$

Согласно общему плану переносим второй радикал направо и возводим обе части полученного уравнения в квадрат,

$$\sqrt{3x+7} = 2 + \sqrt{x+1}, \left(\sqrt{3x+7}\right)^2 = \left(2+\sqrt{x+1}\right)^2, 3x+7 = 4 + 4\sqrt{x+1} + x + 1.$$

Оставляем радикал справа, а остальные члены правой части переносим налево и приводим подобные члены,

$$3x - x + 7 - 4 - 1 = 4\sqrt{x+1}, 2x+2 = 4\sqrt{x+1}, x+1 = 2\sqrt{x+1}.$$

Левая часть последнего уравнения должна удовлетворять условию

$$x+1 \ge 0, x \ge -1,$$

которое совпадает с условием, найденным выше. Далее возводим обе части последнего уравнения в квадрат, переносим все члены налево и приводим подобные члены,

$$(x+1)^2=\left(2\sqrt{x+1}\right)^2,\ x^2+2x+1=4(x+1),\ x^2+2x+1=4x+4,\ x^2+2x+1-4x-$$

$$x^2-2x-3=0.$$

Корни полученного квадратного уравнения находим на основании теоремы Виета. Именно,

$$x_1+x_2=-(-2)=2,\ x_1\cdot x_2=-3,\ x_1=-1,\ x_2=3$$

Оба корня удовлетворяют условию $x\ge 1$.

Проверка. а) Если $x=x_1=-1$, то

$\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=\sqrt{3\cdot(-1)+7}-\sqrt{(-1)+1}=\sqrt{4}-\sqrt{0}=2-0=2;\ 2=2$,

и число – 1 является корнем данного уравнения.

б) Если теперь $x=x_2=3$, то

$\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=\sqrt{3\cdot 3+7}-\sqrt{3+1}=\sqrt{16}-\sqrt{4}=4-2=2;\ 2=2$,

и число 3 также является корнем данного уравнения.

Ответ: $x_1=-1,\ x_2=3$.

Пример. Решить иррациональное уравнение $\sqrt{8+x}=\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}$.

Корни уравнения должны удовлетворять условию

$$\begin{cases}8+x\ge 0,\\ 5-x\ge 0,\\ 2-x\ge 0,\end{cases}\quad \begin{cases}x\ge -8,\\ 5\ge x,\\ 2\ge x,\end{cases}\quad \begin{cases}x\ge -8,\\ x\le 5,\\ x\le 2,\end{cases}\quad -8\le x\le 2.$$

Приступаем к решению уравнения. Возведём обе его части в квадрат, выражение с радикалами оставим справа, остальные члены правой части перенесём налево и приведём слева подобные члены,

$$\left(\sqrt{8+x}\right)^2=\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}\right)^2,\ 8+x=5-x+2\sqrt{5-x}\sqrt{2-x}+2-x,$$

$$8+x-5+x-2+x=2\sqrt{5-x}\sqrt{2-x},\ 3x+1=2\sqrt{5-x}\sqrt{2-x}.$$

Левая часть последнего уравнения должна быть неотрицательной, а поэтому $3x+1\ge 0,\ 3x\ge -1,\ x\ge -1/3$. На основании предыдущего условия $-8\le x\le 2$ получаем

$$-1/3\le x\le 2.$$

Теперь произведем еще одно возведение в квадрат,

$$(3x+1)^2=\left(2\sqrt{5-x}\sqrt{2-x}\right)^2,\ 9x^2+6x+1=4(5-x)(2-x),\ 9x^2+6x+1=$$
$$=4\left(x^2-7x+10\right),\ 9x^2+6x+1=4x^2-28x+40.$$

Переносим правую часть последнего уравнения налево и приведём подобные члены,

$$9x^2+6x+1-4x^2+28x-40=0,\ 5x^2+34x-39=0.$$

Дискриминант и корни полученного квадратного уравнения равны

$$D=34^2-4\cdot 5\cdot(-39)=1156+780=1936=44^2,$$

$$x_1=\frac{-34-44}{10}=-7.8,\ x_2=\frac{-34+44}{10}=1.$$

Корень $x_1=-7.8$ мы отбрасываем, так он не удовлетворяет полученному выше неравенству $-1/3\le x\le 2$. Следовательно, проверку нужно выполнить только для корня $x_2=1$.

Проверка. С одной стороны $\sqrt{8+x}=\sqrt{8+1}=\sqrt{9}=3;$ с другой стороны, $\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{5-1}+\sqrt{2-1}=\sqrt{4}+\sqrt{1}=2+1=3$. Итак, 3 = 3, и число 1 является корнем данного уравнения.

Ответ: $x=1$.

ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Говорят, что число a больше числа b ($a > b$), если разность $a - b$ положительная ($a - b > 0$); a меньше b ($a < b$), если разность $a - b$ отрицательная ($a - b < 0$); a не меньше (больше или равно) b ($a \geq b$), если разность $a - b$ неотрицательная ($a - b \geq 0$); a не больше (меньше или равно b ($a \leq b$), если разность $a - b$ неположительная ($a - b < 0$). Двойное неравенство $a < x < b$ (читается: x больше a и меньше b) означает, что *x заключено между* числами a и b. Неравенство $a \leq x \leq b$ читается так: x не меньше, чем число a, и не больше, чем число b. Неравенства $a > b$, $b < a$ называются строгими, а неравенства $a \geq b$, $b \leq a$ - нестрогими.

СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

1. Если $a > b$, то $b < a$.

2. Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$ (**транзитивность**).

3. Если $a > b$, то для любого числа c имеем $a + c > b + c$ (**регулярность**).

Как можно понять это свойство? К обеим частям неравенства можно прибавить одно и то же число. Знак (смысл) неравенства при этом не изменяется.

Следствие. Любой член неравенства можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный. Пусть, например, $a + b > c$. Прибавляя к обеим частям неравенства число $- b$, получаем $a > c - b$, что равносильно переносу числа b слева направо с противоположным знаком.

4. Если $a > b$, то для любого положительного числа m имеем $am > bm$, то есть обе части неравенства можно, не изменяя его знака (смысла), умножить на одно и то же положительное число.

5. Если $a > b$, то для любого отрицательного числа m имеем $am < bm$, то есть обе части неравенства можно умножить на одно и то же отрицательное число, изменив знак (смысл) неравенства на противоположный.

6. Если $a > b$, $c > d$, то $a + c > b + d$, то есть неравенства одинакового смысла можно почленно сложить, не изменяя знака неравенства.

7. Если $a > b$, $c < d$, то $a – c > b - d$, то есть неравенства противоположного смысла можно почленно вычесть, оставляя знак первого неравенства.

8. Если *a, b, c, d*- положительные числа и $a > b$, $c > d$, то $ac > bd$, то есть неравенства одного смысла с положительными членами можно почленно перемножить, не изменяя знак (смысл) неравенства.

9. Если *a* и *b* - положительные числа и $a > b$, то $1 / a < 1 / b$. Если два положительных числа связаны неравенством одного смысла, то обратные им числа связаны неравенством противоположного смысла.

10. Если *a, b, c, d* - положительные числа и $a > b$, $c < d$, то $a / c > b / d$. Неравенства противоположного смысла с положительными членами можно почленно разделить, оставляя знак первого неравенства.

11. Если *a* и *b* - положительные числа и $a > b$, то для любого натурального числа *n* имеем $a^n > b^n$, то есть обе части неравенства с положительными членами можно возвести в любую натуральную степень, не изменяя знак (смысл) неравенства.

Следствие. Если $0 \le a \le b$, то $a^n \le b^n$.

12. Если *a* и *b* - положительные числа и $a > b$, то для любого натурального *n* имеем $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, то есть из обеих частей неравенства с положительными членами можно извлечь корень одной и той же степени. Знак (смысл) неравенства при этом не изменяется.

Следствие. Если $0 \le a \le b$, то $\sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{b}$.

ПРОСТЕЙШИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

Линейным неравенством относительно неизвестного *x* называется неравенство вида

$$ax < b. \qquad (1)$$

Мы уже имели дело с линейными неравенствами при решении иррациональных уравнений. Сейчас мы ещё раз вернёмся к их рассмотрению, изложив соответствующий материал более систематически.

Неравенство (1) решается делением обеих его частей на коэффициент *a*.

Если коэффициент *a* положителен ($a > 0$), то получаем решение

$$x < \frac{b}{a}, \tag{2}$$

которое можно представить в интервальной форме

$$x \in \left(-\infty, \frac{b}{a}\right).$$

Заметим, что иногда вместо выражения «решение (2) неравенства (1)» более удобно говорить «множество решений (2) неравенства (1)», подразумевая при этом множество всех вещественных чисел, меньших b/a или, что то же самое, принадлежащих интервалу $(-\infty, b/a)$.

Если же коэффициент *a* отрицателен ($a < 0$), то деление обеих частей неравенства на *a* даёт решение (или, в другой терминологии, множество решений)

$$x > \frac{b}{a}; \tag{3}$$

в интервальной форме

$$x \in \left(\frac{b}{a}, \infty\right).$$

Аналогично (делением обеих частей на *a*) решаются линейные неравенства других видов

$$ax \le b, \quad ax > b, \quad ax \ge b.$$

Пример 1. Решить неравенство $5x + 3 \ge 9x - 13$.

Перенесём $9x$ налево, а 3 – направо (с противоположными знаками), откуда

$$5x - 9x \ge -13 - 3, -4x \ge -16.$$

Разделив обе части последнего неравенства на отрицательное число – 4 и, следовательно, изменив знак неравенства на противоположный, получаем решение

$$x \le 4,\ \text{или}\ x \in (-\infty,\ 4].$$

Пример 2. Система неравенств

$$\begin{cases} x > 2, \\ x > 5 \end{cases}$$

имеет решение $x > 5$ (x «больше большего»), или $x \in (5,\ \infty)$.

Отметим, что неравенство $x > 2$ определяет интервал $(2,\ \infty)$, а неравенство $x > 5$ - интервал $(5,\ \infty)$. Поэтому решение системы неравенств определяется общей частью (так называемым пересечением) интервалов $(2,\ \infty)$ и $(5,\ \infty)$, а именно интервалом $(5,\ \infty)$.

Пример 3. Система неравенств

$$\begin{cases} x < -3, \\ x < 4 \end{cases}$$

имеет решение $x < -3$ (x «меньше меньшего»), или $x \in (-\infty,\ -3)$.

Как и в предыдущем примере 2, решение системы неравенств определяется общей частью (пересечением) интервалов $(-\infty,\ -3)$ и $(-\infty,\ 5)$, а именно интервалом $(-\infty,\ -3)$.

Пример 4. Система неравенств

$$\begin{cases} x > 5, \\ x \le 8 \end{cases}$$

имеет решение $5 < x \le 8$, или в интервальной форме $x \in (5,\ 8]$.

Здесь решение системы неравенств даётся общей частью интервалов $(-\infty,\ 8]$ и $(5,\ \infty)$, которой является интервал $(5,\ 8]$.

Пример 5. Система неравенств

$$\begin{cases} x > 10, \\ x < 6 \end{cases}$$

не имеет решений, так как не существует чисел, которые были бы больше 10, но меньше 6.

Можно также сказать, что система неравенств не имеет решений, так как определяемые ею интервалы $(10,\infty)$, $(-\infty,6)$ не имеют общих точек.

Пример 6. Решить систему линейных неравенств

$$\begin{cases} 6x-2<4x+7, \\ 2x+1\le 5x-9. \end{cases}$$

Имеем последовательно

$$\begin{cases} 6x-4x<7+2, \\ 2x-5x\le -9-1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x<9, \\ -3x\le -10; \end{cases} \quad \begin{cases} x<\dfrac{9}{2}, \\ x\ge \dfrac{10}{3}; \end{cases} \quad \frac{10}{3}\le x<\frac{9}{2} \quad \text{или} \quad x\in\left[\frac{10}{3},\frac{9}{2}\right).$$

Ответ: $x\in\left[\dfrac{10}{3},\dfrac{9}{2}\right)$.

Пример 7. Решение неравенства

$$\frac{2x-1}{3-4x}\ge 0$$

сводится к решению двух систем линейных неравенств, а именно:

$$\begin{cases} 2x-1\ge 0, \\ 3-4x>0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x-1\le 0, \\ 3-4x<0. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $x\in[1/2,\,3/4)$, вторая не имеет решений (проверьте!).

Ответ: $x\in[1/2,\,3/4)$.

Пример 8. Решить неравенство $\sqrt{3x-1}<2$.

Решение неравенства сводится к решению системы линейных неравенств

$$\begin{cases} 3x-1\ge 0, \\ 3x-1>2^2. \end{cases}$$

Первое неравенство вытекает из того, что подкоренное выражение $3x-1$ не может быть отрицательным. Второе неравенство получается возведением в квадрат обеих частей исходного неравенства. Далее получаем

$$\begin{cases} 3x-1\ge 0, \\ 3x-1<4, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x\ge 1, \\ 3x<4, \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1/3, \\ x<4/3, \end{cases} \quad 1/3\le x<4/3, \quad x\in\left[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Ответ: $1/3\le x<4/3$ или $x\in[1/3, 4/3)$.

КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

$$ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c\ge 0,\ ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c\le 0$$

решаются на основании теории квадратного трёхчлена

$$y=ax^2+bx+c,$$

основные положения которой собраны в следующей таблице

Дискриминант трёхчлена	Корни трехчлена	Знак a	Знак трехчлена
$D=b^2-4ac>0$	Вещественные различные $x_1<x_2$	$a>0$	+, если $x<x_1$ или $x>x_2$
			-, если $x_1<x<x_2$
		$a<0$	+, если $x_1<x<x_2$
			-, если $x<x_1$ или $x>x_2$
$D=b^2-4ac=0$	Вещественные равные $x_1=x_2=x_0$	$a>0$	+, если $x\ne x_0$
		$a<0$	-, если $x\ne x_0$
$D=b^2-4ac<0$	Нет вещественных корней	$a>0$	+ для всех значений x
		$a<0$	- для всех значений x

Пример 9. Решить неравенство $4x^2-2x+7\le 0$.

Здесь $a=4>0,\ D=2^2-4\cdot 4\cdot 7<0$, трёхчлен слева положителен для всех значений x.

Ответ: неравенство не имеет решений.

Пример 10. Решить неравенство $4x^2-12x+9\le 0$.

Здесь $a=4>0,\ D=12^2-4\cdot 4\cdot 9=144-144=0$, трёхчлен имеет равные корни $x_1=x_2=x_0=3/2$, положителен для всех значений $x\ne 3/2$, обращается в нуль при $x = 3/2$.

Ответ: $x = 3/2$.

Пример 11. Решить неравенство $x^2 - 8x + 7 \geq 0$.

Здесь $a = 1 > 0, D = 8^2 - 4 \cdot 7 = 36 > 0$, трёхчлен имеет корни $x_1 = 1, x_2 = 7$, положителен при $x < 1$ или $x > 7$, отрицателен для $1 < x < 7$, аннулируется при $x_1 = 1, x_2 = 7$.

Ответ: $x \leq 1$ или $x \geq 7$. В интервальном виде $x \in (-\infty, 1] \cup [7, \infty)$.

Пример 12. Решить неравенство $x^2 + 5x - 14 < 0$.

Здесь $a = 1 > 0, D = 5^2 - 4 \cdot (-14) = 81 > 0$, трёхчлен имеет корни $x_1 = -7$, $x_2 = 2$, положителен при $x < -7$ или $x > 2$, отрицателен для $-7 < x < 2$.

Ответ: $-7 < x < 2$. В интервальном виде $x \in (-7, 2)$..

Пример 13. Решить неравенство $(x^2 - 8x + 7)(4x^2 - 12x + 9) \leq 0$.

Решение неравенства сводится к решению двух систем неравенств

$$1)\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \geq 0, \\ 4x^2 - 12x + 9 \leq 0; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0, \\ 4x^2 - 12x + 9 \geq 0. \end{cases}$$

Первый шаг. Решаем первую систему

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \geq 0, \\ 4x^2 - 12x + 9 \leq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство, на основании примера 11, выполняется при $x \leq 1$ или при $x \geq 7$. Второе неравенство, на основании примера 10, выполняется только при $x = 3/2$. Поскольку $1 < 3/2 < 7$, первая система не имеет решений.

Второй шаг. Решаем вторую систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0, \\ 4x^2 - 12x + 9 \geq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство этой системы, на основании примера 11, выполняется при $1 \leq x \leq 7$, второе неравенство, на основании примера 10, выполняется при всех значениях *x*. Поэтому решение системы даётся двойным неравенством $1 \leq x \leq 7$.

Ответ: $1 \leq x \leq 7$.

Пример 14. Решить неравенство

$$\frac{x^2-8x+7}{x^2+5x-14}\ge 0.$$

Для решения задачи нужно рассмотреть две системы неравенств

$$1)\begin{cases} x^2-8x+7\ge 0, \\ x^2+5x-14>0, \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x^2-8x+7\le 0, \\ x^2+5x-14<0. \end{cases}$$

Первый шаг: решаем первую систему неравенств. На основании примера 11 первое неравенство выполняется, если $x\in(-\infty, 1]\cup[7, \infty)$, а второе, на основании примера 12, если $x\in(-\infty, -7)\cup(1, \infty)$. Оба неравенства вместе выполняются в общей части этой совокупности интервалов, то есть если $x\in(-\infty, -7)\cup$ $\cup[7, \infty)$. Таким образом, решение первой системы неравенств задаётся условием $x\in(-\infty, -7)\cup[7, \infty)$.

Второй шаг: решаем вторую систему неравенств. На основании тех же примеров 11, 12 $x^2-8x+7\le 0$ при $x\in[1, 7]$, а $x^2+5x-14<0$ при $x\in(-7, 2)$. Оба неравенства вместе выполняются в общей части интервалов $[1, 7]$, $(-7, 2)$, то есть на интервале $[1, 2)$. Следовательно, решение второй системы неравенств даётся условием $x\in[1, 2)$.

Третий шаг: объединяем множества решений обеих систем неравенств.

Ответ: $x\in(-\infty, -7)\cup[1, 2)\cup[7, \infty)$.

АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА (МОДУЛЬ) ЧИСЛА

Абсолютной величиной, или модулем числа x называется или само это число, если оно неотрицательное, или противоположное ему число в противном случае. На основании определения

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0; \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Например,

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{если} \quad x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5; \\ 5-x, & \text{если} \quad x-5 < 0 \Rightarrow x < 5. \end{cases}$$

Свойства абсолютных величин

1. Абсолютная величина любого числа неотрицательна,

$$|x| \geq 0.$$

2. Абсолютные величины противоположных чисел равны,

$$|x| = |-x|.$$

3. Любое число не больше, чем его абсолютная величина, и не меньше, чем его абсолютная величина, взятая со знаком минус,

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

4. Абсолютная величина суммы или разности двух чисел не превышает суммы их абсолютных величин,

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

5. Абсолютная величина разности двух чисел не меньше, чем разность их абсолютных величин,

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

6. Для любого положительного числа ε неравенство

$$|x| < \varepsilon$$

равносильно (эквивалентно) двойному неравенству

$$-\varepsilon < x < \varepsilon.$$

Свойство 6 позволяет определить ε-окрестность точки x_0 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то есть интервал длины 2ε, симметричный относительно точки x_0 (см. рис. 3 с), с помощью неравенства, содержащего знак абсолютной величины:

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{ x \mid |x - x_0| < \varepsilon\} \equiv \{ x : |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

7. Для любого положительного числа ε неравенство

$$|x| > \varepsilon$$

равносильно (эквивалентно) совокупности двух неравенств

$$x < \varepsilon, \; x > \varepsilon.$$

8. Абсолютная величина произведения двух чисел равна произведению их абсолютных величин,

$$|xy| = |x||y|.$$

9. Абсолютная величина частного (отношения) двух чисел равна частному (отношению) их абсолютных величин,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

10. Для любого натурального числа n абсолютная величина n -ой степени числа x равна n -ой степени его абсолютной величины,

$$\forall n \in \boldsymbol{N} : \left|x^n\right| = |x|^n.$$

11. Для всякого натурального числа n корень $2n$-ой степени из $2n$-ой степени числа x равен абсолютной величине этого числа,

$$\forall n \in \boldsymbol{N} : \sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|.$$

В частности, квадратный корень из квадрата любого числа равен абсолютной величине этого числа,

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Например,

$$\sqrt{(x+3)^2} = |x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{если} \quad x+3 \geq 0, \quad \text{или } x \geq -3, \\ -x-3, & \text{если} \quad x+3 < 0, \quad \text{или } x < -3. \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение $|x+7| + |x-3| = 10$.

На основании определения абсолютной величины

$$|x+7| = \begin{cases} -x-7, \textit{ если } x < -7, \\ x+7, \textit{ если } x \ge -7; \end{cases} \quad |x-3| = \begin{cases} 3-x, \textit{ если } x < 3, \\ x-3, \textit{ если } x \ge 3. \end{cases}$$

Первый случай: $x < -7$. Уравнение принимает вид

$$-x-7+3-x=10,$$

откуда

$$-2x-4=10, -2x=14, x=-7,$$

и найденное значение x не удовлетворяет неравенству $x < -7$ и поэтому не подходит.

Второй случай: $-7 \le x < 3$. Уравнение принимает вид

$$x+7+3-x=10, 10=10$$

и поэтому удовлетворяется при всех значениях x из интервала $[-7, 3)$.

Третий случай: $x \ge 3$. Уравнение принимает вид

$$x+7+x-3=10, 2x+4=10, 2x=6,$$

откуда получаем $x=3$.

Таким образом, любое значение x из интервала $[-7, 3]$ является корнем данного уравнения.

Ответ: $x \in [-7, 3]$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x^2+14x+49}+\sqrt{x^2-6x+9}=10$.

Замечая, что

$$\sqrt{x^2+14x+49}=\sqrt{(x+7)^2}=|x+7|, \sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|,$$

мы переписываем данное уравнение в виде

$$|x+7|+|x-3|=10,$$

откуда на основании предыдущего примера сразу получаем ответ.

Ответ: $x \in [-7, 3]$.

ЛОГАРИФМЫ

Пусть

$$a^c = b. \qquad (1)$$

В равенстве (1) число *c* является показателем степени, в которую нужно возвести число *a,* чтобы получить число *b.* Это число называется логарифмом числа *b* по основанию *a* и обозначается

$$c = \log_a b. \qquad (2)$$

Определение. **Логарифмом числа** *b* **по основанию** *a* называется **показатель степени,** в которую нужно возвести число *a,* чтобы получить число *b.*

Например, $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; $\log_3 1/9 = -2$, так как $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9$.

Мы будем всегда считать основание *a* положительным и не равным единице. При этом условии логарифм существует только для положительных чисел, то есть в формулах (1) и (2) всегда подразумевается, что

$$0 < a \neq 1,\ b > 0. \qquad (3)$$

Логарифм числа *b* по основанию 10 называется десятичным и обозначается lg *b* ($\lg 10000 = \log_{10} 10000 = 4$, $\lg 1/1000 = \log_{10} 1/1000 = -3$).

Логарифм по основанию $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828459045...$ называется натуральным, или неперовым и обозначается ln *b* ($\ln b = \log_e b$).

Пример 1. Решить уравнение $log_5\left(5^x + x^2 - 7x + 6\right) = x$.

На основании определения логарифма

$$5^x + x^2 - 7x + 6 = 5^x,\ x^2 - 7x + 6 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 6.$$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

1. Логарифм единицы равен нулю,

$$\log_a 1 = 0,$$

так как $a^\circ = 1$.

2. Логарифм основания равен единице,

$$\log_a a = 1,$$

так как $a^1 = a$.

3. Из формул (1), (2) следует **основное логарифмическое тождество**

$$a^{\log_a b} = b.$$

Пример 2.

$$e^{ln\,b} = b, 10^{lg\,b} = b, 3^{5log_3 2} = \left(3^{log_3 2}\right)^5 = 2^5 = 32, 4 = 2^{log_2 4} = 7^{log_7 4} = e^{ln 4} = 10^{lg\,4}$$

4. Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел,

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Пример 3. Решить уравнение $lg\,x + lg(x-4) = lg\,5$.

Корни уравнения должны удовлетворять условию

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 4 > 0, \end{cases} \quad x > 4.$$

По свойству 4

$$\lg x(x-4) = \lg 5, \; x(x-4) = 5, \; x^2 - 4x - 5 = 0, \; x_1 = -1 < 0, \; x_2 = 5.$$

Проверка показывает, что число 5 является корнем данного уравнения.

Ответ: $x = 5$.

5. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов этих чисел,

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

Пример 4. Решить уравнение $lg(50x + 25) - lg\,x = 2$.

Заметим, что $2 = lg100$. По свойству 5

$$lg\frac{50x+25}{x} = lg100, \frac{50x+25}{x} = 100, 50x + 25 = 100x, 50x = 25, x = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}.$$

Пример 5. Доказать, что для любого чётного натурального числа $2n$ и любых положительных a, b ($0 < a \neq 1$) справедливо равенство

$$log_a^{2n}\frac{1}{b} = log_a^{2n} b.$$

$$\blacksquare\, log_a^{2n}\frac{1}{b}=\left(log_a\frac{1}{b}\right)^{2n}=\left(log_a 1-log_a b\right)^{2n}=\left(-log_a b\right)^{2n}=log_a^{2n} b\,\blacksquare$$

6. Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм основания степени,

$$\log_a b^c = c\log_a b.$$

Пример 6.

$$log_5 25^{10}=10\,log_5 25=10\cdot 2=20;\quad 3log_7\sqrt[3]{49}=log_7\left(\sqrt[3]{49}\right)^3=log_7 49=2.$$

Пример 7. Доказать, что для любых положительных a, b, c $(0<a\neq 1)$ справедливо следующее равенство:

$$b^{log_a c}=c^{log_a b}.$$

■Достаточно доказать, что логарифмы левой и правой частей доказываемого равенства по основанию a равны. Имеем

$$log_a b^{log_a c}=log_a c\cdot log_a b,\; log_a c^{log_a b}=log_a b\cdot log_a c=log_a c\cdot log_a b\,\blacksquare$$

7. В качестве следствия получаем формулу для логарифма корня,

$$\log_a\sqrt[n]{b}=\log_a b^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log_a b.$$

Пример 8.

$$log_3\sqrt[8]{81}=\frac{1}{8}log_3 81=\frac{1}{8}\cdot 4=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{9}log_4 16^9=log_4\sqrt[9]{16^9}=log_4 16=2$$

8. Переход от основания a к новому основанию c. Логарифм числа b по старому основанию a равен логарифму этого числа по новому основанию c, делённому на логарифм старого основания по новому,

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Пример 9. Перейдя к основанию 2, получим

$$log_{64} 32=\frac{log_2 32}{log_2 64}=\frac{5}{6}.$$

Пример 10. Доказать, что для любых чисел a, b, удовлетворяющих условиям $0<a\neq 1, 0<b\neq 1$, справедливо равенство

$$log_a b = \frac{1}{log_b a}.$$

■ Достаточно перейти к основанию b:

$$log_a b = \frac{log_b b}{log_b a} = \frac{1}{log_b a}\ ■$$

Пример 11. Доказать самостоятельно, что для любых положительных чисел a, b, $0 < a \neq 1$, и двух произвольных чисел n, m справедливо равенство

$$log_{a^n} b^n = log_a b, log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} log_a b.$$

9. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют один и тот же знак, то

$$\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \log_a\left|f(x)\right| + \log_a\left|g(x)\right|.$$

10. Если $2n$ - чётное натуральное число, то

$$\log_a f^{2n}(x) = 2n\cdot\log_a\left|f(x)\right|.$$

Пример 12. Решить уравнение $log_3(x+2)^6 + log_3|x+2| = 14$.

Имеем

$$6log_5|x+2| + log_5|x+2| = 14, 7\,log_5|x+2| = 14, log_5|x+2| = 2, |x+2| = 25, x+2 = \pm 25,$$

Ответ: $x_1 = -27, x_2 = 23$.

11. Если $2n$ -1 - нечётное натуральное число, то для любой положительной функции $f(x)$

$$\log_a f^{2n-1}(x) = (2n-1)\cdot\log_a f(x).$$

Нахождение логарифма алгебраического выражения называется его **логарифмированием.**

Пример 13. Прологарифмировать выражение

$$x = \frac{b^3c^5}{d^2\sqrt{e}}.$$

С помощью свойств логарифмов имеем

$$log_a x = log_a\left(b^3c^5\right) - log_a\left(d^2\sqrt{e}\right) = log_a\left(b^3\right) + log_a\left(c^5\right) - \left(log_a\left(d^2\right) + log_a\left(\sqrt{e}\right)\right) =$$

$$= 3log_a \mathrm{b} + 5log_a c - 2log_a d - \frac{1}{2}log_a e.$$

Нахождение алгебраического выражения по его логарифму называется **потенцированием.**

Пример 14. Найти выражение, если известен его логарифм

$$log_a x = 4 log_a b - 7 log_a c + \frac{1}{4} log_a d - 5 log_a e.$$

Применяя свойства логарифмов, получаем

$$log_a x = log_a b^4 + log_a \sqrt[4]{d} - \left(log_a c^7 + log_a e^5\right) = log_a\left(b^4 \sqrt[4]{d}\right) - log_a\left(c^7 e^5\right) =$$
$$= log_a \frac{b^4 \sqrt[4]{d}}{c^7 e^5} \Rightarrow x = \frac{b^4 \sqrt[4]{d}}{c^7 e^5}.$$

Пример 15. Решить логарифмическое уравнение $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)}$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 4,

$$\log_4 x^{\log_4 x - 2} = \log_4 2^{3(\log_4 x - 1)}.$$

Используя свойства логарифма степени, мы умножаем показатели степеней на логарифмы оснований степеней

$$(\log_4 x - 2)\log_4 x = 3(\log_4 x - 1)\log_4 2.$$

Принимая во внимание, что

$$\log_4 2 = \log_4 \sqrt{4} = \frac{1}{2}\log_4 4 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2},$$

умножаем обе части уравнения на 2 и получаем

$$2(\log_4 x - 2)\log_4 x = 3(\log_4 x - 1).$$

Вводим новую [вспомогательную] неизвестную, полагая

$$y = \log_4 x.$$

Получим уравнение

$$2y(y-2) = 3(y-1).$$

Переносим его правую часть налево, раскрываем скобки и приводим подобные члены. Мы получаем квадратное уравнение

$$2y^2 - 7y + 3 = 0.$$

Оно не является приведённым, поэтому мы решаем его с помощью общей формулы корней квадратного уравнения. Дискриминант уравнения равен $25 = 5^2$, его корни равны

$$y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = 3.$$

Возвращаемся к исходной переменной x. Мы имеем два случая:

а) $\log_4 x = \frac{1}{2}$, откуда $x_1 = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$; б) $\log_4 x = 3$, откуда $x_2 = 4^3 = 64$.

Теперь необходимо сделать проверку, то есть проверить, являются ли найденные значения x корнями данного уравнения.

а) Проверяем значение $x_1 = 2$. Подставляя 2 в левую часть уравнения, имеем

$$x^{\log_4 x - 2} = 2^{\log_4 2 - 2} = 2^{\frac{1}{2} - 2} = 2^{-\frac{3}{2}}.$$

Подставляя 2 в правую часть уравнения, имеем

$$2^{3(\log_4 x - 1)} = 2^{3(\log_4 2 - 1)} = 2^{3\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = 2^{3\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2^{-\frac{3}{2}}.$$

Итак, $2^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}}$. Это означает, что число $x_1 = 2$ удовлетворяет данному уравнению, а поэтому оно является его корнем.

б) Проверяем значение $x_2 = 64$. Подставляя 64 в левую часть уравнения, имеем

$$x^{\log_4 x - 2} = 64^{\log_4 64 - 2} == 64^{3-2} = 64.$$

Подставляя 64 в правую часть уравнения, имеем

$$2^{3(\log_4 x - 1)} = 2^{3(\log_4 64 - 1)} = 2^{3(3-1)} = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64.$$

Итак, $64 = 64$, число $x_2 = 64$ также удовлетворяет данному уравнению и, следовательно, является его корнем.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 64$.

ЭЛЕМЕНТЫ ПЛАНИМЕТРИИ

ТРЕУГОЛЬНИКИ

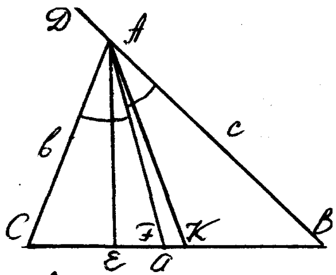

Рис. I

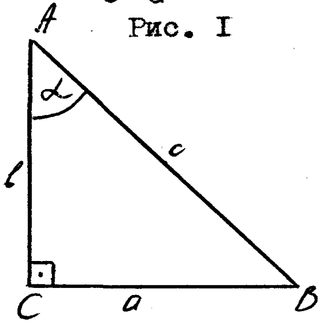

Рис. 2

На рис. 1 изображён треугольник ABC с вершинами A, B, C, сторонами $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, внутренними углами CAB, ABC, BCA. Угол CAD является одним из внешних углов треугольника. Сторона BC называется противолежащей углу CAB и прилежащей к углам ACB, ABC. Угол CAB называется противолежащим стороне BC и прилежащим к сторонам AC и AB. Сами стороны AB и AC называются смежными. Перпендикуляр АЕ, опущенный из вершины A на сторону BC, называется высотой, а сама сторона BC – основанием треугольника. Если точка K делит сторону BC пополам, то отрезок AK называется медианой треугольника, проведённой из вершины A. Отрезок AF, который делит пополам угол CAB, называется биссектрисой треугольника.

Три высоты, три медианы и три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Для каждой тройки отрезков эти точки, вообще говоря, разные. Но если треугольник правильный (или равносторонний, равноугольный), то все три точки совпадают, образуя центр правильного многоугольника.

Если в треугольнике все углы острые, он называется остроугольным.

Треугольник называется тупоугольным, если один из его углов тупой.

Треугольник с одним прямым углом называется прямоугольным. Таковым является треугольник ABC на рис. 2. Здесь угол ACB – прямой, углы BAC и ABC – острые, стороны $a = BC$, $b = AC$ называются катетами, сторона $c = AB$ – гипотенузой.

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов,

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (1)$$

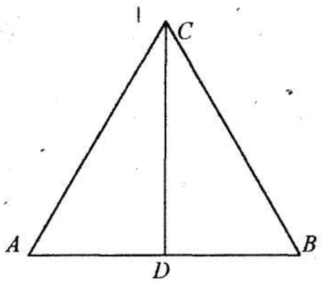

Рис. 3

Треугольник с двумя равными сторонами называется равнобедренным. Таков треугольник ABC, изображённый на рис. 3. Его стороны AC и BC называются боковыми рёбрами. Сторона AB называется основанием, вершины A и B – вершинами при основании, вершина C – вершиной равнобедренного треугольника, углы CAB и CBA – углами при основании, угол ACB – углом при вершине. Высота CD равнобедренного треугольника ABC является также его медианой и биссектрисой.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Так, для треугольника ABC, изображённого на рис.1, площадь равна

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE. \qquad (2)$$

В частности, площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. Так, площадь треугольника, показанного на рис. 2, равна

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC$$

Площадь правильного треугольника со стороной a равна

$$S_{прав.Δ} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}. \qquad (3)$$

Равенство треугольников

Два треугольника называются **равными**, если у них равны соответствующие стороны и соответствующие углы. При этом соответствующие углы должны лежать против соответствующих сторон.

Часто равными называют треугольники, которые совпадают (совмещаются) при наложении одного из них на другой.

Существует три признака равенства треугольников: 1) по двум сторонам и лежащему между ними углу (если две стороны и лежащий между ними угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и лежащему между ними углу другого треугольника, то такие треугольники равны); 2) по стороне и двум прилежащим к ней углам (если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим углам другого (треугольника), то такие треугольники равны); 3) по трём сторонам (если три стороны одного треугольника равны трём сторонам другого (треугольника), то такие треугольники равны).

Как следствие получаем признаки равенства прямоугольных треугольников: 1) по двум катетам (если два катета одного треугольника равны двум катетам другого, то такие треугольники равны); 2) по катету и гипотенузе (если катет и гипотенуза одного треугольника равны катету и гипотенузе другого, то такие треугольники равны); 3) по катету и острому углу (если катет и острый угол одного треугольника равны катету и острому углу другого, то такие треугольники равны); 4) по гипотенузе и острому углу (если гипотенуза и острый угол одного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны).

В общем случае две плоские фигуры называются **равными**, если они переводятся одна в другую с помощью движения. Движением называется такое преобразование одной плоской фигуры в другую, при котором сохраняется расстояние между точками. Движениями являются: 1) симметрия относительно точки (центральная симметрия), 2) симметрия относительно прямой или оси (осевая симметрия); 4) поворот около данной точки; 5) параллельный перенос.

Подобие треугольников

Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (см. рис. 4) называются подобными, если у них соответствующие углы равны, а соответствующие, или сходственные стороны пропорциональны:

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1.$$

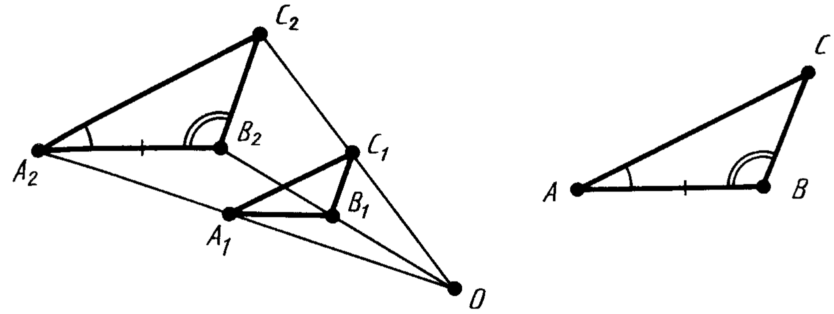

Рис. 4. Подобие и гомотетия треугольников

Два треугольника, как и любые два многоульника, называются гомотетичными, если один из них можно получить из другого с помощью преобразования подобия, или гомотетии, с некоторым центром (точка О на рис. 4) и некоторым коэффициентом (коэффициентом гомотетии) k. Такими являются треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ на рис. 4, а коэффициент гомотетии равен отношению любых двух соответствующих сторон треугольников. Например,

$$k = A_2C_2 : A_1C_1 > 1,$$

если треугольник $A_1B_1C_1$ преобразуется в треугольник $A_2B_2C_2$. Всякие два гомотетичных многоугольника, в частности треугольника, подобны.

Имеются три признака подобия треугольников – 1) по двум углам (если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны); 2) по двум пропорциональным сторонам и равным углам между ними (если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, лежащие между этими сторонами, равны, то эти треугольники подобны); 3) по трём пропорциональным сторонам (если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны).

Для прямоугольных треугольников подобие устанавливается: 1) по одному равному острому углу (если острый угол одного треугольника равен острому углу другого, то эти треугольники подобны); 2) по двум пропорциональным катетам (если два катета одного треугольника пропорциональны двум катетам другого, то эти треугольники подобны); 3) по пропорциональным катету и гипотенузе (если катет и гипотенуза одного треугольника пропорциональны катету и гипотенузе другого, то эти треугольники подобны).

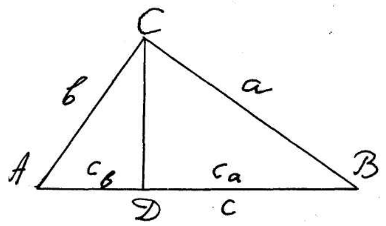

Рис. 5

Пример. Пусть в прямоугольном треугольнике *ABC* (рис. 5) из вершины прямого угла *C* опущен перпендикуляр *CD* на гипотенузу, которая точкой *D* делится на части *AD* и *DB* - проекции катетов *AC* и *BC* (соответственно) на гипотенузу. При этом образуются три пары подобных (по одному равному острому углу) треугольников *ACD* и *BCD*, *ACD* и *ABC*, *BCD* и *ABC*. Записывая отношения двух пар соответственных сторон этих треугольников, получаем соответственно

$$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD},\ \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB},\ \frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}.$$

Полученные пропорции позволяют назвать высоту и катеты средними пропорциональными. Отсюда вытекают равенства

$$CD^2 = AD\cdot BD,\ AC^2 = AD\cdot AB,\ BC^2 = BD\cdot AB.$$

Складывая почленно два последних из них, приходим к теореме Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,\ \text{или}\ c^2 = a^2 + b^2.$$

ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

Треугольник является простейшим примером выпуклого многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым**, если прямая, проходящая через любую его сторону, не пересекает его.

Отрезок прямой, проходящий через любые две точки выпуклого многоугольника, не пересекает его.

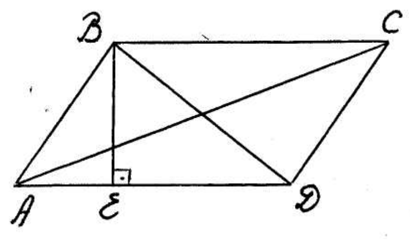

Рис. 6

Ниже мы рассмотрим несколько видов выпуклых многоугольников – параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат, правильный многоугольник.

Параллелограмм - это четырехугольник (*ABCD* на рис. 6), противоположные стороны которого *AD*, *BC* и *AB, CD* попарно параллельны. Диагонали *AC, BD* параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту

$$S_{парал} = AD \cdot BE.$$

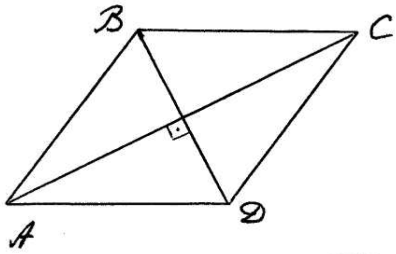

Рис. 7

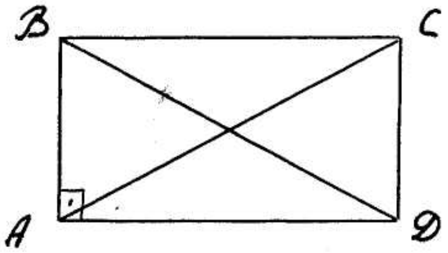

Рис. 8

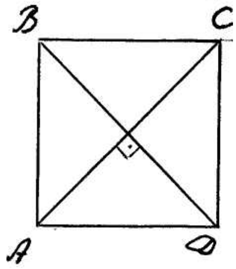

Рис. 9

Ромб - это параллелограмм с равными сторонами (*ABCD* на рис. 7). Диагонали ромба взаимно перпендикулярны ($AC \perp BD$). Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей

$$S_{ромб} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Прямоугольник - это параллелограмм, один из углов которого - прямой (*ABCD* на рис. 8). Диагонали прямоугольника равны между собой ($AC = BD$). Площадь прямоугольника равна произведению его сторон

$$S_{прямоуг} = AD \cdot AB.$$

Квадрат, или правильный четырехугольник - это прямоугольник с равными сторонами или ромб с прямыми углами (*ABCD* на рис. 9). Диагонали квадрата равны и взаимно перпендикулярны. Площадь квадрата равна квадрату его стороны

$$S_{квадр} = AB^2.$$

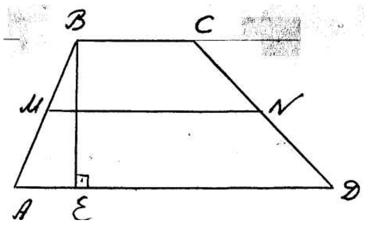

Рис. 10

Трапеция - это четырехугольник (*ABCD* на рис. 10), две стороны которого *AD* и *BC* (верхнее и нижнее основания) параллельны, а две другие *AB* и *CD* (боковые стороны) не параллельны. Средняя линия *MN* трапеции равна полусумме её оснований и параллельна им

$$MN = \frac{AD + BC}{2}.$$

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту

$$S_{трап} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BE.$$

Трапеция, боковые стороны которой равны, называется равнобочной.

Выпуклый многоугольник с равными сторонами и равными внутренними углами называется **правильным**.

Выше мы говорили о правильном треугольнике. Квадрат является правильным четырёхугольником.

Периметром многоугольника называется сумма (длин) его сторон. Часто используется полупериметр многоугольника. Так, площадь треугольника со сторонами a, b, c и полупериметром p на основании формулы Герона равна

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

КРУГЛЫЕ ФИГУРЫ

Окружностью называется плоская замкнутая кривая, все точки которой равноудалены от одной точки *O* (центра окружности) (рис. 11).

Окружность является границей круга.

Отрезок, соединяющий центр окружности с произвольной её точкой, называется радиусом окружности (*OA* на рис. 11). Отрезок, соединяющий любые две точки окружности, называется хордой (*BC*, *DE*, *FG* на рис. 11). Хорда, проходящая через центр окружности, называется её диаметром (*DE* на рис. 11). Диаметр является наибольшей из хорд окружности. Если диаметр перпендикулярен хорде, то он делит её пополам ($DE \perp FG$, $FH = HG$ на рис. 11).

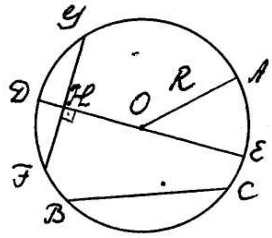

Рис. 11

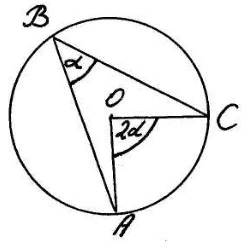

Рис. 12

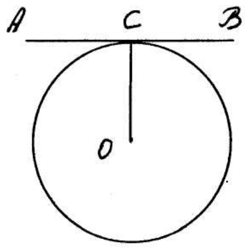

Рис. 13

Угол с вершиной в центре окружности, называется центральным ($\angle AOC$ на рис. 12). Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.

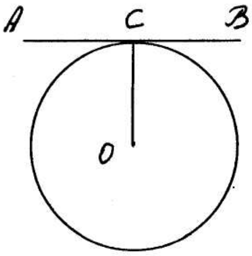

Рис. 14

Угол с вершиной на окружности и сторонами - хордами называется вписанным ($\angle ABC$ на рис. 12). Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Угол, опирающийся на диаметр окружности – прямой. Прямая называется касательной к окружности, если она имеет с окружностью только одну общую точку (рис. 14).

Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной.

Длина окружности и площадь круга радиуса R соответственно равны

$$l_{окружн} = 2\pi R, \quad S_{круг} = \pi R^2$$

Во всякий треугольник и правильный многоугольник можно вписать окружность (рис. 15, 17). Центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения его биссектрис, радиус вписанной окружности равен расстоянию от ее центра до стороны треугольника (рис. 15).

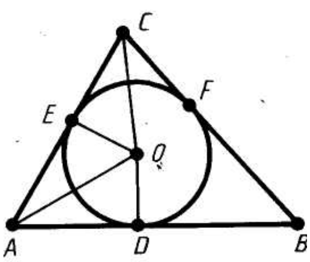

Рис. 15

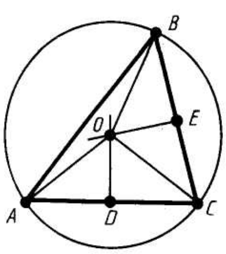

Рис. 16

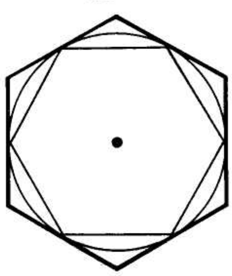
Рис. 17

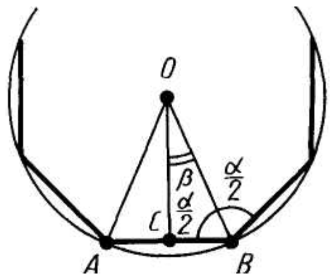

Рис. 18

Около всякого треугольника и правильного многоугольника можно описать окружность (рис. 16, 17). Центр окружности, описанной около треугольника, находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон (серединных перпендикуляров), радиус описанной окружности равен расстоянию ее центра от любой из вершин треугольника (рис. 16).

Центры окружностей, вписанной в правильный многоугольник и описанной около него, находятся в одной точке, которая называется центром правильного многоугольника (рис. 16). Радиус r окружности, вписанной в правильный многоугольник, называется апофемой многоугольника.

Площадь правильного многоугольника равна произведению его периметра P_n на половину апофемы r (или произведению его полупериметра на апофему)

$$S_{n-угольн} = P_n \cdot \frac{1}{2} r .$$

Сторона a_n правильного n-угольника выражается через радиус R описанной около него окружности (рис. 18) по формуле

$$a_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}.$$

В частности, стороны правильных треугольника, четырёхугольника (квадрата), шестиугольника соответственно равны

$$a_3 = R\sqrt{3}, \quad a_4 = R\sqrt{2}, \quad a_6 = R$$

Хорда окружности делит круг на две части, которые называются сегментами круга. На рис. 19 хорда AB образует два сегмента - AmB, AnB .

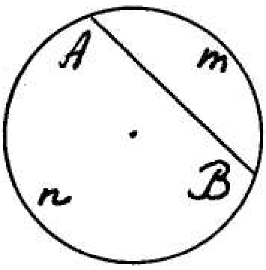

Рис. 19

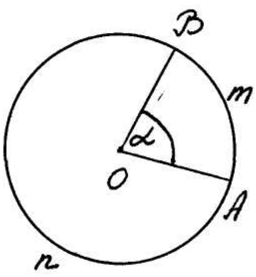

Рис. 20

Часть круга, образованная двумя радиусами, называется круговым сектором. На рис. 20 радиусы OA, OB образуют два круговых сектора $OAmB, OAnB$ с центральными углами $\alpha = AOB, 2\pi - \alpha$ соответственно.

Площадь кругового сектора с радиусом R и центральным углом α радиан (α° градусов) равна

$$S_{сект} = \frac{1}{2} R^2 \alpha, \quad S_{сект} = \frac{\pi R^2 \alpha^\circ}{360^\circ}.$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Рис. 1

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и острым углом $\alpha = \angle BAC$ (рис. 1). Катет AC называется прилежащим к углу α, а катет CB - противолежащим ему.

Синусом угла $\alpha = \angle BAC$ называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

Косинусом угла $\alpha = \angle BAC$ называется отношение прилежащего катета к гипотенузе

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Тангенсом угла $\alpha = \angle BAC$ называется отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$tg\alpha = \tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}.$$

Котангенсом угла $\alpha = \angle BAC$ называется отношение прилежащего катета к противолежащему:

$$ctg\alpha = \cot\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

Мы определили, таким образом, тригонометрические функции острого угла (в прямоугольном треугольнике). Из определения и теоремы Пифагора следуют соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, в том числе формулы, выражающие синус и косинус острого угла через тангенс того же угла,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1, \quad (1)$$

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}. \qquad (2)$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

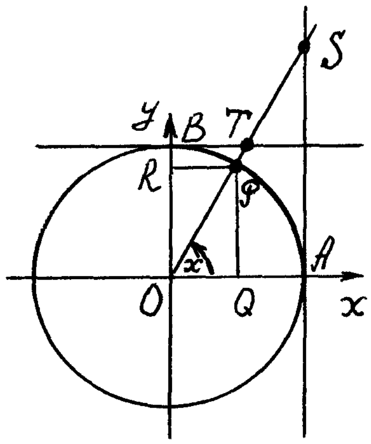

Рис. 2

Мы будем рассматривать так называемое стандартное положение угла (рис. 2), когда его вершина O находится в начале координат, начальная сторона OA совпадает с положительной полуосью абсцисс (обычно направленной слева направо по горизонтали), а конечная сторона OP является результатом поворота около начала координат. Величина поворота может быть какой угодно, включая, быть может, произвольное количество полных оборотов. Угол, отсчитываемый против часовой стрелки, считается положительным, а по часовой стрелке – отрицательным.

Введем в рассмотрение так называемый тригонометрический круг, ограниченный единичной (радиуса 1) окружностью с центром в начале координат (рис. 2). Проведем через точки A и B окружности касательные AS и BT к окружности. Прямая AS называется линией, или осью тангенсов, прямая BT – линией, или осью котангенсов. Радиус OA тригонометрического круга будем называть неподвижным (как сказано, он является начальной стороной всех рассматриваемых здесь углов), а радиус OP, концом которого является произвольная точка P окружности - подвижным радиусом (он является конечной стороной соответствующего утла). Продолжение подвижного радиуса пересекает линию тангенсов в точке S, а линию котангенсов - в точке T.

Пусть x – угол, который образует подвижный радиус OP с неподвижным радиусом OA. Абсцисса точки P называется **косинусом** угла x, ордината – **си-**

нусом угла x, ордината точки S на линии тангенсов - **тангенсом** угла x, а абсцисса точки T на линии котангенсов - **котангенсом** угла x.

Таким образом, **косинусом** угла x называется абсцисса конца P подвижного радиуса OP, образующего угол x с неподвижным радиусом OA.

Синусом этого же угла x называется ордината конца подвижного радиуса.

Тангенсом угла x называется ордината точки S пересечения продолжения подвижного радиуса с линией тангенсов.

Котангенсом угла x называется абсцисса точки T пересечения продолжения подвижного радиуса с линией котангенсов.

На рис. 2 изображен угол x, оканчивающийся в первом квадранте (в первой четверти). Для такого угла имеем:

$$\sin x = QP > 0, \cos x = OQ > 0, tgx = \tan x = AS > 0, ctgx = \cot x = BT > 0 .$$

Если угол оканчивается во втором, третьем или четвертом квадранте, то его тригонометрические функции (с указанием знаков) изображены на рис. 3, 4, 5.

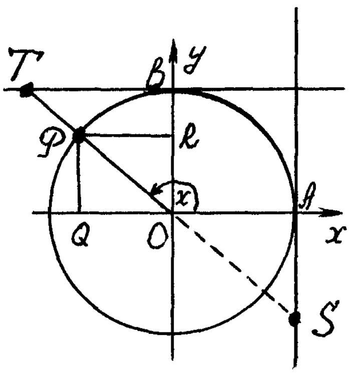

Рис. 3

$\sin x = QP > 0,$
$\cos x = -OQ < 0,$
$tgx = \tan x = -AS < 0,$
$ctgx = \cot x = -BT < 0$

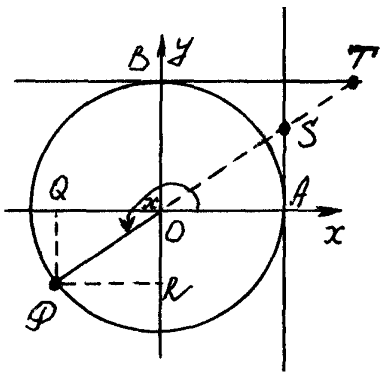

Рис. 4

$\sin x = -QP < 0,$
$\cos x = -OQ < 0,$
$tgx = \tan x = AS > 0,$
$ctgx = \cot x = BT > 0$

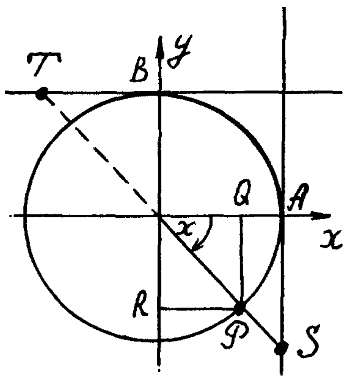

Рис. 5

$\sin x = -QP < 0,$
$\cos x = OQ > 0,$
$tgx = \tan x = -AS < 0,$
$ctgx = \cot x = -BT < 0$

С помощью тригонометрического круга можно установить все свойства тригонометрических функций. Так, синус и косинус являются периодическими функциями с наименьшим положительным периодом 2π, а тангенс и котангенс - периодическими с наименьшим положительным периодом π. Это означает, что

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,\quad \cos(x+2\pi)=\cos x,\quad tg(x+\pi)=tgx,\quad ctg(x+\pi)=ctgx$$

Косинус является четной функцией, остальные функции – нечетными:

$$\cos(-x)=\cos x,\quad \sin(-x)=-\sin x,\quad tg(-x)=-tgx,\quad ctg(-x)=-ctgx\,.$$

Тригонометрический круг позволяет получить формулы для решения так называемых простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x=a;\quad \cos x=a;\quad tgx=a;\quad ctgx=a\,.$$

Прежде всего для следующих частных случаев

$$\sin x=0,\, x=\pi n\,;\, \sin x=1,\, x=\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, \sin x=-1,\, x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n\ \ (n\in Z)$$

$$\cos x=0,\, x=\frac{\pi}{2}+\pi n\,;\, \cos x=1,\, x=2\pi n;\, \cos x=-1,\, x=\pi+2\pi n\ \ (n\in Z)$$

$$tgx=0,\, x=\pi n\,;\, ctgx=0,\, x=\frac{\pi}{2}+\pi n\ \ (n\in Z)$$

В общем случае имеем

1. $\sin x=a\ (a\neq 0,\, a\neq\pm 1)\quad x=\arcsin a+2\pi n$ или $x=\pi-\arcsin a+2\pi n\ (n\in Z)$
или объединяющая оба случая формула $x=(-1)^k\arcsin a+\pi k\quad (k\in Z)$,

где $\arcsin a$ (арксинус a) - угол из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

2. $\cos x=a\ (a\neq 0,\, a\neq\pm 1)\quad x=\pm\arccos a+2\pi n\ (n\in Z)$,

где $\arccos a$ (арккосинус a) - угол из отрезка $[0,\pi]$, косинус которого равен a.

3. $tgx=a\ (a\neq 0)\quad x=arctga+\pi n\ (n\in Z)$,

$arctga$ (арктангенс a) - угол из интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

4. $ctgx=a\ (a\neq 0)\quad x=arcctga+\pi n\ (n\in Z)$,

$arcctga$ (арккотангенс a) - угол из интервала $(0,\pi)$, котангенс которого равен a.

Можно также сказать, что арккосинус a (арккотангенс a) - это наименьший положительный угол, косинус (соответственно котангенс) которого равен a. Арксинус a (арктангенс a) - это наименьший по абсолютной величине угол, синус (соответственно тангенс) которого равен a.

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$1)\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1\ ;\ 2)\ 1 + tg^2 x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\ ;$$

$$3)\ 1 + ctg^2 x = 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x};\ 4)\ tgx = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x};\ 5)\ ctgx = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$6)\ \sin x = tgx \cdot \cos x\ ;\quad 7)\ \cos x = ctgx \cdot \sin x\ ;\quad 8)\ tgx \cdot ctgx = 1$$

2. Формулы сложения (значения тригонометрических функций суммы или разности аргументов)

$$1)\ \sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y\ ;\ 2)\ \cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y\ ;$$

$$3)\ tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx \cdot tgy}$$

3. Формулы двойного (удвоенного) аргумента

$$1)\ \sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x\ ;\quad 2)\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x\ ;$$

$$3)\ tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$$

4. Формулы половинного аргумента

$$1)\ \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\ ;\quad 2)\ \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\ ;$$

$$3)\ 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2};\ 4)\ 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}\ ;\ 5)\ \tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

5. Формулы понижения степени

$$1)\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad\qquad 2)\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

6. Формулы преобразования суммы или разности двух синусов или двух косинусов в произведение

$$1)\ \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2};\quad 2)\ \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2};$$

$$3)\ \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$4)\ \cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2} = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

7. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму

$$1)\ \sin x\cdot\cos y = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2};\ 2)\ \cos x\cdot\cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2};$$

$$3)\ \sin x\cdot\sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

8. Формулы приведения (тригонометрических функций от $\frac{\pi}{2}\pm x$, $\pi\pm x$, $\frac{3\pi}{2}\pm x$ к функциям от аргумента x)

а) функции от $\pi\pm x$ не изменяют названий; функции от $\frac{\pi}{2}\pm x$, $\frac{3\pi}{2}\pm x$ изменяются на кофункции;

б) знак «+» или «-» справа определяется знаком функции слева, если предположить, что угол x является острым.

9. Теорема синусов. Стороны a, b, c треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов α, β, γ, то есть

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R - радиус окружности, описанной около треугольника.

10. Теорема косинусов. Квадрат стороны c треугольника равен сумме квадратов двух других сторон a, b без удвоенного произведения этих сторон на косинус утла γ между ними, то есть

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin\gamma .$$

11. Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Градусы	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg [tan]	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg [*cotan*]	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ АРКСИНУСА И АРККОСИНУСА
(УГЛЫ – В РАДИАНАХ)

Аргумент	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	- 1
arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$
arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ АРКТАНГЕНСА И АРККОТАНГЕНСА
(УГЛЫ – В РАДИАНАХ)

Аргумент	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	- 1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$
arctg [*arctan*]	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
arcctg[*arccot*]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Две перпендикулярные оси *Ox* и *Oy*, пересекающиеся в точке *O* и снабженные одной и той же единицей длины (или шкалой) (рис. 1), образуют прямоугольную (или Декартову) систему координат на плоскости. Оси *Ox* и *Oy* называются координатными; *Ox* - осью абсцисс, *Oy* - осью ординат. Плоскость, содержащая оси *Ox* и *Oy*, называется координатной и обозначается *Ox*y .

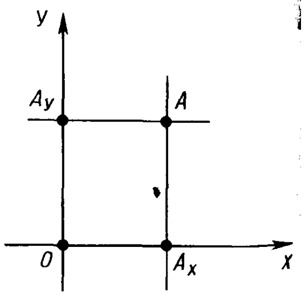

Рис. 1

Пусть *A* - произвольная точка плоскости. Проведем перпендикуляры AA_x и AA_y к осям *Ox* и *Oy*. Получим прямоугольные координаты $x = OA_x$ и $y = OA_y$ точки *A*, которые называются, соответственно, ее абсциссой и ординатой. Тот факт что *A* имеет числа *x* и *y* в качестве координат, обозначается *A* (*x*; *y*). Первая координата всегда является абсциссой, а вторая - ординатой. Начало координат имеет координаты (0; 0).

В выбранной системе координат каждой точке *A* плоскости соответствует единственная (упорядоченная) пара чисел (*x*; *y*) – её координаты; и обратно, каждой упорядоченной паре чисел (*x*; *y*) соответствует единственная точка *A* плоскости *Ox*y с абсциссой *x* и ординатой *y*.

Координатные оси делят плоскость на четыре части, которые называются квадрантами, или координатными углами, или просто четвертями.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

1. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ плоскости равно квадратному корню из суммы квадратов разностей соответствующих координат этих точек

$$d \equiv d(M_1, M_2) \equiv |M_1M_2| \equiv M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} . \qquad (1)$$

Пример 1. Расстояние между точками $A(3;-2)$, $B(8;3)$ на основании формулы (1) равно

$$d \equiv d(A, B) \equiv |AB| \equiv AB = \sqrt{(3-8)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7.07\,.$$

2. Площадь треугольника, образованного тремя точками

$$M_1(x_1;\, y_1),\, M_2(x_2;\, y_2),\, M_3(x_3;\, y_3),$$

не лежащими на одной прямой, дается формулой

$$S = S_{M_1M_2M_3} = |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

Формулу можно записать в очень удобной для запоминания форме, если выражение вида

$$a \cdot d - b \cdot c$$

кратко записывать в виде так называемого определителя второго порядка с элементами a, b, c, d, а именно:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c\,. \qquad (2)$$

Пример 2. Вычисление значений двух определителей второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-4) = -6 + 4 = -2; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = 3 - 10 = -7\,.$$

Используя определитель второго порядка, мы можем записать формулу для нахождения площади треугольника по известным координатам его вершин в следующем виде:

$$S = S_{M_1M_2M_3} = |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)| = \text{абс.вел.}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Пример 3. Найти площадь треугольника, если известны координаты его вершин $A(-4;3)$, $B(5;8)$, $C(2;-4)$.

По формулам (3) и (2) имеем

$$S = S_{ABC} = \text{абс.вел.}\begin{vmatrix} 5-(-4) & 2-(-4) \\ 8-3 & (-4)-3 \end{vmatrix} = \text{абс.вел.}\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = \text{абс.вел.}(-63-56) = 119\,.$$

Пример 4. Для точек $M(3;-4)$, $N(5;2)$, $P(6;5)$ с помощью тех же формул получаем

$$S = S_{MNP} = \text{абс.вел.}\begin{vmatrix} 5-3 & 6-3 \\ 2-(-4) & 5-(-4) \end{vmatrix} = \text{абс.вел.}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = \text{абс.вел.}(18-18) = 0.$$

Полученный результат означает, что точки *M*, *N*, *P* лежат на одной прямой и не могут образовывать треугольник.

3. Координаты середины $M_0(x_0; y_0)$ отрезка с известными координатами его концов равны полусуммам соответствующих координат концов отрезка,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (4)$$

Пример 5. Координаты середины отрезка с концами $M_1(-5;6)$, $M_2(9;-4)$ равны

$$\frac{(-5)+9}{2} = 2, \frac{6+(-4)}{2} = 1.$$

Пример 6. Известен один из концов $A(8;-3)$ и середина $C(-1;5)$ некоторого отрезка AB. Найти второй конец (то есть координаты второго конца) *B* отрезка.

Обозначим x_a, y_a, x_b, y_b, x_c, y_c координаты точек *A*, *B*, *C*. На основании формулы (4) мы можем написать

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2}, \, y_c = \frac{y_a + y_b}{2}.$$

Но по условию $x_a = 8, \, y_a = -3, \, x_c = -1, \, y_c = 5$, а поэтому

$$-1 = \frac{8 + x_b}{2}, \, 5 = \frac{-3 + y_b}{2}, \, 8 + x_b = -2, \, -3 + y_b = 10, \, x_b = -10, \, y_b = 13.$$

Ответ: Второй конец отрезка $B(-10;13)$.

4. Уравнение окружности радиуса *R* с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2. \qquad (5)$$

Здесь x, y - координаты произвольной точки $M(x;\, y)$ окружности. Часто такую точку называют текущей, а её координаты x, y – текущими координатами.

Уравнение любой линии должно содержать хотя бы одну текущую координату.

Если положить в уравнении (5) $x_0 = 0,\ y_0 = 0$, получим уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат $O(0;\, 0)$,

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (6)$$

Пример 7. Составить уравнение окружности, центр которой $A(-7;\, 0)$ лежит на оси *Ox* и которая касается оси *Oy*. Составить уравнения правой, левой, верхней и нижней полуокружностей.

Радиус окружности, очевидно, равен 7, и по формуле (5) получаем

$$(x-(-7))^2 + (y-0)^2 = 7^2,\ (x+7)^2 + y^2 = 49.$$

Возводя в квадрат и приводя подобные члены, запишем уравнение окружности в другом виде, а именно:

$$x^2 + 14x + 49 + y^2 = 49,\ x^2 + 14x + y^2 = 0.$$

Переходим к составлению уравнений полуокружностей. Найдём x из первого уравнения $(x+7)^2 + y^2 = 49$ окружности:

$$(x+7)^2 = 49 - y^2,\ x + 7 = \pm\sqrt{49 - y^2},\ x = -7 \pm \sqrt{49 - y^2}.$$

Уравнением левой полуокружности будет

$$x = -7 - \sqrt{49 - y^2},$$

так как абсциссы x всех её точек должны удовлетворять неравенству

$$x \le -7.$$

Для правой полуокружности получаем уравнение

$$x = -7 + \sqrt{49 - y^2},$$

так как для абсцисс x её точек должны иметь

$$x \ge -7 .$$

Для нахождения уравнений верхней и нижней полуокружностей выразим y через x из другого уравнения $x^2 + 14x + y^2 = 0$ окружности,

$$y^2 = -x^2 - 14x,\ y = \pm\sqrt{-x^2 - 14x} .$$

Для точек верхней полуокружности выполняется неравенство

$$y \ge 0 ,$$

и поэтому её уравнением будет

$$y = \sqrt{-x^2 - 14x} .$$

Уравнение нижней полуокружности

$$y = -\sqrt{-x^2 - 14x} ,$$

так как для её точек

$$y \le 0 .$$

5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть дана прямая l (рис. 2). Углом между l и осью Ox называется наименьший положительный угол α, на который следует повернуть ось Ox около точки её пересечения с прямой до их совмещения.

Очевидно,

$$0 \le \alpha < \pi .$$

Тангенс угла α между прямой l и осью Ox называется угловым коэффициентом прямой и обозначается буквой k :

$$k = tg\alpha = \tan\alpha . \qquad (7)$$

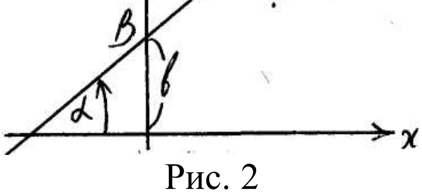

Рис. 2

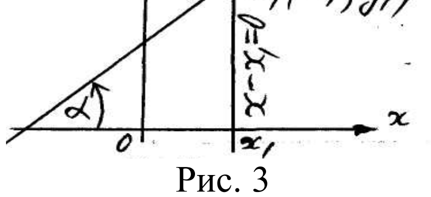

Рис. 3

Если $\alpha = 0$, то есть если прямая l параллельна оси Ox, то $k = 0$.

Если $\alpha = \pi/2$, то есть если прямая l

перпендикулярна к оси Ox, k не имеет смысла. Тогда говорят, что прямая l имеет бесконечный угловой коэффициент.

Если прямая l имеет угловой коэффициент k и пересекает ось Oy в точке $B(0;\, b)$, то её уравнение имеет вид

$$y = kx + b \qquad (8)$$

и называется уравнением прямой с угловым коэффициентом. Число b часто называется начальной ординатой прямой.

Если $k = 0$, прямая параллельна оси Ox, и ее уравнение получает вид

$$y = b. \qquad (9)$$

Пример 8. Прямая l пересекает ось в точке $B(0;\, -7)$ и образует угол $\pi/3$ с осью Ox. Составить уравнения прямой l и прямой, проходящей через точку параллельно оси Ox.

Угловой коэффициент прямой l по формуле (7) равен

$$k = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

а по формуле (8), в которой следует положить $b = -7$, её уравнением является

$$y = \sqrt{3}x - 7.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку параллельно оси Ox, мы получаем на основании формулы (9), именно:

$$y = -7.$$

Пример 9. Прямая задана уравнением (так называемым **общим уравнением**)

$$3x + 7y + 9 = 0.$$

Найти её угловой коэффициент и точку, в которой она пересекает ось Oy.

Достаточно переписать уравнение прямой в виде (8), то есть в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом. Имеем

$$7y = -3x - 9,\ y = -\frac{3}{7}x - \frac{9}{7}, \text{откуда } k = -\frac{3}{7},\ B\left(0;\, -\frac{9}{7}\right).$$

6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Пусть прямая l проходит через данную точку $M_1(x_1;\, y_1)$ и имеет заданный угловой коэффициент k (рис. 3). Тогда ее уравнение имеет следующий вид:

$$y = y_1 + k(x - x_1). \qquad (10)$$

Прямая, представленная уравнением (10), не может быть перпендикулярной оси Ox.

Если же прямая, проходящая через точку $M_1(x_1;\, y_1)$, перпендикулярна к оси Ox (рис. 3), то есть если её угловой коэффициент бесконечен, ее уравнение имеет следующий вид:

$$x = x_1. \qquad (11)$$

Пример 10. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(-2;\, 4)$ под углом $135°$ к оси Ox.

Угловой коэффициент прямой $k = tg135° = -1$, и по формуле (10)

$$y = 4 + (-1)(x - (-2)),\ y = 4 - (x + 2),\ y = 2 - x,\ x + y - 2 = 0.$$

Ответ: общее уравнение искомой прямой $x + y - 2 = 0$.

7. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть прямая l проходит через две данные точки $M_1(x_1;\, y_1), M_2(x_2;\, y_2)$. Тогда её уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (12)$$

Угловой коэффициент такой прямой можно найти по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (13)$$

Если, в частности, $y_1 = y_2$, то прямая параллельна оси Ox, и её уравнение принимает вид

$$y = y_1. \qquad (14)$$

Если же $x_1 = x_2$, то прямая, проходящая через точки M_1, M_2, перпендикулярна оси Ox, и, на основании формулы (11), её уравнением является следующее:

$$x = x_1.$$

Пример 11. Найти уравнения медиан, проведенных из вершин A, B треугольника с известными вершинами $A(2;-3)$, $B(4;5)$, $C(-8;1)$. Затем найти точку пересечения этих медиан.

Первый шаг. Медиана AD, проведенная из вершины A, проходит через середину D стороны BC, а медиана BF, проведенная из вершины B, проходит через середину F стороны AC. Найдём координаты точек D и F, применяя формулы (4). Для точки D имеем

$$x = \frac{4+(-8)}{2} = -2,\ y = \frac{5+1}{2} = 3,\ D(-2;3).$$

Для точки F получаем аналогично

$$x = \frac{2+(-8)}{2} = -3,\ y = \frac{(-3)+1}{2} = -1,\ F(-3;-1).$$

Второй шаг. Составляем уравнения медиан AD и BF, используя уравнение (12) прямой, проходящей через две точки (A и D, B и F). Для медианы AD

$$\frac{x-2}{-2-2} = \frac{y-(-3)}{3-(-3)},\ \frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{6},\ 6(x-2) = -4(y+3),\ 6x-12 = -4y-12,$$

$$3x + 2y = 0,$$

а для медианы BF аналогично

$$\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-5}{-1-5},\ \frac{x-4}{-7} = \frac{y-5}{-6},\ -6(x-4) = -7(y-5),\ -6x+24 = -7y+35,$$

$$6x - 7y + 11 = 0.$$

Третий шаг. Чтобы найти точку M пересечения медиан AD и BF, нужно из их уравнений составить систему уравнений и решить её. Имеем последовательно

$$\begin{cases} 3x+2y=0, \\ 6x-7y+11=0; \end{cases} \begin{cases} x=-2/3\,y, \\ 6(-2/3\,y)-7y+11=0; \end{cases} \begin{cases} x=-2/3\,y, \\ -4y-7y+11=0; \end{cases} \begin{cases} x=-2/3\,y, \\ -11y+11=0, \end{cases}$$

откуда получаем $y = 1$, а затем $x = -2/3$.

Ответ: уравнения медиан AD и BF $3x+2y=0$, $6x-7y+11=0$, а точка их пересечения $M(-2/3;1)$.

8. Угол между двумя прямыми.

Угол φ между двумя прямыми l_1 и l_2 с известными угловыми коэффициентами k_1 и k_2 определяется формулой

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Отсюда можно получить **условия параллельности и перпендикулярности** двух прямых.

Для того, чтобы две прямые были **параллельными**, необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были равными,

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2. \qquad (15)$$

Для того, чтобы две прямые были **перпендикулярными**, необходимо и достаточно, чтобы произведение их угловых коэффициентов было равно минус единице,

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1. \qquad (16)$$

Пример 12. Треугольник задан известными координатами его вершин $A(2;-3)$, $B(4;5)$, $C(-8;1)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины A.

Искомая высота перпендикулярна к стороне BC треугольника. Поэтому мы сначала найдём угловой коэффициент этой стороны, а затем, пользуясь условием (16) перпендикулярности двух прямых, найдем угловой коэффициент и уравнение высоты.

а) Угловой коэффициент k_1 стороны BC на основании формулы (13) равен

$$k_1 = \frac{5-1}{4-(-8)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

б) Угловой коэффициент k_2 находим из условия $k_1 k_2 = -1$, которое даёт

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{1/3} = -3.$$

в) Так как искомая высота проходит через данную точку $A(2;\,-3)$ и имеет известный угловой коэффициент, мы составляем её уравнение, используя формулу (10), то есть уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении,

$$y = -3 + (-3)(x-2),\ y = -3 - 3x + 6,\ y = -3x + 3,\ 3x + y - 3 = 0.$$

Ответ: искомое уравнение высоты $3x + y - 3 = 0$.

9. **Расстояние *d* от точки** $M_0(x_0;\,y_0)$ **до прямой**, заданной **общим** уравнением

$$ax + by + c = 0, \qquad (17)$$

определяется по следующей формуле:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (18)$$

Для нахождения расстояния от точки $M_0(x_0;\,y_0)$ до прямой по формуле (18) нужно выполнить такие действия: а) записать уравнение прямой в общем виде (17), когда в правой его части находится нуль, а все остальные члены перенесены налево; б) в полученном общем уравнении прямой заменить x, y координатами x_0, y_0 точки M_0; в) найти абсолютную величину результата; г) разделить последнюю на выражение $\sqrt{a^2 + b^2}$, то есть на квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов при x и y в общем уравнении прямой (17).

Пример 14. Найти площадь треугольника ABC, вершины A, B, C которого известны: $A(2;\,-3)$, $B(4;\,5)$, $C(-8;\,1)$.

Мы можем решить эту задачу по формуле (3) (см. пример 3). Здесь же мы применим другой метод, основанный на применении формулы

$$S = \frac{1}{2}ah,$$

где a – основание треугольника, а h – его высота.

В качестве основания a треугольника можно взять длину его стороны BC, а в качестве высоты h – расстояние от вершины A до BC.

Первый шаг. По формуле (1) находим основание

$$a = BC = \sqrt{\left(4-(-8)\right)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}\,.$$

Второй шаг. Составляем общее уравнение стороны BC треугольника. Пользуясь уравнением (12) прямой, проходящей через две точки (здесь B и C), получаем

$$\frac{x-4}{-8-4} = \frac{y-5}{1-5},\ \frac{x-4}{-12} = \frac{y-5}{-4},\ \frac{x-4}{12} = \frac{y-5}{4},\ \frac{x-4}{4} = \frac{y-5}{1},\ x-4 = 4(y-5),$$

$$x-4 = 4y-20,\ x-4y+16 = 0\,.$$

Третий шаг. Находим высоту треугольника, а именно расстояние от вершины A до стороны BC. По формуле (18)

$$h = \frac{\left|1\cdot 2 - 4\cdot(-3) + 16\right|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{30}{\sqrt{17}}\,.$$

Заключительный шаг. Находим площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{10}\cdot\frac{30}{\sqrt{17}} = \frac{60\sqrt{10}}{\sqrt{17}} \approx 46.02\,.$$

ЭЛЕМЕНТЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

МНОГОГРАННИКИ

ПРИЗМА И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Многогранник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от плоскости, образованной любой из граней многогранника. Выпуклыми многогранниками являются призма, параллелепипед, пирамида (полная и усечённая), правильные многогранники (правильный тетраэдр, куб, додекаэдр, октаэдр, икосаэдр).

Наклонной призмой называется многогранник, две грани которого (основания) – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани (боковые грани) – параллелограммы (рис. 1). Стороны граней называются рёбрами (различают боковые рёбра и рёбра оснований), а вершины - вершинами призмы. Высотой H призмы называется расстояние между плоскостями её оснований. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется диагональю призмы.

Призма называется n-угольной, если её основания - n-угольники (в дальнейшем - всегда выпуклые). Призма на рис. 1 – шестиугольная.

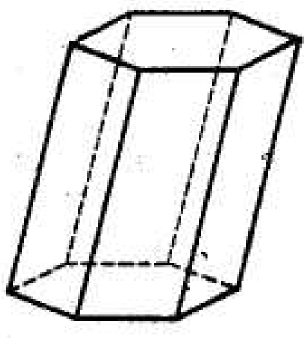

Рис. 1

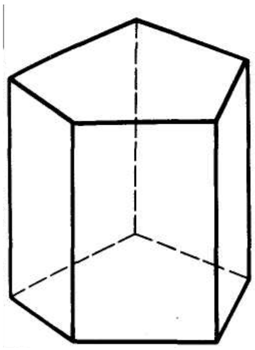

Рис. 2

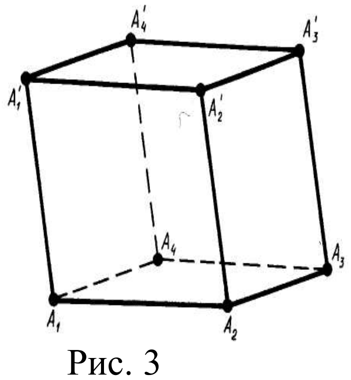

Рис. 3

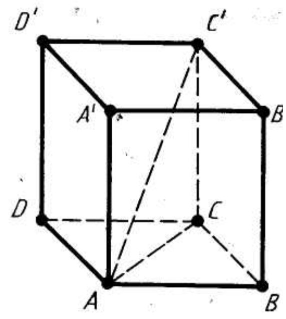

Рис. 4

Призма называется **прямой**, если её боковые грани – прямоугольники (см. рис. 2).

Прямая призма называется **правильной**, если её основаниями являются правильные многоугольники.

Боковой поверхностью (площадью боковой поверхности) призмы называется сумма площадей её боковых граней. **Полная поверхность** призмы равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

Объём призмы равен произведению площади ее основания на высоту,

$$V_{призм} = S_{осн} \cdot H . \qquad (1)$$

Призма, основания которой - параллелограммы, называется **параллелепипедом**. Как и всякая призма, параллелепипед может быть наклонным (рис. 3) и прямым. Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противолежащими. Все они параллельны и равны. Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

Объём параллелепипеда, как и призмы, равен произведению его основания на высоту.

Прямой параллелепипед, основаниями которого являются прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 4). Все его грани - прямоугольники. Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда (AB, AD, AA' на рис. 4) называются его линейными размерами (**измерениями**).

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

Для параллелепипеда, изображённого на рис. 4,

$$AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2 ,$$

$$V = AB \cdot AD \cdot AA' .$$

Прямоугольный параллелепипед, все рёбра которого равны между собой, называется **кубом**.

ПИРАМИДА

Пирамидой (рис. 5 - 7) называется многогранник, одна из граней которого (основание) - многоугольник (далее - всегда выпуклый), а остальные грани - треугольники с одной общей вершиной, которая называется вершиной пирамиды. Все грани, отличные от основания, называются боковыми. Как и призма, пирамида имеет боковые рёбра и рёбра основания. Пирамида с n-угольным основанием называется n-угольной (пирамида на рис. 5 – четырёхугольная, на рис. 6 – шестиугольная, на рис. 7 - треугольная). Треугольная пирамида называется также **тетраэдром**.

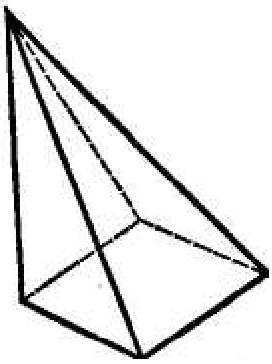

Рис. 5

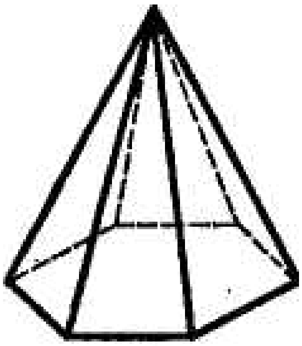

Рис. 6

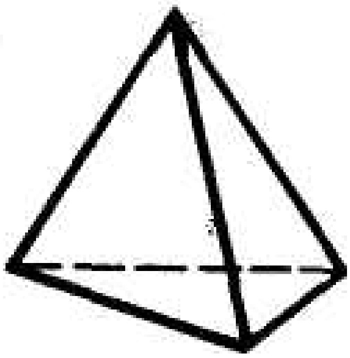

Рис. 7

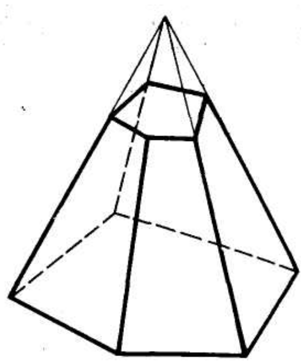

Рис. 8

Боковая и полная поверхности пирамиды определяются как и у призмы.

Высотой H пирамиды называется расстояние от её вершины до плоскости её основания.

Объём пирамиды равен одной трети произведения площади её основания на высоту,

$$V_{пирам} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H \qquad (2)$$

Плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная её основанию, отсекает от неё подобную пирамиду. Другая часть представляет собой многогранник, который называется **усечённой пирамидой** (рис. 8). Грани усечённой пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях, называются основаниями. Остальные грани называются боковыми гранями (все они являются трапециями).

Боковая и полная поверхности усечённой пирамиды определяются так же, как и для призмы.

Объём усечённой пирамиды с площадями оснований S_1, S_2 $(S_1 > S_2)$ и высотой H равен

$$V_{усеч.пирам} = \frac{1}{3} H\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right). \qquad (3)$$

Пирамида называется **правильной**, если ее основанием является правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр основания. Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой** такой пирамиды.

Усечённая пирамида, которая получается из правильной пирамиды, также называется правильной. Боковые грани такой пирамиды - равные равнобочные трапеции; их высоты называются апофемами.

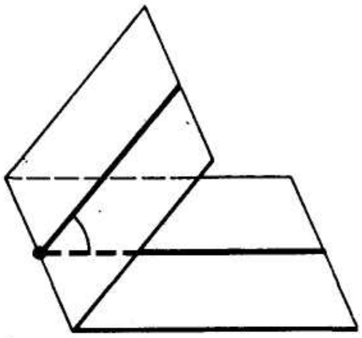

Рис. 9

Две плоскости, пересекаясь, образуют **двугранный угол**. Линия пересечения этих плоскостей называется ребром двугранного угла. Двугранный угол измеряется линейным углом. **Линейный угол** можно получить, взяв на ребре двугранного угла произвольную точку и проведя через неё перпендикуляры к ребру, лежащие в плоскостях, образующих двугранный угол (рис. 9). Можно также провести через произвольную точку ребра плоскость, перпендикулярную ребру. Линейным углом будет угол между прямыми, по которым пересекается проведённая плоскость с плоскостями, образующими двугранный угол.

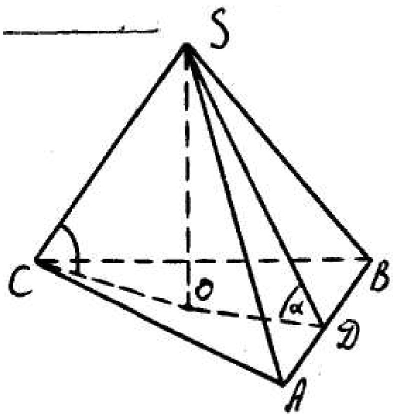

Рис. 10

Найдем линейный угол двугранного угла при основании пирамиды $SABC$, например, угла, образованного гранью SAB с плоскостью основания (рис. 10). Для этого проведём высоту SD боковой грани ASB и соединим точку D с проекцией O вершины S пирамиды на плоскость основания. Так как наклонная SD к плоскости основания перпендикулярна стороне AB, то и проекция OD этой наклонной перпендикулярна AB (на основании теоремы о трёх перпендикулярах). Угол $\alpha = \angle ODS$ является искомым линейным углом.

В случае **правильной пирамиды** линейный угол двугранного угла при основании образуют апофема и её проекция на плоскость основания.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и её проекцией на плоскость.

Например, ребро *CS* пирамиды *SABC*, изображенной на рис. 10, образует с плоскостью основания угол *OCS*, так как *OC* - проекция наклонной *CS* на плоскость основания.

Очевидно, что углом ребра *CS* с плоскостью основания не может быть ни один из углов *ACS* и *BCS*.

КРУГЛЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ТЕЛА
ЦИЛИНДР

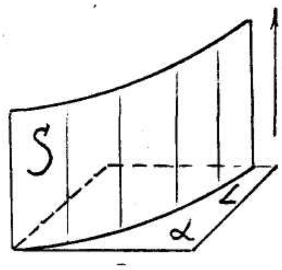

Рис. 11

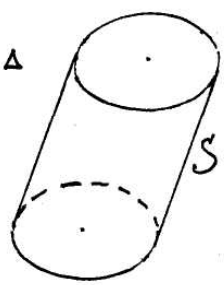

Рис. 12

Пусть дана линия L в плоскости α и фиксированное направление $\varDelta$ в пространстве (см. рис. 11). **Цилиндрической поверхностью** называется поверхность, порождённая движущейся прямой, параллельной направлению $\varDelta$ и пересекающейся с линией *L* (рис. 12). Названная прямая называется **образующей**, а линия L - **направляющей** цилиндрической поверхности.

Если направляющей является окружность, поверхность можно назвать **круговой цилиндрической** поверхностью.

Круговым цилиндром называется тело, полученное пересечением круговой цилиндрической поверхности двумя параллельными плоскостями. Круги, которые образуются при этом, называются **основаниями** кругового цилиндра.

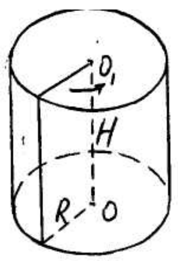

Рис. 13

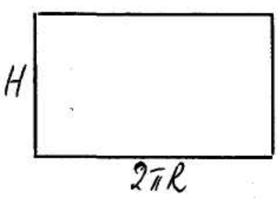

Рис. 14

Если образующие кругового цилиндра перпендикулярны плоскости основания, имеем так называемый **прямой круговой цилиндр**, который мы часто будем называть просто цилиндром. Прямой круговой цилиндр можно представить себе как тело, которое порождает прямоугольник при вращении его около стороны как оси.

Радиус основания *R* цилиндра (то есть прямого кругового цилиндра) часто называют радиусом цилиндра. Высотой *H* цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований. Осью цилиндра является прямая, проходящая через центры его оснований. Поверхность (полная поверхность) цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Разверткой цилиндра называется прямоугольник с основанием $C = 2\pi R$ (длина окружности основания цилиндра) и высотой *H*.

Площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объём цилиндра с радиусом основания *R* и высотой *H* вычисляются, соответственно, по формулам

$$S_{бок.цил} = 2\pi RH, \quad S_{полн.цил} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R), \quad V_{цил} = \pi R^2 H. \qquad (4)$$

КОНУС

Пусть дана линия *L* в плоскости α и фиксированная точка *A* вне этой плоскости (рис. 15). **Конической поверхностью** называется поверхность, порожденная движущейся прямой, проходящей через точку *A* и пересекающейся с линией *L*. Названная прямая называется **образующей**, линия *L* – **направляющей** конической поверхности.

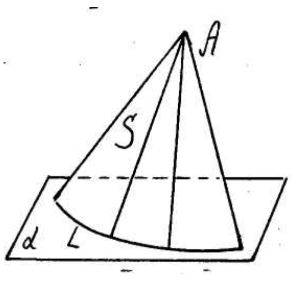

Рис. 15

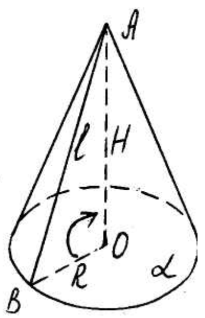

Рис. 16

Если направляющей конической поверхности является окружность, её называют круговой. Точка *A* называется при этом **вершиной** круговой конической поверхности.

Если пересечь круговую коническую поверхность плоскостью, не проходящей через вершину *A*, получим тело, которое называется круговым конусом. Конечная часть плоскости, отсекаемая конической поверхностью, называется **основанием** кругового конуса.

Круговой конус называется прямым (**прямым круговым конусом**), если его основанием является круг (рис. 16).

Прямая, соединяющая вершину прямого кругового конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания и является осью (осью симметрии) конуса. Высотой H конуса называется расстояние от его вершины до центра основания (на рис. 16 $H = AO$). Расстояние l от вершины конуса до любой точки окружности его основания называется образующей конуса (на рис. 16 $l = AB$).

Мы будем обычно называть прямой круговой конус просто **конусом**.

Площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объём конуса (прямого кругового конуса) с радиусом основания R, высотой H и образующей l вычисляются по формулам

$$S_{бок.кон} = \pi Rl, \quad S_{полн.кон} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(R + l), \quad V_{кон} = \frac{1}{3}\pi R^2 H . \qquad (5)$$

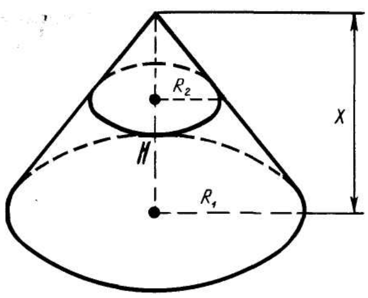

Рис. 17

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется **усечённым конусом** (рис. 17).

Площадь боковой поверхности и объем усечённого конуса с радиусами оснований R_1, R_2, высотой H и образующей l вычисляются по формулам

$$S_{бок.ус.кон} = \pi \frac{R_1 + R_2}{2} l, \quad V_{усеч.кон} = \frac{1}{3}\pi\left(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2\right)H . \qquad (6)$$

Прямой круговой конус можно представить себе как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси. Аналогично можно считать усеченный конус результатом вращения одной из половин равнобочной трапеции относительно оси симметрии трапеции.

СФЕРА, ШАР И ИХ ЧАСТИ

Шаровой поверхностью, или **сферой** называется множество всех точек пространства, удаленных от фиксированной точки O на одно и то же расстояние R.

Сфера ограничивает часть пространства, которая называется **шаром**. Все точки шара удалены от точки O на расстояние, не большее R. Точка O называется центром сферы и шара, а число R – их радиусом. Радиусом является любой отрезок, соединяющий центр O с точкой сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется диаметром. Концы диаметра называются диаметрально противоположными.

Шар можно получить вращением полукруга вокруг его диаметра как оси.

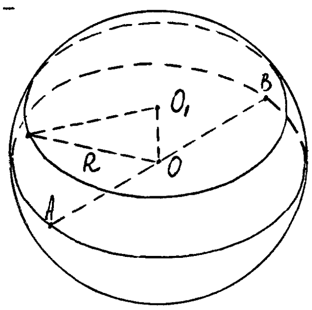

Рис. 18

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость. Плоскость, проходящая через центр шара, называется диаметральной плоскостью. Сечение шара диаметральной плоскостью называ ется большим кругом, а сечение сферы - большой окружностью. Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

Площадь поверхности сферы и объем шара радиуса R даются формулами

$$S_{сф} = 4\pi R^2, \quad V_{шар} = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (7)$$

Часть шара, заключенная между двумя его параллельными сечениями, называется **шаровым слоем**, а соответствующая часть шаровой поверхности - **шаровым (**или **сферическим) поясом** (рис. 18).

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостъю (рис. 19).

Площадь поверхности и объём шарового сегмента равны

$$S_{шар.\,сегм} = 2\pi RH, \quad V_{шар.\,сегм} = \frac{1}{3}\pi H^2 (3R - H). \tag{8}$$

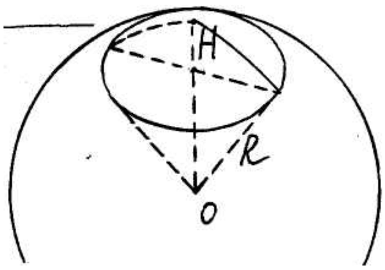

Рис. 19

где R - радиус шара, а H - высота шарового сегмента (см. рис. 19).

Любой (прямой круговой) конус с вершиной в центре шара делит шар на две части, которые называются **шаровыми секторами**.

Объем шарового сектора определяется формулой

$$V_{шар.\,сект} = \frac{2}{3}\pi R^2 H, \tag{9}$$

где R - радиус шара, а H - высота шарового сегмента, определяющего шаровой сектор.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ФУНКЦИЯ

Числовой функцией f с областью определения [областью существования] $D\,(f)$ и множеством значений [областью значений] $E\,(f)$ называется правило, по которому каждому числу x из области определения $D\,(f)$ ставится в соответствие вполне определённое число y из множества значений $E\,(f)$.

Число y называется значением функции в точке x и обозначается

$$y = f(x).$$

Часто говорят, что функция f принимает значение $y = f(x)$ в точке x.

В связи с понятием функции часто рассматривают две переменные величины x и y. Переменная величина x называется независимой переменной, или аргументом, переменная величина y называется зависимой переменной, или функцией. Функция f каждому значению переменной x (аргумента) ставит в соответствие определённое значение переменной y.

Существуют три основных способа задания функции:

1) аналитический - с помощью формулы вида $y = f(x)$;

2) графический - с помощью графика;

3) табличный - с помощью таблицы (например, таблицы тригонометрических функций, десятичных и натуральных логарифмов).

Имеются и другие способы задания функций, в частности, с помощью описания (например, функции синус и косинус определяются описанием), с помощью создания соответствующей программы для электронной вычислительной машины.

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Основными элементарными называются следующие функции: 1) постоянная функция y = С = *const;* 2) степенная функция $y = x^{\alpha}$ (α - произвольное вещественное число); 3) показательная функция $y = a^{x}$ $(0 < a \neq 1)$; 4) логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$; 5) тригонометрические функции - синус, косинус, тангенс, котангенс (*sin x, cos x, tg x* (*tan x*), *ctg x* (*cot x*)); б) обратные тригонометрические функции - арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс (*arcsin x, arccos x, arctg x* (*arctan x*), *arcctg x* (*arccot x*)).

Свойства и график степенной функции $y = x^{\alpha}$ зависят от значения показателя степени (вещественного числа) α. На рис. 1 а - г представлены графики степенной функции при α = 3, α = 4, α = -2, α = - 3.

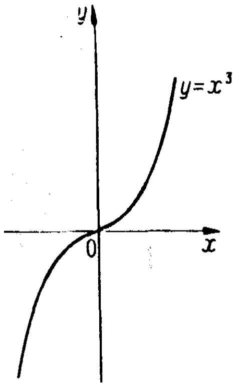

Рис. 1 а

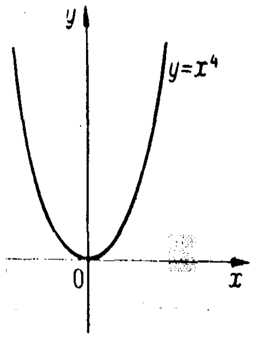

Рис. 1 б

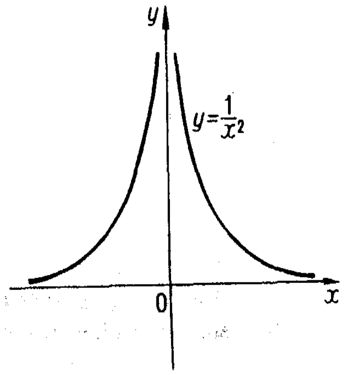

Рис. 1 в

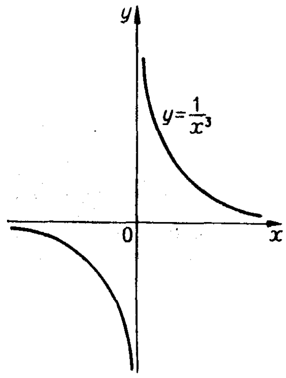

Рис. 1 г

Рассмотрим случай α = 3, то есть функцию $y = x^3$. Её областью определения *D* (*y*) и множеством значений *E* (*y*) является множество всех вещественных чисел ***R***. Функция принимает значение *0* при $x = 0$, возрастает на всей области определения, принимает отрицательные значения при $x < 0$ и положительные значения при $x > 0$, не имеет точек (локального) максимума и минимума. Её график (его называют кубической параболой) проходит через начало координат, является кривой, восходящей слева направо, слева от оси *Oy* лежит в четвёртом квадранте , а справа - в первом. На графике нет точек, которые являются наиболее высокими или наиболее низкими по сравнению с соседними точками. График функции слева от оси *Oy* является выпуклым, а справа – вогнутым. Начало координат, следовательно, разделяет выпуклую и вогнутую части графика, то есть является точкой его перегиба.

Аналогично можно сформулировать свойства степенной функции при α = 4, α = -2, α = - 3 и соответствующие свойства её графика. Сделайте это самостоятельно.

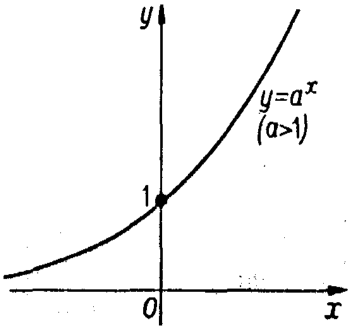

Рис. 2 а

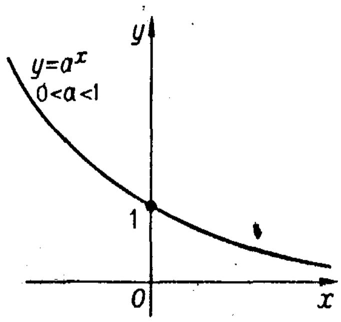

Рис. 2 б

На рис. 2 а, б показаны графики показательной функции $y = a^x$ для случаев $a > 1$, $0 < a < 1$. Областью определения D (y) функции служит множество всех вещественных чисел, множеством значений E (y) – множество всех положительных чисел, значение функции в точке $x = 0$ равно единице. График функции лежит выше оси Ox, пересекает ось ординат в точке (0; 1). При $a > 1$ функция возрастает, её график восходит слева направо. При $0 < a < 1$ функция убывает, а её график нисходит слева направо. Для любого a график функции является вогнутой кривой. Функция не имеет экстремумов, а её график не имеет самой высокой или самой низкой точек (по сравнению с соседними точками).

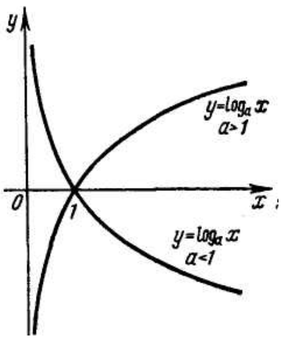

Рис. 3

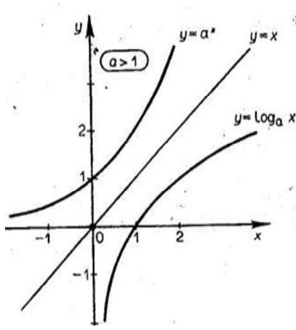

Рис. 4 а

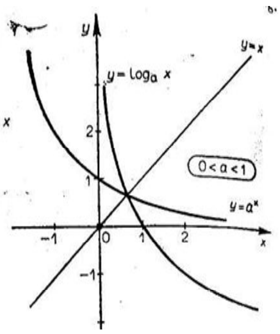

Рис. 4 б

На рис. 3 изображены графики логарифмической функции $y = \log_a x$ для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$. Областью определения $D(y)$ логарифмической функции служит множество всех положительных чисел, множеством значений E (y) – множество всех вещественных чисел, значение функции в точке $x = 1$ равно нулю. График функции лежит правее оси Oy, пересекает ось абсцисс в точке (1; 0). При $a > 1$ функция возрастает, её график восходит слева направо. При $0 < a < 1$ функция убывает, а её график нисходит слева направо. Для $a > 1$ график функции является выпуклой кривой, а для $0 < a < 1$ вогнутой. Функция не имеет экстремумов, а её график не имеет самой высокой или самой низкой точек (по сравнению с соседними точками).

Показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными: если $y = a^x$, то $x = \log_a y$; и обратно, если $y = \log_a x$, то $x = a^y$. Если обозначать аргументы каждой из этих двух функций буквой *x*, а значения функций буквой *y*, то графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ симметричны относительно прямой $y = x$, то есть относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 4 а $a > 1$, рис. 4 б для $0 < a < 1$).

Графики тригонометрических функций $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$ изображены на рис. 5 – 8.

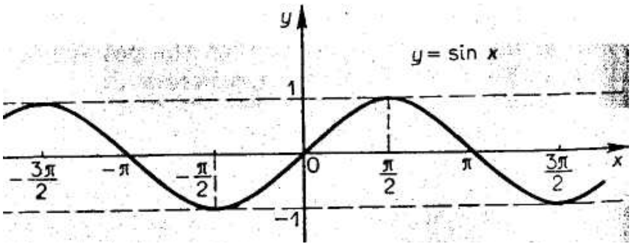

Рис. 5

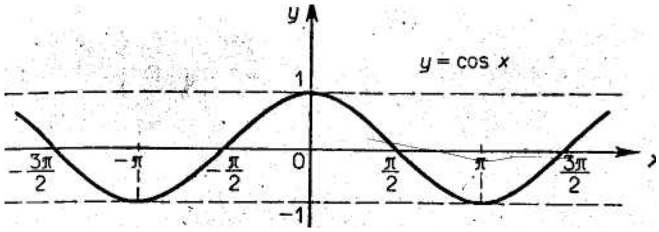

Рис. 6

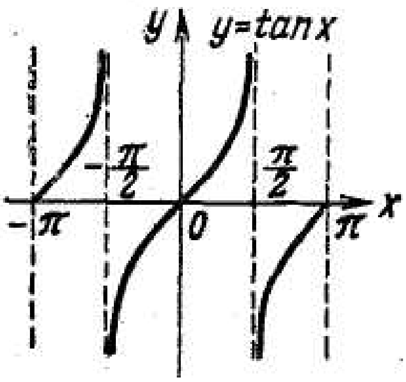

Рис. 7

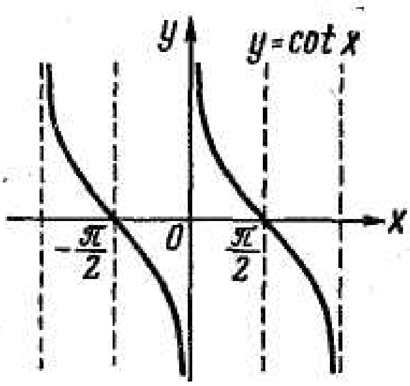

Рис. 8

Графики обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x, y = \arccos x$, $y = arctgx$ показаны на рис. 9 – 11.

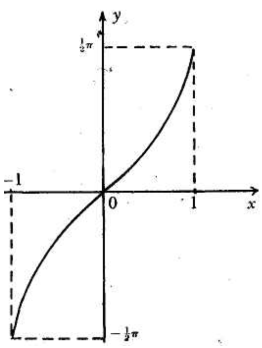

Рис. 9

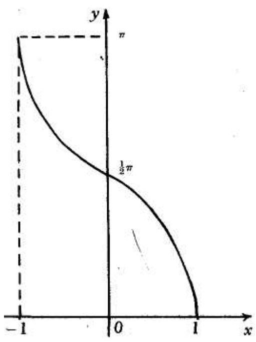

Рис. 10

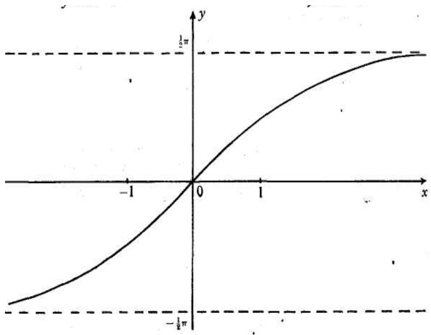

Рис. 11

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть множество (область) значений $E(\varphi)$ функции $u=\varphi(x)$ является частью (подмножеством) области определения $D(f)$ функции $y=f(u)$. Тогда функция

$$y=f(\varphi(x))$$

является функцией аргумента (независимой переменной) x и называется сложной функцией [функцией от функции, суперпозицией функций f и φ]. Функция $u=\varphi(x)$ называется внутренней функцией, или промежуточным аргументом.

Если, например, $u=\varphi(x)=\log_a x$, а $y=f(u)=u^3$, то сложной функцией [суперпозицией функций f и φ] является функция

$$y=\log_a^3 x=(\log_a x)^3.$$

Функция $y=f(x)$ называется элементарной, если она является основной элементарной или получена из основных элементарных функций с помощью конечного количества арифметических действий и суперпозиций.

К числу элементарных функций относится, например,

Многочлен [полином] n - ой степени

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0, \quad a_n\neq 0$$

Числа $a_n, a_{n-1}, a_{n-2},\ldots, a_1, a_0$ называются коэффициентами, в частности, a_n - старшим коэффициентом, а a_0 - свободным членом.

Любое число, не равное нулю, считается многочленом нулевой степени.

Многочлен первой степени

$$P_1(x)=a_1x+a_0, \quad a_1\neq 0$$

называется линейной функцией, её графиком является прямая линия с угловым коэффициентом (тангенсом угла наклона прямой к оси абсцисс) $k=a_1$ и ординатой, соответствующей началу координат, равной a_0.

Многочлен второй степени

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2 \neq 0,$$

или в обычных обозначениях

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

называется квадратной [квадратичной] функцией, или квадратным трёхчленом.

Графиком квадратного трёхчлена является парабола вершиной в точке $A\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Её ветви направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

Если дискриминант квадратного трёхчлена $D = b^2 - 4ac$ положителен, то трёхчлен имеет два корня

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

а его график пересекает ось абсцисс в двух точках $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ (рис. 12 а, 13 а).

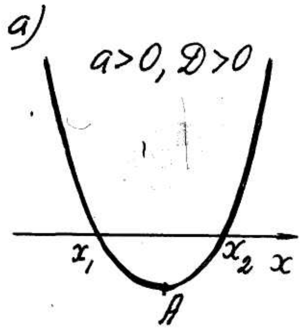

Рис. 12 а

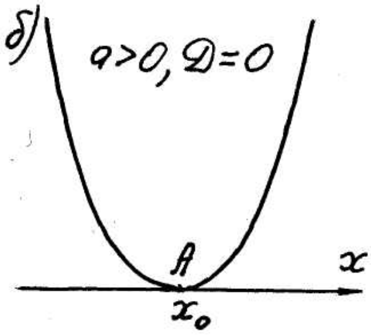

Рис. 12 б

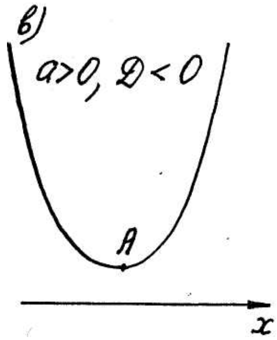

Рис. 12 в

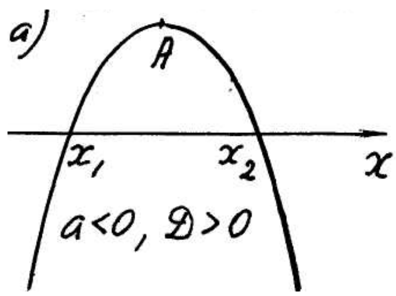

Рис. 13 а

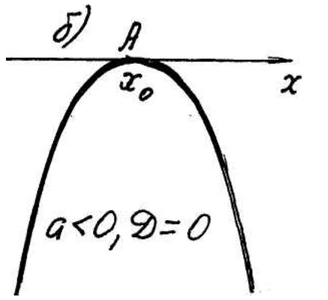

Рис. 13 б

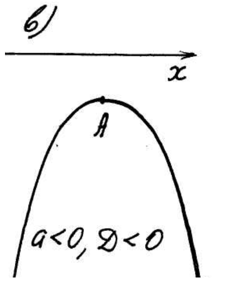

Рис. 13 в

Если дискриминант равен нулю, трёхчлен имеет один корень (часто называемый двукратным) $x_0 = -b/(2a)$, а его график касается оси абсцисс в точке $(x_0, 0)$ (рис. 12 б, 13 б).

Если дискриминант квадратного трёхчлена отрицателен, трёхчлен не имеет корней, и его график не пересекается с осью абсцисс (рис. 12 в, 13 в).

ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЁ ПРЕДЕЛ

Важным примером функции является числовая последовательность

$$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...;$$

здесь $x_1, x_2, x_3, ...$ - члены последовательности (первый, второй, третий и т.д.), x_n - $n-$й (энный), или общий член последовательности, $\{x_n\}$ - обозначение последовательности.

Областью определения числовой последовательности является множество всех натуральных чисел,

$$D(x_n) = \aleph = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}.$$

Поэтому её часто называют функцией натурального аргумента.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и некоторого постоянного числа. Это число называется разностью арифметической прогрессии.

Пусть $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ соответственно первый, второй, третий, четвёртый,…, *n*-ый (или общий) члены арифметической прогрессии, а *d* – её разность. Тогда на основании определения арифметической прогрессии

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,\ a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

и вообще

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \qquad (1)$$

Формула (1) называется формулой общего члена арифметической прогрессии.

Если арифметическая прогрессия содержит *n* членов $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$, то справедливо следующее свойство:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n\text{-}1} = a_3 + a_{n-3} = ... = 2a_1 + (n-1)d,$$

означающее, что суммы членов арифметической прогрессии, равноотстоящих от концов, равны между собой.

На основании определения арифметической прогрессии

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2,\ a_3 - a_2 = a_4 - a_3,\ a_4 - a_3 = a_5 - a_4, \ldots,$$

или

$$2a_2 = a_1 + a_3,\ 2a_3 = a_2 + a_4,\ 2a_4 = a_3 + a_5, \ldots.$$

Отсюда получаем

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2},\ \ a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2},\ \ a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2}, \ldots,$$

то есть в любой тройке последовательных членов арифметической прогрессии средний член является средним арифметическим крайних.

Сумма *n* первых членов $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \qquad (2)$$

Пример 1. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию, меньший из катетов равен *a*. Найти площадь треугольника.

Пусть *a*, *b*, *c* - соответственно длины меньшего, большего катетов и гипотенузы треугольника. По условию числа *a*, *b*, *c* образуют арифметическую прогрессию, а поэтому $b - a = c - b, a + c = 2b$. Кроме того, по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$. Мы получает следующую систему уравнений относительно b, c:

$$\begin{cases} a + c = 2b, \\ c^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Так как площадь треугольника вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}ab,$$

нет необходимости решать систему до конца, а достаточно найти только *b*. Подставляя во второе уравнение значение *c*, полученное из первого, получаем

$$c = 2b - a, (2b - a)^2 = a^2 + b^2, 4b^2 - 4ab + a^2 = a^2 + b^2, 3b^2 = 4ab, 3b = 4a, b = 4/3\,a$$

Следовательно, искомая площадь треугольника равна

$$S=\frac{1}{2}a\cdot\frac{4}{3}a=\frac{2}{3}a^2.$$

Пример 2 (ДонНУ). Все члены арифметической прогрессии – натуральные числа, второй член прогрессии равен 12, а сумма первых девяти её членов больше 200, но меньше 220. Найти прогрессию.

По условию

$$200<S_9<220.$$

На основании формул (2), (1)

$$S_9=\frac{(a_1+a_9)\cdot 9}{2}=\frac{(a_1+a_1+8d)\cdot 9}{2}=\frac{(2a_1+8d)\cdot 9}{2}=\frac{2(a_1+4d)\cdot 9}{2}=(a_1+4d)\cdot 9=$$
$$=(a_1+d+3d)\cdot 9=(a_2+3d)\cdot 9=(12+3d)\cdot 9,$$

а поэтому

$$200<(12+3d)\cdot 9<220,\ \frac{200}{9}<12+3d<\frac{220}{9},\ \frac{200}{9}-12<3d<\frac{220}{9}-12,$$

$$\frac{92}{9}<3d<\frac{112}{9},\ \frac{92}{27}<d<\frac{112}{27}.$$

Так как $92/27\approx 3.41...,112/27\approx 4.15...$ и d – натуральное число, то разность арифметической прогрессии $d=4$. Следовательно, искомая арифметическая прогрессия

$$8, 12, 16, 20,\dots.$$

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена на некоторое постоянное число. Это число называется знаменателем геометрической прогрессии.

Пусть $b_1, b_2, b_3, b_4,..., b_n$ соответственно первый, второй, третий, четвёртый,…, n-ый (или общий) члены геометрической прогрессии, а q – её знаменатель. Тогда на основании определения геометрической прогрессии

$$b_2=b_1q,\ b_3=b_2q=(b_1q)q=b_1q^2,\ b_4=b_3q=(b_1q^2)q=b_1q^3,$$

и вообще

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \qquad (3)$$

Формула (3) называется формулой общего члена геометрической прогрессии.

На основании определения геометрической прогрессии

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}, \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3}, \frac{b_4}{b_3} = \frac{b_5}{b_4}, \ldots,$$

или

$$b_2^2 = b_1 b_3, b_3^2 = b_2 b_4, b_4^2 = b_3 b_5, \ldots.$$

Отсюда следует

$$b_2 = \sqrt{b_1 b_3}, b_3 = \sqrt{b_2 b_4}, b_4 = \sqrt{b_3 b_5}, \ldots.$$

Последние равенства означают, что в любой тройке последовательных членов геометрической прогрессии средний член является средним геометрическим крайних.

Сумма *n* первых членов $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_n$ геометрической прогрессии даётся формулой

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, \quad \text{или} \quad S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} \quad . \qquad (4)$$

Пример 3. Найти три натуральных числа, образующих геометрическую прогрессию, если их сумма равна 21, а сумма обратных им чисел равна 7/12.

Запишем искомые числа в виде $b_1, b_2 = b_1 q, b_3 = b_1 q^2$. На основании условий задачи составляем и решаем систему уравнений относительно b_1, q.

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21, \\ \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{1}{b_3} = \dfrac{7}{12}; \end{cases} \begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 21, \\ \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_1 q} + \dfrac{1}{b_1 q^2} = \dfrac{7}{12}; \end{cases} \begin{cases} b_1\left(1 + q + q^2\right) = 21, \\ \dfrac{q^2 + q + 1}{b_1 q^2} = \dfrac{7}{12}; \end{cases} \begin{cases} 1 + q + q^2 = \dfrac{21}{b_1}, \\ \dfrac{21}{b_1^2 q^2} = \dfrac{7}{12}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + q + q^2 = \dfrac{21}{b_1}, \\ (b_1 q)^2 = 36. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы даёт $b_1 q = 6$ (случай $b_1 q = -6$ невозможен, так b_1, q - натуральные числа). Выражая b_1 через q и подставляя значение

$b_1 = 6/q$ в первое уравнение, получаем квадратное уравнение относительно q,

$$1+q+q^2 = \frac{21q}{6},\ 1+q+q^2 = \frac{7q}{2},\ 2\left(1+q+q^2\right) = 7,$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0.$$

Его корнями являются числа 2 и $1/2$. Если $q = 2$, то $b_1 = 3$, и мы получает геометрическую прогрессию с натуральными членами 3, 6, 12, 24, 48, … . Если же $q = 1/2$, то $b_1 = 12$, и члены соответствующей геометрической прогрессии 12, 6, 3, $3/2$, $3/4$,..., за исключением первых трёх, не являются натуральными числами.

Таким образом, искомой геометрической прогрессией является следующая: 3, 6, 12, 24, 48, … .

Пример 4. Существует ли прямоугольный треугольник, синусы углов которого образуют геометрическую прогрессию?

Пусть $\alpha, \beta, \pi/2$ - углы прямоугольного треугольника, взятые в возрастающем порядке. Так как $\beta = \pi/2 - \alpha$, то синусы этих углов соответственно равны $\sin\alpha, \sin\beta = \sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha, \sin(\pi/2) = 1$. Они могут образовывать геометрическую прогрессию, если

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}, \cos^2\alpha = \sin\alpha, 1 - \sin^2\alpha = \sin\alpha, \sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно $\sin\alpha$. Один из его корней, а именно $-\left(1+\sqrt{5}\right)/2$, меньше -1 и должен быть отброшен. Другой же корень $\left(\sqrt{5}-1\right)/2 \approx 0.62$ заключен между 0 и 1.

Ответ. Прямоугольный треугольник с указанным в условии задачи свойством существует, а именно треугольник с острым углом $\alpha = \arcsin\left(\left(\sqrt{5}-1\right)/2\right)$.

Ограниченные и монотонные последовательности

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если все её члены не превышают некоторого числа, а именно: существует такое положительное число C, что все члены последовательности не превышают C.

Символически это можно записать следующим образом:

$$\exists C > 0, \forall n \in \aleph : x_n \le C .$$

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если все её члены не меньше [больше или равны] некоторого числа: существует такое положительное число c, что все члены последовательности не меньше c. Символически:

$$\exists c > 0, \forall n \in \aleph : x_n \ge c .$$

Числовая последовательность называется ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу, то есть символически

$$\exists C > 0, \exists c > 0, \forall n \in \aleph : c \le x_n \le C .$$

Числовая последовательность называется возрастающей, если для любых двух натуральных чисел $m \in \aleph, n \in \aleph$ таких, что $m < n$, выполняется неравенство

$$x_m < x_n ,$$

то есть если с ростом номера члены числовой последовательности увеличиваются (большему номеру соответствует больший член последовательности).

Аналогично определяется неубывающая, невозрастающая и убывающая числовые последовательности: если $m < n$, то, соответственно,

$$x_m \le x_n , \quad x_m \ge x_n , \quad x_m > x_n .$$

Возрастающие, неубывающие, невозрастающие, убывающие числовые последовательности называются монотонными.

Предел числовой последовательности

Число A называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для всякого как угодно малого положительного числа ε существует такое натуральное число $N \in \aleph$, что для всех членов последовательности с номерами, большими, чем N, выполняется неравенство

$$|x_n - A| < \varepsilon .$$

В этом случае говорят, что числовая последовательность **сходится**, или что она **является сходящейся** (к числу A), и пишут

$$\lim x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = A$$

(читается: предел x_n равен A (если n стремится к бесконечности)); часто пишут также

$$x_n \to A \ (n \to \infty)$$

(читается: x_n стремится к A (если n стремится к бесконечности)).

Символически определение предела можно представить следующим образом:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = A\right) \overset{def}{=} \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \aleph, \forall n : \left(n > N \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon\right); \qquad (5)$$

здесь запись $\overset{def}{=}$ означает: «по определению». Формулу (5) можно буквально прочесть следующим образом: по определению $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, если для всякого положительного ε существует натуральное число N (N из $\aleph$) такое, что для всякого натурального числа n: если n больше N, то абсолютная величина разности $x_n - A$ меньше, чем ε.

Пример 5. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

Здесь $x_n = \frac{1}{n}$, $A = 0$. Имеем

$$|x_n - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon ,$$

если $n\varepsilon > 1, n > \frac{1}{\varepsilon}$ или, что то же самое, если $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ - целая часть чис ла $\frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \in \aleph, \forall n : \left(n > N \Rightarrow |x_n - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \right).$$

На основании определения предела числовой последовательности требуемое равенство доказано.

Аналогично можно доказать, что для всякого натурального числа k

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0. \qquad (6)$$

Пример 6. Доказать, что для любого вещественного числа q, абсолютная величина которого меньше единицы ($|q| < 1$),

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0. \qquad (7)$$

Здесь $x_n = q^n$, $A = 0$, и

$$|x_n - A| = |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \varepsilon$$

если

$$\lg|q|^n < \lg\varepsilon, \; n\lg|q| < \lg\varepsilon, \; n > \lg\varepsilon / \lg|q|$$

или если $n > [\lg\varepsilon / \lg|q|]$, где $[\lg\varepsilon / \lg|q|]$ - целая часть числа $\lg\varepsilon / \lg|q|$. Знак неравенства изменился на противоположный, так как мы разделили обе его части на число $\lg|q|$, которое является отрицательным в силу того, что $|q| < 1$.

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\lg\varepsilon / \lg|q|] \in \aleph, \forall n : (n > N \Rightarrow |x_n - A| = |q^n - 0| < \varepsilon),$$

и требуемое равенство доказано на основании определения предела числовой последовательности.

Пример 7 (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии). Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если абсолютная величина её знаменателя меньше единицы ($|q| < 1$). Мы можем определить сумму S такой прогрессии как предел суммы S_n первых n её членов при $n \to \infty$.

На основании второй из формул (4), формулы (3) общего члена геометрической прогрессии и равенства (7) имеем:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty}\left(b_1 - b_1 q^n\right) = \frac{1}{1-q}\left(b_1 - b_1 \cdot 0\right) = \frac{b_1}{1-q}$$

Таким образом, сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии определяется формулой

$$S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \frac{b_1}{1-q} \quad \left(|q| < 1\right), \tag{8}$$

где b_1 - первый член прогрессии, а q – её знаменатель.

Обратите внимание на то, что мы говорим «сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии», а не «сумма членов» этой прогрессии (невозможно вычислить сумму бесконечно большого количества слагаемых).

Пример 8. Представить бесконечную десятичную периодическую дробь 0.44444… = 0.(4) в виде обыкновенной дроби.

Очевидно,

$$0.44444\ldots = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots,$$

и слагаемые правой части представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = 4/10$ и знаменателем $q = 1/10$. На основании формулы (8) получаем

$$0.44444\ldots = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots = \frac{4/10}{1 - 1/10} = \frac{4}{10-1} = \frac{4}{9};\ 0.44444\ldots = \frac{4}{9}.$$

Пример 9. Решить уравнение $\frac{1}{x-1} + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = x - 1$ при $|x| < 1$.

Члены левой части уравнения, начиная со второго, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. С помощью формулы (8) (при $b_1 = x$ и $q = x$) получаем

$$\frac{1}{x-1} + \frac{x}{1-x} = x - 1,\ \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-1} = x - 1,\ \frac{1-x}{x-1} = x - 1,\ -1 = x - 1,\ x = 0.$$

Теорема. Если числовая последовательность возрастает (или хотя бы не убывает) и ограничена сверху, то она сходится.

То же самое справедливо для убывающей (или невозрастающей) и ограниченной снизу последовательности.

Пример 10. Известно, что числовая последовательность $\{(1+1/n)^n\}$ возрастает и ограничена сверху числом 3 (например, для $n = 10, 50, 100, 1000, 10000$ её члены равны соответственно 2.594, 2.692, 2.705, 2.717, 2.718). Поэтому она имеет предел, который принято обозначать буквой *e*,

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e \approx 2.718281828459045.... \qquad (9)$$

Число *e* называется числом Эйлера. Оно является основанием натуральных, или неперовых логарифмов

$$\ln x = \log_e x$$

и широко применяется в математике.

Пределы многих числовых последовательностей можно вычислять с помощью известных правил, которые мы напоминать не будем.

Пример 11. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+7}{3n^2+5n-6}$.

Вынося за скобки n^2 в числителе и знаменателе и используя (6), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+7}{3n^2+5n-6} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n}-\frac{6}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}{3+\frac{5}{n}-\frac{6}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

Рассматривают числовые последовательности с бесконечными пределами. Так, например, говорят,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \text{ если } \forall P>0, \exists N \in \aleph, \forall n : (n>N \Rightarrow x_n > P),$$

то есть если все члены последовательности с номерами, большими *N*, превосходят как угодно большое положительное число *P*.

Пример 12. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, так как $n^2 > P$ если $n > N = \left[\sqrt{P}\right]$.

Если числовая последовательность имеет бесконечный предел или вообще не имеет предела, то она называется **расходящейся**.

Таковыми, например, являются последовательности $\{n^2\}$, $\{(-1)^n\}$. Первая, как показано в примере 12, имеет предел $+\infty$, вторая (-1, 1, -1, 1, … в подробной записи) вообще не имеет предела.

Пример 13. Если знаменатель геометрической прогрессии с бесконечным количеством членов (и первым членом $b_1 \neq 0$) не удовлетворяет условию $|q| < 1$, то есть если прогрессия не является бесконечно убывающей, то она не имеет суммы.

Действительно, если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |b_1 q^n| = \infty$, и не существует конечного предела

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} \left(b_1 - b_1 q^n\right).$$

Если же $|q| = 1$, то прогрессия имеет вид $b_1 + b_1 + b_1 + \ldots$ или $b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \ldots$, и также не существует конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Таким образом как при $|q| > 1$, так и при $|q| = 1$ геометрическая прогрессия с бесконечным количеством членов и отличным от нуля первым членом не имеет суммы.

Пример 14. Найти сумму $1 - \cos x + \cos^2 x - \cos^3 x + \cos^4 x - \cos^5 x + \ldots$.

Слагаемые суммы образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\cos x$. Прогрессия имеет сумму только при условии $|q| = |-\cos x| = |\cos x| < 1$, или $x \neq \pi n$, где n - произвольное целое число. При выполнении этого условия на основании формулы (8)

$$1 - \cos x + \cos^2 x - \cos^3 x + \cos^4 x - \cos^5 x + \ldots = \frac{1}{1 - (-\cos x)} = \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНОГО АРГУМЕНТА

Для функции $y = f(x)$ непрерывно изменяющегося аргумента x рассматривают такие случаи предельных переходов: а) x стремится к плюс бесконечности; б) x стремится к минус бесконечности; в) x стремится к числу (к точке) a; г) x стремится к точке a слева, будучи всё время меньше a; д) x стремится к точке a справа, будучи всё время больше a.

В случаях а), б) определения пределов аналогичны определению предела числовой последовательности.

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для всякого положительного (как угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число $x_0 > 0$ такое, что для всех значений аргумента x, больших x_0, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Символически

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = A\right) \overset{def}{=} \forall \varepsilon > 0, \exists x_0, \forall x \in D(f) : \left(x > x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right). \qquad (1)$$

Аналогично получаем определение предела функции при $x \to -\infty$, которое мы представим только в символическом виде

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = A\right) \overset{def}{=} \forall \varepsilon > 0, \exists x_0, \forall x \in D(f) : \left(x < -x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right). \qquad (2)$$

Пример 1. Доказать, что для любого натурального числа k

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0. \qquad (3)$$

■Здесь $f(x) = \dfrac{1}{x^k}$, $A = 0$. Если $x \neq 0$, то

$$|f(x) - A| = \left|\frac{1}{x^k}\right| = \frac{1}{\left|x^k\right|} = \frac{1}{|x|^k} < \varepsilon$$

если

$$|x|^k > \frac{1}{\varepsilon}, \; |x| > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}.$$

Таким образом, для всякого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число $x_0 = \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ такое, что для всех значений аргумента x, по абсолютной величине больших x_0, то есть для $x > x_0$ или $x < -x_0$, выполняется неравенство

$$\left|f(x) - A\right| = \left|\frac{1}{x^k} - 0\right| = \left|\frac{1}{x^k}\right| < \varepsilon .$$

На основании определений (1) и (2) пределов функции при $x \to +\infty, x \to -\infty$ равенство (3) доказано.■

Доказанное выше равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

(для случая числовой последовательности) является частным случаем равенства (3).

Пример 2. Доказать, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{3x^2-1} = \frac{1}{3}.$$

■Здесь $f(x) = (x^2+1)/(3x^2-1)$, $A = 1/3$. Имеем (при $|x| > 1$ $(x > 1 \text{ или } x < -1)$)

$$\left|f(x) - A\right| = \left|\frac{x^2+1}{3x^2-1} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3(x^2+1) - (3x^2-1)}{3(3x^2-1)}\right| = \left|\frac{2}{3(3x^2-1)}\right| = \frac{2}{3(3x^2-1)} < \varepsilon ,$$

если

$$2 < 3\varepsilon(3x^2-1),\ 3x^2 - 1 > 2/(3\varepsilon),\ x^2 > \frac{1 + 2/(3\varepsilon)}{3} = \frac{3\varepsilon+2}{9\varepsilon},\ |x| > \sqrt{\frac{3\varepsilon+2}{9\varepsilon}} .$$

Таким образом,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists x_0 = \sqrt{\frac{3\varepsilon+2}{9\varepsilon}}, \forall x \in D(f) : \left((x > x_0 \text{ или } x < -x_0) \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon\right).$$

На основании определений (1) и (2) пределов функции при $x \to +\infty, x \to -\infty$ получаем, что в самом деле

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{3x^2-1} = \frac{1}{3}.■$$

Говорят, что x стремится к точке a слева, и пишут $x \to a - 0$, если x приближается к a, оставаясь при этом меньшим a. Аналогично говорят, что x стремится к точке a справа, и пишут $x \to a + 0$, если x приближается к a, оставаясь всё время большим a.

Число A называется левым пределом функции $y = f(x)$ в точке a, то есть при стремлении x к a слева ($x \to a - 0$), если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует число α, меньшее a и такое, что для всех значений аргумента, лежащих в интервале $(\alpha,\, a)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$,

$$\left(\lim_{x \to a-0} f(x) = A\right) \overset{def}{=} \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha, \forall x \in D(f): \left(x \in (\alpha,\, a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right). \quad (4)$$

Число A называется правым пределом функции $y = f(x)$ в точке a, то есть при стремлении x к a справа ($x \to a + 0$), если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует число β, большее a и такое, что для всех значений аргумента, лежащих в интервале $(a,\, \beta)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$,

$$\left(\lim_{x \to a+0} f(x) = A\right) \overset{def}{=} \forall \varepsilon > 0, \exists \beta, \forall x \in D(f): \left(x \in (a,\, \beta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right). \quad (5)$$

Левый и правый пределы функции $y = f(x)$ в точке a называются ещё односторонними и обозначаются $f(a-0)$, $f(a+0)$ соответственно,

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x),\; f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x).$$

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a, то есть при стремлении x к a (как слева, так и справа), если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U_a = (\alpha,\, \beta)$ точки[1] a такая, что для всех значений аргумента, лежащих в этой окрестности, кроме, быть может, самой точки a, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$,

$$\begin{gathered}\left(\lim_{x \to a} f(x) = A\right) \overset{def}{=} \\ \overset{def}{=} \forall \varepsilon > 0, \exists U_a = (\alpha, \beta), \forall x \in D(f): \left(x \in U_a \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).\end{gathered} \quad (6)$$

---

[1] Напомним, что окрестностью точки называется всякий содержащий её интервал.

Точка a может как принадлежать, так и не принадлежать области определения функции $y = f(x)$. В первом случае мы не выбрасываем её из интервала $U_a = (\alpha, \beta)$, если неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется и для неё.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$.

■Здесь $f(x) = x^2$, $a = 3$, $A = 9$. Имеем

$$|f(x) - A| = |x^2 - 9| < \varepsilon,$$

если

$$-\varepsilon < x^2 - 9 < \varepsilon, 9 - \varepsilon < x^2 < 9 + \varepsilon, \sqrt{9 - \varepsilon} < x < \sqrt{9 + \varepsilon}, x \in \left(\sqrt{9 - \varepsilon}, \sqrt{9 + \varepsilon}\right).$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \left(\sqrt{9 - \varepsilon}, \sqrt{9 + \varepsilon}\right) \ni 3, \forall x \in D(f): \left(x \in \left(\sqrt{9 - \varepsilon}, \sqrt{9 + \varepsilon}\right) \Rightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon\right),$$

и на основании определения (6) требуемое равенство доказано.■

Заметим, что в рассмотренном примере мы не исключали точку $a = 3$ из интервала $\left(\sqrt{9 - \varepsilon}, \sqrt{9 + \varepsilon}\right)$, так она принадлежит области определения функции $f(x) = x^2$, и неравенство $|x^2 - 9| < \varepsilon$ выполняется и для неё.

Предел функции $y = f(x)$ в точке a обычно называют двусторонним.

Из определений (4), (5), (6) вытекает следующая

Теорема. Для того, чтобы функция имела в точке a предел (то есть двусторонний предел), необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали и были равными левый и правый (односторонние) пределы,

$$\left(\exists \lim_{x \to a} f(x)\right) \Leftrightarrow \left(\exists f(a - 0), \exists f(a + 0), f(a - 0) = f(a + 0)\right).$$

Можно дать другое определение предела функции в точке a, равносильное определению (6). Достаточно взять окрестность $U_a = (\alpha, \beta)$ точки a симметричной относительно a. Пусть, например, $U_a = (a - \delta, a + \delta)$, где δ - некоторое положительное число. В таком случае, как говорилось выше[2], соотношение

[2] См. стр. 26.

$x \in U_a = (a-\delta, a+\delta)$ равносильно выполнению неравенства $|x-a| < \delta$, и мы можем дать такое определение предела

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = A\right) \overset{def}{=} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D(f) : \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right). \quad (7)$$

Теорема. Предел суммы, разности, произведения и частного двух функций равен, соответственно, сумме, разности, произведению и частному пределов этих функций (в последнем случае - если предел делителя отличен от нуля).

Например, в случае предела функции в точке a теорема означает: если для двух функций $f(x), g(x)$ имеем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, то

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B; \lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B; \lim_{x \to a}(f(x)/g(x)) = A/B, \text{ при } B \neq 0.$$

В частности, теорема справедлива и для случая предела числовой последовательности.

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (3x^2 + 4x - 5)/(8x^2 - 6x + 9)$.

Вынося x^2 за скобки в числителе и знаменателе, мы можем воспользоваться равенством (3). Имеем

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + 4x - 5}{8x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(3 + 4/x - 5/x^2)}{x^2(8 - 6/x + 9/x^2)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3 + 4/x - 5/x^2}{8 - 6/x + 9/x^2} = \frac{3}{8}.$$

Функция, которая в некотором предельном переходе имеет предел, равный нулю, называется бесконечно малой в этом переходе.

Например, все нижеследующие функции

$$\sin x, tgx, \arcsin x, arctgx, \ln(1+x), \log_a(1+x), e^x - 1, a^x - 1, (1+x)^\alpha - 1 \ (\alpha > 0)$$

являются бесконечно малыми при $x \to 0$.

Функции $\alpha(x), \beta(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$, если предел их отношения равен единице,

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Аналогично определяются эквивалентные функции при других предельных переходах.

Эквивалентность функций мы будем обозначать знаком $\cong$ $(\alpha(x) \cong \beta(x))$.

Можно доказать, что

$\sin x \cong x$ при $x \to 0$,	$e^x - 1 \cong x$ при $x \to 0$,
$tgx \cong x$ при $x \to 0$,	$\log_a(1+x) \cong \dfrac{x}{\ln a} = x\log_a e$ при $x \to 0$,
$\arcsin x \cong x$ при $x \to 0$,	$a^x - 1 \cong x\ln a$ при $x \to 0$,
$arctgx \cong x$ при $x \to 0$,	$(1+x)^\alpha - 1 \cong \alpha x$ при $x \to 0$,
$\ln(1+x) \cong x$ при $x \to 0$,	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \cong a_n x^n$ при $a_n \neq 0$ и $x \to \infty$.

Например, это означает, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{a_n x^n} = 1.$$

Эквивалентные функции часто применяются при вычислении пределов. Пусть, например, нужно вычислить предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)\alpha(x)}{g(x)\beta(x)}$$

причём $\alpha(x) \cong \alpha_1(x)$, $\beta(x) \cong \beta_1(x)$. В этом случае сомножители $\alpha(x), \beta(x)$ можно заменить эквивалентными $\alpha_1(x), \beta_1(x)$. Такая замена, как легко доказать, не изменяет предела, но упрощает его вычисление, если функции $\alpha_1(x), \beta_1(x)$ являются более простыми, чем $\alpha(x), \beta(x)$.

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3x^2 + 4x - 5)/(8x^2 - 6x + 9)$ (см. предыдущий пример 4).

Так как $3x^2 + 4x - 5 \cong 3x^2, 8x^2 - 6x + 9 \cong 8x^2$, получаем

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2 + 4x - 5}{8x^2 - 6x + 9} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{8x^2} = \frac{3}{8}.$$

Пример 6. Вычислить предел

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x \cdot arctg 9x \cdot (e^{4x} - 1)\cdot(2^{3x} - 1)}{tg 7x \cdot \arcsin 5x \cdot \ln(1 - 6x)\cdot(\sqrt[5]{1 + 4x} - 1)}.$$

На основании вышеприведённой таблицы эквивалентных функций

$$\sin 2x \cong 2x,\ arctg 9x \cong 9x,\ e^{4x}-1 \cong 4x,\ 2^{3x}-1 \cong 3x\ln 2,$$

$$tg 7x \cong 7x,\ \arcsin 5x \cong 5x,\ \ln(1-6x) \cong (-6)x,\ \sqrt[5]{1+4x}-1=(1+4x)^{\frac{1}{5}}-1 \cong \frac{1}{5}\cdot 4x=\frac{4}{5}x,$$

а поэтому после замены всех сомножителей эквивалентными (гораздо более простыми) и сокращения на x^4 получаем

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot arctg 9x\cdot\left(e^{4x}-1\right)\cdot\left(2^{3x}-1\right)}{tg 7x\cdot\arcsin 5x\cdot\ln(1-6x)\cdot\left(\sqrt[5]{1+4x}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 9x\cdot 4x\cdot 3x\ln 2}{7x\cdot 5x\cdot(-6)x\cdot\frac{4}{5}x}=-\frac{9\ln 2}{7}.$$

Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$ (или, что то же самое, $|f(x)|\to+\infty$), если для любого как угодно большого положительного числа *M* существует окрестность U_a этой точки такая, что для любого значения аргумента, отличного от *a* и лежащего в U_a, выполняется следующее неравенство $|f(x)|>M$. Символически

$$\left(|f(x)|\to+\infty\right)\overset{def}{=}\forall M>0,\exists U_a,\forall x\in D(f):\left(x\in U_a\setminus\{a\}\Rightarrow|f(x)|>M\right),$$

или в другой форме

$$\left(|f(x)|\to+\infty\right)\overset{def}{=}\forall M>0,\exists\delta>0,\forall x\in D(f):\left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|>M\right).$$

Если бесконечно большая при $x\to a$ функция $f(x)$ положительна в U_a, то говорят, что она стремится к $+\infty$. Если же $f(x)<0$ в U_a, то говорят, что при $x\to a$ функция $f(x)$ стремится к $-\infty$.

Аналогичные определения можно дать для всех типов предельных переходов.

Пример 7. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x\to 0$. Она стремится к $+\infty$, если *x* стремится к 0 справа, и к $-\infty$ если *x* стремится к 0 слева.

Действительно,

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} > M,$$

если

$$1 > M|x|, \ |x| < 1/M.$$

Таким образом,

$$\forall M > 0, \exists \delta = \frac{1}{M}, \forall x \in D(f): \left(0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > M\right),$$

и данная функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$. При $x > 0$ она положительна и поэтому стремится к $+\infty$. Если же $x < 0$, она является отрицательной и, следовательно, стремится к $-\infty$.

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{1}{x}\right| = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x} = -\infty$.

Если функция $y = f(x)$ является бесконечно большой в некотором предельном переходе, то функция $\alpha(x) = 1/f(x)$ является бесконечно малой.

Например, функция

$$\frac{1}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

является бесконечно малой при $x \to \infty$, если хотя бы один из коэффициентов $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$ отличен от нуля.

И обратно, если функция $y = \alpha(x)$ является бесконечно малой, то функция $g(x) = 1/\alpha(x)$- бесконечно большой (в одном и том же предельном переходе).

Например, при $x \to 0$ бесконечно большими являются функции

$$\frac{1}{\sin x}, \frac{1}{tgx}, \frac{1}{\arcsin x}, \frac{1}{arctgx}, \frac{1}{\ln(1+x)}, \frac{1}{\log_a(1+x)}, \frac{1}{e^x - 1}, \frac{1}{a^x - 1}, \frac{1}{(1+x)^\alpha - 1} \ (\alpha > 0)$$

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a, если: а) она определена в некоторой окрестности этой точки; б) существует предел функции в точке a; в) этот предел равен значению функции в точке,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Функция называется непрерывной в точке a справа, если: а) она определена в некотором интервале $[a, b)$ с левым концом a; б) существует правый предел функции в точке a; в) этот предел равен значению функции в точке,

$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a).$$

Функция называется непрерывной в точке a слева , если: а) она определена в некотором интервале $(c, a]$ с правым концом a; б) существует левый предел функции в точке a; в) этот предел равен значению функции в точке,

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a).$$

Теорема. Функция непрерывна в точке a тогда и только тогда, если она непрерывна в этой точке и справа, и слева

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right) \Leftrightarrow \left(f(a-0) = f(a) = f(a+0)\right).$$

Функция называется непрерывной на интервале (открытом интервале) (a, b), если она непрерывна в каждой его точке.

Функция называется непрерывной на отрезке (замкнутом ограниченном интервале) $[a, b]$, если она: а) непрерывна внутри отрезка (то есть на интервале (a, b)); б) в левом конце a непрерывна справа; в) в правом конце b непрерывна слева.

Точка, в которой функция не является непрерывной, называется точкой разрыва функции.

Различают точки разрыва первого и второго рода.

1) Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если функция имеет в ней конечные левый и правый пределы $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$.

Пределы $f(x_0-0), f(x_0+0)$ могут быть разными (рис. 1 а). Это значит, что функция не имеет предела в точке x_0. Разность

$$f(x_0-0)-f(x_0+0)$$

называется в этом случае скачком (конечным скачком) функции в точке x_0.

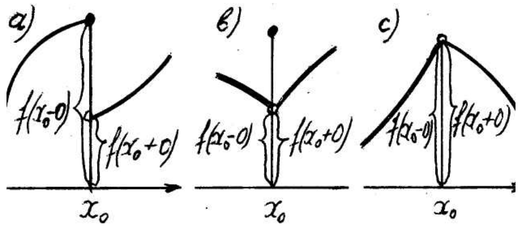

Рис. 1 а Рис. 1 б Рис. 1 в

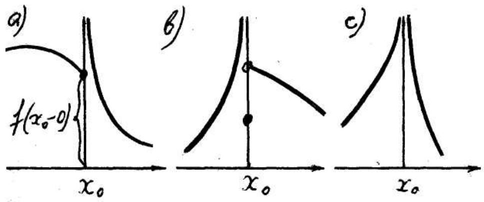

Рис. 2 а Рис. 2 б Рис. 2 в

Пределы $f(x_0-0), f(x_0+0)$ в точке разрыва первого рода могут совпадать, равняясь какому-то числу A: $A=f(x_0-0)=f(x_0+0)$. Функция имеет тогда в точке x_0 предел, равный A, однако её значение в этой точке или не равно A (рис. 1 б), или вообще не существует (рис. 1 в). В обоих случаях в графике функции имеется «дыра».

2) Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если в ней по крайней мере один из односторонних пределов функции бесконечен или вообще не существует (см., например, рис. 2).

График функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, не имеет разрывов, подобных изображённым на рис. 1, 2. Он представляет собой непрерывную кривую линию, соединя-ющую точки $A(a; f(a)), B(b; f(b))$ (рис. 3).

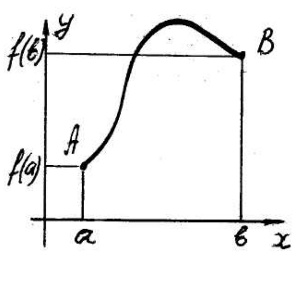

Рис. 3

Теорема. Все элементарные функции непрерывны во всех точках своих областей определения.

Этот факт широко используется при вычислении пределов функций.

Пример 14. Учитывая непрерывность логарифма и синуса, находим следующий предел:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\sin x = \ln\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x\right) = \ln\sin\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\right) = \ln\sin\frac{\pi}{2} = \ln 1 = 0\,.$$

Функция, непрерывная на отрезке (замкнутом ограниченном интервале) обладает несколькими важными свойствами.

1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на нём свои наибольшее M и наименьшее m значения, то есть существуют по крайней мере две точки $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$, такие, что

$$f(x_1) = m = \min_{[a,\,b]} f(x), \quad f(x_2) = M = \max_{[a,\,b]} f(x).$$

2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на нём все значения, заключённые между её наименьшим m и наибольшим M значениями.

Другими словами, множеством значений функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, является отрезок $[m, M]$.

3 (следствие из предыдущего свойства). Если функция, непрерывная на отрезке, принимает на его концах значения разных знаков, то она на этом отрезке хотя бы один раз обращается в нуль.

На последнем свойстве основан так называемый метод интервалов для определения знака функции, в том числе для решения неравенств.

Пусть, например, функция непрерывна на следующих трёх интервалах $(-\infty, a)$, (a, d), (d, ∞), причём обращается в нуль в точках $b \in (a, d)$, $c \in (a, d)$, $e \in (d, \infty)$. Точки a, b, c, d, e порождают шесть интервалов $(-\infty, a)$, (a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, ∞), на каждом из которых функция сохраняет один и тот же знак. Для нахождения этих знаков достаточно на каждом интервале взять по одной точке и найти в ней знак функции. Одно из возможных распределений знаков на интервалах показано на рис. 4.

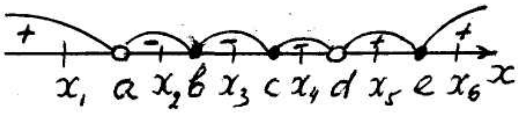

Рис. 4

Пример 15. Решить неравенство $x^2 > a^2$ для $a > 0$.

Решение. Функция $f(x) = x^2 - a^2$ непрерывна на множестве всех вещественных чисел и обращается в нуль в двух точках $\pm a$, которые порождают три интервала $(-\infty, -a), (-a, a), (a, +\infty)$. Для $x = -2a \in (-\infty, -a)$ и $x = 2a \in (a, +\infty)$ мы имеем $f(-2a) > 0, f(2a) > 0$. Для $x = 0 \in (-a, a)$ $f(0) < 0$. Следовательно, неравенство выполняется, если $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, или если $|x| > a$.

Пример 16. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 8x + 7} \geq 0.$$

Решение. Введём в рассмотрение функцию

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 8x + 7},$$

представляющую собой левую часть неравенства. Находим корни её числителя и знаменателя:

$$x^2 - x - 12 = 0, x_1 = -3, x_2 = 4, \; x^2 - 8x + 7 = 0, x_3 = 1, x_4 = 7.$$

В точках $x_1 = -3, x_2 = 4$ функция $f(x)$ обращается в нуль, две другие точки $x_3 = 1, x_4 = 7$ являются точками её разрыва. Эти четыре точки порождают пять интервалов $(-\infty, -3), (-3, 1), (1, 4), (4, 7), (7, +\infty)$, на каждом из которых мы найдем знак функции $f(x)$. Для удобства разложим числитель и знаменатель на множители,

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-4)}{(x-1)(x-7)},$$

что позволит легко определить знак каждой скобки, а следовательно – и самой функции.

Для $x = -4 \in (-\infty, -3)$

$$f(x)=\frac{(-4+3)(-4-4)}{(-4-1)(-4-7)}=\left|\frac{--}{--}\right|>0\Rightarrow f(x)>0 \text{ на интервале } (-\infty,-3);$$

для $x=0\in(-3,1)$ $f(x)=\dfrac{(0+3)(0-4)}{(0-1)(0-7)}=\left|\dfrac{+-}{--}\right|<0\Rightarrow f(x)<0$ на интервале $(-3,1)$;

для $x=2\in(1,4)$ $f(x)=\dfrac{(2+3)(2-4)}{(2-1)(2-7)}=\left|\dfrac{+-}{+-}\right|>0\Rightarrow f(x)>0$ на интервале $(1,4)$;

для $x=5\in(4,7)$ $f(x)=\dfrac{(5+3)(5-4)}{(5-1)(5-7)}=\left|\dfrac{++}{+-}\right|<0\Rightarrow f(x)<0$ на интервале $(4,7)$;

для $x=8\in(7,+\infty)$ $f(x)=\dfrac{(8+3)(8-4)}{(8-1)(8-7)}=\left|\dfrac{++}{++}\right|>0\Rightarrow f(x)>0$ на интервале $(7,+\infty)$.

Выбирая интервалы $(-\infty,-3)$, $(1,4)$, $(7,+\infty)$, на которых функция $f(x)$ положительна, и присоединяя к ним точки $x_1=-3, x_2=4$, где она обращается в нуль, мы получаем решение неравенства в виде объединения интервалов:

$$x\in(-\infty,-3]\cup(1,4]\cup(7,+\infty).$$

Пример 17. Исследовать функцию

$$y=f(x)=\frac{x^3}{8-x}$$

и построить её график.

1. Область определения функции $D(f)=(-\infty,8)\cup(8,+\infty)$. График функции не пересекает прямой линии $x=8$, перпендикулярной оси Ox.

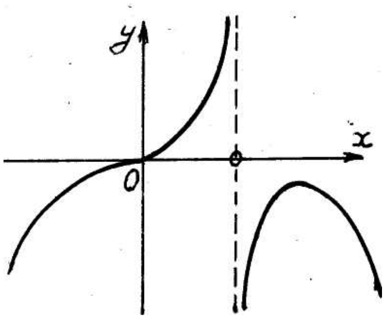

Рис. 5

2. Найдём интервалы, на которых функция имеет неизменный знак. Точки $x=0$ (в ней функция обращается в нуль) и $x=8$ (точка разрыва функции) порождают три интервала $(-\infty,0)$, $(0,8)$, $(8,+\infty)$. На интервале $(0,8)$ функция положительная, и её график лежит выше оси Ox. На интервалах $(-\infty,0)$, $(8,+\infty)$ функция отрицательная, и её график лежит ниже оси Ox.

3. Зная знак функции, мы найдем её правый и левый пределы при стремлении x к точке разрыва x = 8, а именно:

$$f(8-0)=\lim_{x\to 8-0}\frac{x^3}{8-x}=\left(\frac{1}{0}=\infty\right)=+\infty,\ f(8+0)=\lim_{x\to 8+0}\frac{x^3}{8-x}=\left(\frac{1}{0}=\infty\right)=-\infty.$$

График функции уходит вверх, если x приближается к точке x = 8 слева, и вниз при стремлении x к этой точке справа.

4. Найдём предел функции при $x\to\pm\infty$, то есть при стремлении x к плюс или минус бесконечности. Оба предела равны $-\infty$, так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{8-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\left(\frac{8}{x}-1\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{\frac{8}{x}-1}=-\infty.$$

График функции уходит вниз при $x\to\pm\infty$.

5. График пересекает координатные оси в единственной точке $O(0;\,0)$

На основании результатов исследования мы можем построить график функции (см. рис. 5).

ПРОИЗВОДНАЯ

Пусть $y = f(x)$ функция с областью определения $D(f)$. Возьмем любое значение аргумента $x_0 \in D(f)$ и прибавим к нему произвольное число (положительное или отрицательное) Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in D(f)$. Говорят, что мы даём аргументу x произвольное приращение Δx в точке x_0. Функция $y = f(x)$ получает при этом соответствующее приращение (так называемое приращение функции в точке x_0)

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \qquad (1)$$

Отношение приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента Δx, то есть величина

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (2)$$

представляет собой среднюю скорость изменения этой функции на интервале $(x_0, x_0 + \Delta x)$, если $\Delta x > 0$, или на интервале $(x_0 + \Delta x, x_0)$, если $\Delta x < 0$. Устремляя Δx к нулю, мы можем определить скорость изменения функции в точке x_0. Это рассуждение приводит нас к определению важного математического понятия производной функции в точке x_0.

Определение. Предел отношения приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента Δx при стремлении приращения аргумента к нулю (если такой предел существует) называется производной функции в точке x_0 и обозначается

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Из определения следует, что производная функции в точке x_0 выражает скорость изменения функции в этой точке.

Пример 1. Найти производную функции $y = f(x) = \sin x$ в произвольной точке x.

Найдём сначала приращение функции в точке x, если аргумент получает приращение Δx:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Если приращение аргумента Δx стремится к нулю, то сомножитель $\sin\frac{\Delta x}{2}$ является бесконечно малой функцией, эквивалентной своему аргументу $\frac{\Delta x}{2}$, а сомножитель $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ имеет предел, равный $\cos x$. Поэтому на основании определения производной получаем

$$y' = f'(x) = (\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x; \quad (\sin x)' = \cos x.$$

Аналогично мы можем найти производные всех основных элементарных функций и составить следующую таблицу производных.

Таблица производных

1. Если $C - const$, то $C' = 0$.

2. $\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$. В частности, $x' = 1$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3. $\left(a^x\right)' = a^x\ln a$. В частности, $\left(e^x\right)' = e^x$.

4. $\left(\log_a|x|\right)' = \frac{1}{x\ln a}$. В частности, $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$.

5. $(\sin x)' = \cos x$. 6. $(\cos x)' = -\sin x$. 7. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. 8. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. 12. $(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Функция называется дифференцируемой в точке, если она в этой точке имеет производную.

Операция вычисления производной функции называется дифференцированием этой функции.

Продифференцировать функцию - это значит найти ее производную.

Теорема (связь между дифференцируемостью и непрерывностью). Если функция имеет производную в точке, то она в этой точке непрерывна.

Обратная теорема неверна, так как существуют непрерывные функции, не имеющие производной в одной, в нескольких, а иногда даже во всех точках.

Пример 2. Функция $y=\sqrt[3]{x}$ не имеет производной в точке $x=0$, хотя она в этой точке непрерывна.

Некоторые правила вычисления производной

1. Производные суммы, разности, произведения и частного двух дифференцируемых функций $u=u(x), v=v(x)$ вычисляются, соответственно, следующим образом:

$$(u+v)'=u'+v',\ (u-v)'=u'-v',\ (u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v',\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

В качестве следствия получаем: если $C-const$, то

$$(Cu)'=C'\cdot u+C\cdot u'=0\cdot u+C\cdot u'=C\cdot u';\quad (Cu)'=C\cdot u',$$

то есть постоянный множитель можно вынести за знак производной.

Пример 3.

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Производная сложной функции. Пусть задана сложная функция

$$y=f(\varphi(x))\quad (y=f(u), u=\varphi(x))$$

с внутренней функцией [или промежуточным аргументом] $u=\varphi(x)$. Тогда её производная вычисляется по следующему правилу:

$$y'=y'_x=y'_u\cdot u'_x=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x). \qquad (4)$$

Согласно этому правилу производная сложной функции равна произведению её производной по внутренней функции и производной внутренней функции.

Пример 4. Функция $y=\ln\sin x$ является сложной с внутренней функцией $u=\sin x \quad (y=\ln u,\, u=\sin x)$. Производная этой функции равна

$$y'=y'_u\cdot u'_x=(\ln u)'_u\cdot(\sin x)'_x=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x,$$

или в иной, немного более простой форме

$$y'=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\cot x.$$

На основании правила дифференцирования сложной функции мы можем переписать таблицу производных, считая аргументом не независимую переменную x, а произвольную функцию $u=u(x)$.

Усовершенствованная таблица производных

1. Если $C-const$, то $C'=0$.

2. $(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$. В частности, $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$, $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$, $(\sqrt[3]{u})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot u'$

3. $(a^{\cdot u})'=a^x\ln a\cdot u'$. В частности, $(e^u)'=e^x\cdot u'$.

4. $(\log_a|u|)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$. В частности, $(\ln|u|)'=\frac{1}{u}\cdot u'$.

5. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$. 6. $(\cos x)'=-\sin u\cdot u'$.

7. $(\tan u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$. 8. $(\cot u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.

9. $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$. 10. $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

11. $(\arctan u)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$. 12. $(arc\cot u)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

Пример 5.

$$\left(\sin^5 x\right)' = \left(\left(\sin x\right)^5\right)' = \left|\begin{matrix}\text{считаем}\\ u = \sin x\end{matrix}\right| = 5\left(\sin x\right)^4 \cdot \left(\sin x\right)' = 5\sin^4 x \cos x.$$

Пример 6.

$$\left(\ln \tan x\right)' = \left|\begin{matrix}\text{считаем}\\ u = \tan x\end{matrix}\right| = \frac{1}{\tan x}\cdot\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}.$$

Геометрический смысл производной

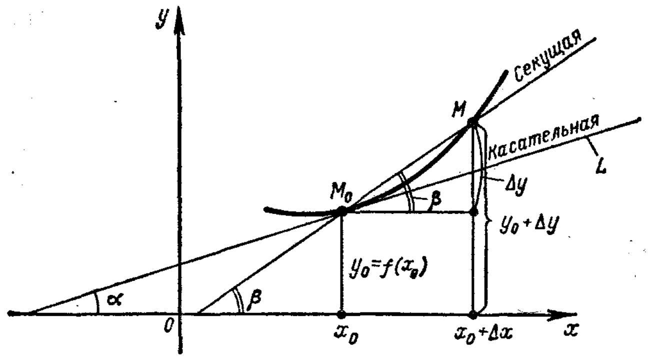

Рис. 1

Производная функции имеет простой геометрический смысл. Пусть $M_0(x_0;\, y_0)$, $M(x;\, y)$ - две точки графика функции $y = f(x)$ (рис. 1, где положено $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$). Проведём через точки M_0, M прямую (она называется секущей) и будем перемещать точку M к точке M_0 вдоль графика функции. При этом секущая M_0M изменяет своё положение, вращаясь около точки M_0.

Если существует предельное положение *L* секущей, то прямая *L* называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\, y_0)$. Нетрудно доказать, что угловой коэффициент касательной, то есть тангенс угла α её наклона к оси *Ox*, равен производной функции $y = f(x)$ в точке x_0,

$$k = k_{касат} = \tan\alpha = f'(x_0). \qquad (5)$$

Действительно, пусть секущая M_0M образует угол β с осью *Ox*. Тогда её угловой коэффициент равен

$$k_{M_0M} = \tan\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

При стремлении точки M к точке M_0 приращение аргумента Δx стремится к нулю, а угол β приближается к углу α. На основании непрерывности тангенса угловой коэффициент касательной равен

$$k = k_{касат} = \tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Таким образом, производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $M_0(x_0; y_0)$. В этом и состоит геометрический смысл производной.

Зная угловой коэффициент касательной, мы можем составить и уравнение касательной, а именно:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (6)$$

В этом уравнении x, y - координаты произвольной точки $M(x; y)$ касательной (текущие координаты), а x_0, y_0, где $y_0 = f(x_0)$, - координаты точки касания $M_0(x_0; y_0)$.

Пример 7. Составить уравнение касательной к линии $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x_0 = e$.

Здесь $f(x) = \ln x$, $y_0 = f(x_0) = \ln e = 1$; $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{e}$, и на основании уравнения (6) получаем искомое уравнение касательной

$$y = 1 + \frac{1}{e}(x - e), \; y = 1 + \frac{x}{e} - 1, \; y = \frac{x}{e}.$$

Часто рассматривают случаи, когда точка $M(x; y)$ секущей M_0M находится только с одной стороны от точки $M_0(x_0; y_0)$ - справа или слева. Тогда и приближаться к точке $M_0(x_0; y_0)$ она может только справа (соответственно только слева). В таком случае мы приходим к определению правой (соответственно левой) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$. Очевидно, обычная касательная к графику в данной его точке может существовать тогда и только тогда, когда и правая, и левая касательные в этой точке существуют и совпадают.

Отметим также, что при расположении точки $M(x;\, y)$ секущей M_0M только справа (или только слева) от точки $M_0(x_0;\, y_0)$ приращение аргумента Δx принимает только положительные (соответственно только отрицательные) значения. В таком случае можно говорить о правой (левой) производной функции $y = f(x)$ в точке x_0. Как и в случае с касательной, производная функции в точке существует тогда и только тогда, когда в ней существуют и правая, и левая производные, и они равны между собой.

Производная имеет простой **механический смысл**. Пусть, в самом деле, функция $s = f(t)$ представляет собой путь, пройденный материальной точкой от начала движения до момента времени *t*. Тогда до момента времени $t + \Delta t$ она пройдёт путь, равный $f(t + \Delta t)$. Разность

$$\Delta s = \Delta f(t) = f(t + \Delta t) - f(t)$$

- это путь, пройденный точкой за интервал времени от момента времени *t* до момента $t + \Delta t$. Отношение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

даёт среднюю скорость материальной точки за этот интервал времени, а предел отношения при стремлении Δt к нулю – скорость точки в момент *t*.

Таким образом, скорость материальной точки, движущейся по данному закону $s = f(t)$, в момент времени *t* равна

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t),$$

то есть равна производной функции $s = f(t)$ в точке *t*.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Условия монотонности функции

Определение 1. Пусть x_1, x_2 **-** две произвольные точки некоторого интервала такие, что $x_1 < x_2$. Функция $y = f(x)$ называется на этом интервале

возрастающей, если $f(x_1) < f(x_2)$;

неубывающей, если $f(x_1) \leq f(x_2)$;

невозрастающей, если $f(x_1) \geq f(x_2)$;

убывающей, если $f(x_1) > f(x_2)$.

Определение 2. Возрастающие, неубывающие, невозрастающие, убывающие функции называются монотонными.

Теорема 1. Если на некотором интервале функция $y = f(x)$ возрастает или не убывает, то её производная на этом интервале неотрицательная, $f'(x) \geq 0$. Если на некотором интервале функция $y = f(x)$ убывает или не возрастает, то её производная на этом интервале неположительная, $f'(x) \leq 0$.

Теорема представляет собой необходимое условие возрастания (неубывания) или убывания (невозрастания) функции.

Теорема 2 (достаточное условие возрастания или убывания функции). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$, а внутри отрезка имеет положительную производную, то она на этом отрезке возрастает. Если же производная функции внутри отрезка отрицательная, то она на нём убывает.

Экстремумы [локальные экстремумы] функции

Определение 3. Точка x_0 называется точкой максимума [или точкой локального максимума] функции $y = f(x)$, если существует окрестность точки x_0

такая, что для всех точек x этой окрестности, отличных от x_0, выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

Говорят также, что функция имеет в точке x_0 максимум [локальный максимум], равный $f(x_0)$.

Определение 4. Точка x_0 называется точкой минимума [или точкой локального минимума] функции $y = f(x)$, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех точек x этой окрестности, отличных от x_0, выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

Говорят также, что функция имеет в точке x_0 минимум [локальный минимум], равный $f(x_0)$.

Вместо терминов максимум или минимум [локальный максимум или локальный минимум] используют объединяющий термин - экстремум [локальный экстремум].

Определение 5. Точка x_0 называется критической точкой некоторой функции $y = f(x)$, если в ней производная функции равна нулю или не существует. В первом случае критическая точка называется еще стационарной.

Теорема 3 (необходимое условие существования локального экстремума). Для того, чтобы точка x_0 была точкой локального экстремума функции, необходимо, чтобы она была критической точкой этой функции.

Для отыскания критических точек функции нужно решить уравнение

$$f'(x) = 0,$$

а также найти точки разрыва производной $f'(x)$, принадлежащие области определения функции.

Теорема 4 (достаточное условие существования локального экстремума в критической точке). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале (a, b), содержащем одну критическую точку x_0. 1. Если на интервале (a, x_0) производная функции положительная, а на интервале (x_0, b) - отрицательная, то критическая точка x_0 является точкой локального максимума. 2. Если же на интервале (a, x_0) производная функции отрицательная, а на интервале (x_0, b) - положительная, то критическая точка x_0 является точкой локального минимума.

Справедливость теоремы следует из того, что, например, в случае 1 функция слева от точки x_0 возрастает, а справа - убывает.

Теорема 4 позволяет найти не только локальные экстремумы функции, но и интервалы ее монотонности.

Пример 8. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

$$y = f(x) = \frac{x^3}{8-x}.$$

Решение. Производная функции равна

$$f'(x) = \frac{(x^3)' \cdot (8-x) - x^3 \cdot (8-x)'}{(8-x)^2} = \frac{3x^2 \cdot (8-x) - x^3 \cdot (-1)}{(8-x)^2} = \frac{2x^2(12-x)}{(8-x)^2}.$$

В точках $x = 0, x = 12$ она равна нулю, а в точке $x = 8$ не существует. Точки $x = 0, x = 8, x = 12$ порождают четыре интервала $(-\infty, 0), (0, 8), (8, 12), (12, +\infty)$, на каждом из которых определяем знак производной.

$$\text{Для}\, x = -1 \in (-\infty, 0) \;\; f'(-1) = \frac{2(-1)^2(12-(-1))}{(8-(-1))^2} = \frac{2 \cdot 13}{9^2} > 0,\; f'(x) > 0 \text{ на } (-\infty, 0);$$

$$\text{для } x = 1 \in (0, 8) \;\; f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2(12-1)}{(8-1)^2} = \frac{2 \cdot 11}{7^2} > 0, \quad f'(x) > 0 \text{ на } (0, 8);$$

$$\text{для } x = 9 \in (8, 12) \;\; f'(9) = \frac{2 \cdot 9^2(12-9)}{(8-9)^2} = 2 \cdot 9^2 \cdot 3 > 0, \quad f'(x) > 0 \text{ на } (8, 12);$$

$$\text{для}\, x = 13 \in (12, \infty) \;\; f'(13) = \frac{2 \cdot 1^2(12-13)}{(8-13)^2} = -\frac{2}{5^2} < 0, \quad f'(x) < 0 \text{ на } (12, \infty).$$

Функция возрастает на каждом из интервалов $(-\infty, 0), (0, 8), (8, 12)$, а на интервале $(12, +\infty)$ убывает. В точке $x = 12$ она имеет локальный максимум, равный

$$f_{\max} = f(12) = \frac{12^3}{8-12} = -432 .$$

Пример 9. Найти координаты вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$.

Решение. Абсцисса вершины является точкой экстремума квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$. Поэтому она находится из уравнения $y' = 2ax + b = 0$, откуда $x = -\frac{b}{2a}$. Ордината вершины равна

$$y = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}$$

Таким образом, вершиной параболы является точка

$$A\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right),$$

где $D = b^2 - 4ac$ - дискриминант квадратного трёхчлена.

Пример 10. Исследовать функцию и построить её график $y = \sqrt[3]{x}(x-6)$.

Решение. 1. Функция определена для всех значений x, то есть областью её определения является множество всех вещественных чисел.

2. Функция обращается в нуль в точках $x = 0, x = 6$, которые порождают три интервала $(-\infty, 0), (0, 6), (6, \infty)$. На интервалах $(-\infty, 0), (6, \infty)$ она положительна, и её график лежит выше оси Ox. На интервале $(0, 6)$ она отрицательна, и её график лежит ниже оси Ox.

3. График функции пересекает ось Ox в двух точках $O(0; 0), A(6; 0)$.

4. Предел функции при $x \to \pm\infty$ равен $+\infty$. График функции неограниченно поднимается при $x \to \pm\infty$.

5. Производная функции равна

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' \cdot (x-6) + \sqrt[3]{x} \cdot (x-6)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-6) + \sqrt[3]{x} = \frac{4x-6}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

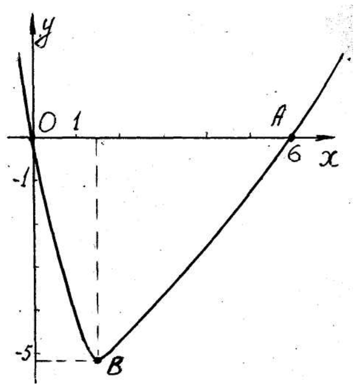

Рис. 1

Она обращается в нуль при $x = 3/2$, не существует при $x = 0$, и поэтому точки $x = 0, x = 3/2$ являются критическими точками функции. На интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, 3/2)$ производная отрицательная, и там функция убывает. На интервале $(3/2, \infty)$ производная положительная, и там функция возрастает. В точке $x = 3/2$ функция имеет локальный минимум, равный

$$y_{\min} = f(3/2) = -9/2\sqrt{3/2} \approx -5.15.$$

Ему соответствует точка графика $B\left(3/2; \frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

График функции изображён на рис. 1.

Наибольшее и наименьшее значения функции (абсолютные экстремумы)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке (замкнутом ограниченном интервале) $[a, b]$, то она принимает на нём свои наибольшее и наименьшее значения (так называемые абсолютные экстремумы). Это значит, что существует по крайней мере одна пара точек $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$ таких, что

$$f(x_1) = m = \min_{[a,\, b]} f(x), \quad f(x_2) = M = \max_{[a,\, b]} f(x).$$

Точки абсолютных экстремумов могут быть или внутренними критическими точками функции, или концами отрезка. Поэтому абсолютные экстремумы функции находятся следующим образом.

1. Ищут внутренние критические точки функции.

2. Вычисляют значения функции в этих точках, а также на концах отрезка.

3. Из найденных значений функции выбирают самое большее и самое меньшее.

Пример 11. Найти абсолютные экстремумы функции $y = \sqrt[3]{x}(x-6)$ на отрезке $[-1, 4]$.

Решение. В предыдущем примере мы уже нашли критические точки функции, а именно $x = 0,\ x = 3/2$. Обе они являются внутренними, то есть лежат на данном отрезке.

Находим значения функции в точках $x = -1,\ x = 0,\ x = 3/2,\ 4$. Имеем

$$f(0) = 0, f(3/2) = -9\sqrt[3]{3/2}\,/\,2 \approx -5.15, f(-1) = 7, f(4) = -2\sqrt[3]{4} \approx 3.17.$$

Следовательно,

$$m = \min_{[-1,\,4]} f(x) = f(3/2) = -9/2 \cdot \sqrt[3]{3/2} \approx -5.15, M = \max_{[-1,\,4]} f(x) = f(-1) = 7.$$

ДОПОЛНЕНИЯ

L'ensemble des nombers réels [l'ensemble des réels]

Il y a des nombres naturels, entiers, rationnels, irrationnels, réels, complexes.

L'ensemble

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

est celui de tous des nombres naturels. Le nombre 1 appartient à l'ensemble $\boldsymbol{N}$ ($1 \in \boldsymbol{N}$, 1 de $\boldsymbol{N}$), 1 est un nombre naturel. Le nombre 0 (zéro) n'appartient pas à l'ensemble $\boldsymbol{N}$ ($0 \notin \boldsymbol{N}$), 0 n'est pas un nombre naturel.

L'ensemble

$$\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \ldots\}$$

est celui de tous des nombres entiers [celui de tous des entiers]. Le nombre 0 appartient à l'ensemble $\boldsymbol{Z}$ ($0 \in \boldsymbol{Z}$, 0 de $\boldsymbol{Z}$), 0 est un nombre entier [est un entier]. L'ensemble de tous des nombres naturels $\boldsymbol{N}$ est contenu [est inclus] dans l'ensemble de tous des nombres entiers [dans l'ensemble de tous des entiers] $\boldsymbol{Z}$ [$\boldsymbol{N}$ est un sous-ensemble ou une partie de $\boldsymbol{Z}$], $\boldsymbol{N} \subset Z$.

Un nombre rationnel [un rationnel] est celui qui peut être représenté comme le rapport d'un entier à un nombre naturel: m/n, où $m \in Z, n \in N$ (m est un entier et n est un nombre naturel). L'ensemble $\boldsymbol{Q}$ de tous des nombres rationnels [de tous des rationnels] contient: 1) tous les nombres naturels; 2) tous les nombres entiers [tous les entiers]; 3) toutes les fractions ordinaires; 4) tous les nombres décimales limités; 5) tous les nombres décimales illimités périodiques. Par exemple les nombres 3, -5, 3/5, 0,236 = 236/1000, 0,222222...= 0,(2)=2/9 sont ceux rationnels (ils appartiennent à l'ensemble $\boldsymbol{Q}$).

Un nombre irrationnel [un irrationnel] est celui qui peut être représenté comme un nombre décimale illimité non périodique. Nous désignerons l'ensemble de tous des nombres irrationnels [de tous des irrationnels] par une lettre $\boldsymbol{I}$. Par exemple les nombres $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, π = 3,1415926…, le nombre d'Euler e = 2,718281828459045... sont ceux irrationnels (ils appartiennent à l'ensemble $\boldsymbol{I}$).

Tous les nombres rationnels et irrationnels [tous les rationnels et irrationnels] forment l'ensemble de tous des nombres réels [l'ensemble de tous des réels] ***R***. ***R*** est l'union [est la réunion] des ensembles ***Q*** et ***I***, c'est-à-dire $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$.

Représentation géométrique des nombres réels [des réels]

On peut représenter les nombres réels [les réels] par des points d'un axe numérique [d'un axe de coordonnées].

Un axe numérique [un axe de coordonnées] on nomme une ligne droite infinite sur laquelle on a choisi: 1) un point certain O (l'origine); 2) une direction positive qui est indiquée par l'aiguille; 3) une unité de mesure.

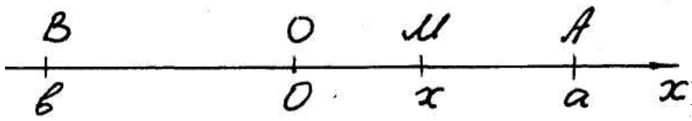

Fig. 1

A chaque nombre réel x correspond un point bien défini de l'axe numérique notamment un point M de coordonnée x. La réciproque est vraie: à chaque point de l'axe numérique correspond un nombre réel bien défini notamment sa coordonnée. Si un nombre a est positive ($a > 0$) il est représenté par un point A à droite du point O. Un nombre négatif b ($b < 0$) est représenté par un point B à gauche du point O. Le point O représente le nomber zéro [nul]. Dans la fig.1 $a = |OA|$, $b = -|OB|$, où $|OA|, |OB|$ sont respectivement les distances de l'origine O aux points A et B.

Intervalles numériques

Désignons par

$$\{ x \mid P(x) \}, \text{ or } \{x : P(x)\}$$

l'ensemble de tous des nombres réels [de tous des réels] x qui possèdent la propriété $P(x)$.

Par exemple,

$R_+ = \{x \mid x \geq 0\} \equiv \{x : x \geq 0\}$ l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas négatifs;

$R_+^* = \{x \mid x > 0\} \equiv \{x : x > 0\}$ l'ensemble des nombres réels positives;

$R_- = \{x \mid x \leq 0\} \equiv \{x : x \leq 0\}$ l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas positifs;

$R_-^* = \{x \mid x < 0\} \equiv \{x : x < 0\}$ l'ensemble des nombres réels négatifs.

Intervalles bornés

$[\, a, b] = \{\, x \mid a \le x \le b \,\} \equiv \{\, x : a \le x \le b \,\}$ un segment [un intervalle fermé borné], c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas inférieurs que a et ne sont pas supérieurs à b;

$(\, a, b\,) \equiv \,]\, a, b\, [= \{\, x \mid a < x < b \,\} \equiv \{\, x : a < x < b \,\}$ un intervalle [un intervalle fermé ouvert], c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels qui sont supérieurs à a et inférieurs que b;

$[\, a, b\,) \equiv [a, b\,[\, = \{x \mid a \le x < b\,\}$, $(\, a, b\,] \equiv \,]\, a, b\,] = \{x \mid a < x \le b)$ des intervalle bornés semi-ouverts [ou semi-fermés].

Les points a et b de ces intervalles on nomme leurs bornes, a est la borne gauche et b la borne droite.

Intervalles infinis

$(-\infty, a) = \{\, x : x < a\}$; $(-\infty, a\,] = \{\, x : x \le a\}$;

$(\, a, \infty\,) = \{x \mid x > a\,\}$; $[\, a, \infty\,) = \{x \mid x \ge a\,\}$;

$R_+ = [\,0, \infty)$, $R_- = (-\infty, 0]$, $R_+^* = (0, \infty)$, $R_-^* = (-\infty, 0)$; on peut représenter l'ensemble des nombres réels [l'ensemble des réels] par un intervalle, notamment $\boldsymbol{R}$ = = $(-\infty, \infty)$.

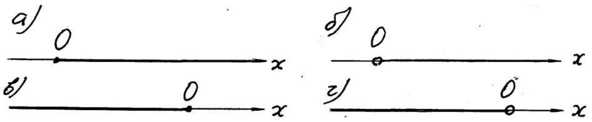

Fig. 2

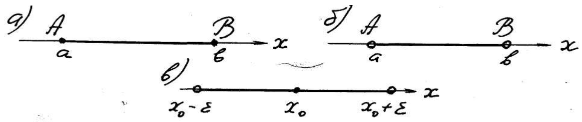

Fig. 3

Aux intervalles numériques sont associés des intervalles sur l'axe numériques [sur l'axe de coordonnées]. Par exemple aux ensembles R_+, R_+^*, R_-, R_-^* sont correspondus les rayons sur l'axe qui partons de l'origine O y compris ou non compris O. Le segment $[a, b]$ est représenté sur l'axe numérique par le segment AB, où A est le point de coordonnée a et B de coordonnée b; l'intervalle ouvert (a, b) est représenté par le même segment AB sans les bornes A,B (fig. 3). L'intervalle $(x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon)$ de longeur 2ε centré au point x_0 on nomme ε-voisinage du point (fig. 3).

The set of real numbers [the set of reals]

There are natural, integer, rational, irrational, real, complex numbers.

The set

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

is that of all natural numbers [the set of all naturals]. The number 1 belongs to the set $\boldsymbol{N}$ ($1 \in \boldsymbol{N}$, 1 of $\boldsymbol{N}$), 1 is a natural number. The number 0 (zero) doesn't belong to $\boldsymbol{N}$ ($0 \notin \boldsymbol{N}$), 0 isn't a natural number.

The set

$$\boldsymbol{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \ldots\}$$

is that of all integer numbers [the set of all integers]. The number 0 belongs to the set $\boldsymbol{Z}$ ($0 \in \boldsymbol{Z}$, 0 of $\boldsymbol{Z}$), 0 is an integer number [is an integer]. The set of all natural numbers [the set of all naturals] is the part [so called subset] of the set of all integer numbers [the subset of all integers], $\boldsymbol{N} \subset Z$.

A rational number [a rational] is called a number, which can be represented as a ratio of an integer to a natural: m/n, where $m \in Z, n \in N$ (m is an integer number, and n is that natural). The set $\boldsymbol{Q}$ of all rational numbers [of all rationals] contains: 1) all naturals; 2) all integers; 3) all simple [common] fractions; 4) all terminating decimal fractions; 5) all non-terminating periodic decimal fractions. For example, numbers 3, -5, 3/5, 0.236 = 236/1000, 0.222222...= 0.(2)=2/9 are those rational (they belong to the set $\boldsymbol{Q}$).

An irrational number [an irrational] is called a number, which can be represented in the form of a non-terminating non-periodic decimal fractions. We'll denote the set of all irrational numbers [the set of all irrationals] by a letter $\boldsymbol{I}$. For example, numbers $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, π = 3.1415926…, Euler's number e = 2.718281828459045... are those irrational [are irrationals], they belong to $\boldsymbol{I}$.

All rational and irrational numbers form the set $\boldsymbol{R}$ of all real numbers [the set $\boldsymbol{R}$ of all reals]. It's a union of the sets $\boldsymbol{Q}$ and $\boldsymbol{I}$, that is $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$.

Geometrical representation of real numbers [of reals]

One can represent real numbers by points of a number axis [number scale, number line, coordinate line, coordinate axis].

A number axis is called an infinite straight line on which are chosen: 1) a certain point O (the origin); 2) the positive direction indicated by an arrow; 3) the unit of measurement [of length].

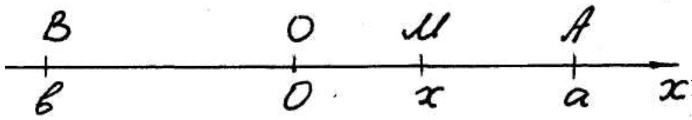

Fig. 1

To each real number x there corresponds quite definite point of the number axis that is the point M with the coordinate x. Inversely, to each point of the number axis there corresponds quite definite real number namely its coordinate. If a number a is positive one ($a > 0$), it's represented by a point A to the right of the origin O. A negative number b ($b < 0$) is represented by a point B to the left of O. The point O represents the number zero. On the fig.1 $a = |OA|$, $b = -|OB|$, where $|OA|$, $|OB|$ be correspondingly the distances of the point O to the points A и B (fig. 1).

Number intervals

Let's denote by

$$\{ x \mid P(x) \}, \text{ or } \{x : P(x)\}$$

a set of all reals x which posses a property $P(x)$.

For example,

$R_+ = \{x | x \geq 0\} \equiv \{x : x \geq 0\}$ the set of all non-negative numbers;

$R_+^* = \{x | x > 0\} \equiv \{x : x > 0\}$ the set of all positive numbers;

$R_- = \{x | x \leq 0\} \equiv \{x : x \leq 0\}$ the set of all non-positive numbers;

$R_-^* = \{x | x < 0\} \equiv \{x : x < 0\}$ the set of all negative numbers.

Bounded intervals

$[\,a, b] = \{\, x \mid a \le x \le b \,\} \equiv \{\, x : a \le x \le b \,\}$ a segment [a closed bounded interval], that is the set of all reals which are no less then a and no greater then b;

$(\, a,\ b\,) \equiv \,]\, a,\ b\,[= \{\, x \mid a < x < b \,\} \equiv \{\, x : a < x < b \,\}$ an interval [an open bounded interval], that is the set of all reals which are greater then a and less then b;

$[\, a, b\,) \equiv [a, b\,[\, = \{x \mid a \le x < b\,\}$, $(\, a, b\,] \equiv \,]\, a, b\,] = \{x \mid a < x \le b)$ semi-open [or semi-closed] bounded intervals.

The points a and b of these intervals are called their endpoints, a is the left endpoint, b is that right.

Unbounded intervals

$(-\infty, a) = \{\, x : x < a\}$; $(-\infty, a\,] = \{\, x : x \le a\}$;

$(\, a, \infty\,) = \{x \mid x > a\,\}$; $[\, a, \infty\,) = \{x \mid x \ge a\,\}$;

$R_+ = [\,0, \infty)$, $R_- = (-\infty, 0]$, $R_+^* = (0, \infty)$, $R_-^* = (-\infty, 0)$; the set of reals can be represented as an interval, namely $\boldsymbol{R} = (-\infty, \infty)$.

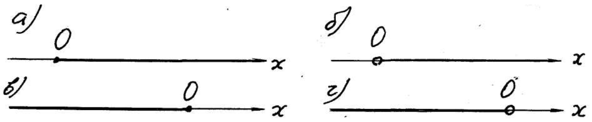

Fig. 2

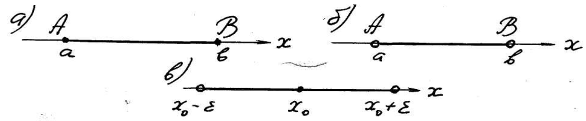

Fig. 3

To numerical intervals there correspond intervals on the number axis. For example to the sets R_+, R_+^*, R_-, R_-^* there correspond the rays on the axis starting from the origin, with or without the origin (fig. 2); a segment [a, b] is represented by a segment AB, where A is the point with the coordinate a, and B is the point with the coordinate b; an open interval (a, b) is represented by the same segment AB but without the endpoints A, B (fig. 3).

An interval containing a point x_0 is called a neighbourhood of this point. The interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ of the length 2ε centered at the point x_0 is called the ε-neighbourhood of the point; it's represented on the fig. 3.

Equations irrationnelles

Soit il faut résoudre une équation irrationnelle

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=e \tag{9}$$

à condition nécessaire

$$\begin{cases} ax+b \geq 0, \\ cx+d \geq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Donnons un plan exemplaire de solution du problème.

1. Transposons [transportons, transférons, portons, faisons passer] la seconde racine [la deuxième racine, le second radical, le deuxième radical] de gauche à droite

$$\sqrt{ax+b}=e-\sqrt{cx+d}\ . \tag{11}$$

2. Elevons deux membres de l'équation trouvée (11) au carré. On obtient

$$ax+b=e^2-2e\sqrt{cx+d}+cx+d. \tag{12}$$

3. Transportons ~~la racine~~ [le radical] de droite à gauche et transférons les termes du premier membre de l'équation (12) de gauche à droite

$$2e\sqrt{cx+d}=e^2+cx+d-ax-b\,. \tag{13}$$

4. Réduisons les termes semblables au deuxième membre et obtenons l'équation de la forme suivante :

$$2e\sqrt{cx+d}=fx+g\,, \tag{14}$$

où f, g sont quelques nombres.

Si $e>0$ nous devons complémentairement demander l'inéquation

$$fx+g \geq 0; \tag{15 a}$$

dans le cas $e<0$ il faut exiger l'inéquation contraire

$$fx+g \leq 0. \tag{15 б}$$

5. Divisons deux membres de l'équation (14) par un facteur commun s'il existe en recevant l'équation plus simple de la forme

$$h\sqrt{cx+d}=kx+l, \tag{16}$$

où h, k, l sont quelques nombres.

6. Elevons encore deux membres de l'équation (16) au carré pour se délivrer à la racine [au radical],

$$h^2(cx+d)=k^2x^2+2klx+l^2. \qquad (17)$$

7. Nous nous débarrassons [nous chassons, nous ouvrons] les parenthèses dans le premier membre de l’équation (17) et nous portons tous les termes du deuxième membre à gauche

$$h^2cx+h^2d-k^2x^2-2klx-l^2=0.$$

En réduisant les termes semblables nous obtenons l'équation suivante

$$Ax^2+Bx+C=0. \qquad (18)$$

qui est l'équation du second degré (l'équation quadratique) si A est différent de [est inégal à, n’égal pas à] zéro et celle linéaire au cas contraire.

8. Résolvons l’équation (18). Soit par exemple elle du second degré (elle quadratique) et son discriminant positif. Dans ce cas nous avons deux racines x_1, x_2.

9. Maintenant il faut faire [remplir, exécuter, effectuer] la vérification [la preuve], c'est-à-dire de vérifier si les racines de l'équation (18) sont les racines [les solutions] de l'équation donnée (9) , et rejeter des racines étrangères. Pour cela on doit consécutivement mettre [placer, substituer] les valeurs trouvées de x [substituer l’inconnue x par les valeurs trouvées de x] à l'équation donnée. La valeur de x pour laquelle l'équation (9) se convertit [se transforme, se change] à l'égalité exacte [juste] est la racine de l'équation donnée.

10. Pour conclure [en dernier lieu, en résumé] il faut donner [écrire] la réponse [la solution].

Irrational equations

Let's suppose that it is required [it is necessary] to solve an irrational equation

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=e \qquad (9)$$

under the necessary condition

$$\begin{cases} ax+b\geq 0, \\ cx+d\geq 0. \end{cases} \qquad (10)$$

We'll give an approximate plan of solution [of solving] the problem.

1. We transpose the second root [radical] from the left to the right [to the right-hand member [side] of the equation],

$$\sqrt{ax+b}=e-\sqrt{cx+d}\,. \qquad (11)$$

2. Squaring both members of the equation (11) we get

$$ax+b=e^2-2e\sqrt{cx+d}+cx+d\,. \qquad (12)$$

3. We transpose the radical to the left and all terms of the first member of the equation (12) to the right

$$2e\sqrt{cx+d}=e^2+cx+d-ax-b\,. \qquad (13)$$

4. Let's collect [unite, group] like [similar] terms in the second [right-hand] member of the equation (13).We'll obtain the equation of the next form

$$2e\sqrt{cx+d}=fx+g\,, \qquad (14)$$

where f, g be some numbers.

If $e>0$, we must require the accessory [additional] condition

$$fx+g\geq 0; \qquad (15\text{ a})$$

if $e<0$, it's needed to require the opposite inequality

$$fx+g\leq 0. \qquad (15\text{ б})$$

5. Dividing both members of the equation (14) by a common factor if it exists yields the equation of more simple form

$$h\sqrt{cx+d}=kx+l\,, \qquad (16)$$

where h, k, l are some numbers.

6. Let's square again both sides of the equation (16) to remove the radical,

$$h^2(cx+d)=k^2x^2+2klx+l^2. \qquad (17)$$

7. We open the parentheses in the left-hand member of the equation (17) and transpose all terms of its right-hand member to the left (with opposite signs)

$$h^2cx+h^2d-k^2x^2-2klx-l^2=0.$$

Collecting [uniting, grouping] the like [similar] terms on the left we obtain the next equation

$$Ax^2+Bx+C=0. \qquad (18)$$

which is a quadratic one if A is not zero and a linear one otherwise.

8. We solve the equation (18). For example let it be a quadratic one and has a positive discriminant. In this case it possesses two different roots x_1, x_2.

9. Now it's required [it's necessary] to make [do, fulfill, implement, carry out, accomplish] a check [verification, test(ing)] that is to verify if [whether] the roots of the quadratic equation (18) are the roots [solutions] of the given equation (9) and to throw [throw off, reject, discard] extraneous [outside, strange, foreign, irrelevant] roots. For this purpose one must substitute sequentially the found values of x into the equation (9) [substitute the unknown [the variable] x by the obtained values of x in the given equation]. The value of x which turns [changes, transforms] the equation (9) into correct [right, accurate, precise, exact] equality is the root [the solution] of the given equation.

10. As a result [conclusion, summary, resume] it's required [it's necessary] to give [to write] an answer.

Exemple de solution d'une equation logarithmique

Résoudre l'équation logarithmique

$$x^{\log_4 x-2}=2^{3(\log_4 x-1)}.$$

Prenons le logarithme dans la base 4 de deux membres de l'équation,

$$\log_4 x^{\log_4 x-2}=\log_4 2^{3(\log_4 x-1)}.$$

En utilisant la propriété de logarithme d'une puissance nous multiplions les indices des puissances par les logarithmes des bases des puissances, d'où

$$(\log_4 x-2)\log_4 x=3(\log_4 x-1)\log_4 2.$$

Etant donné [en prenant en considération, en considérant]

$$\log_4 2=\log_4\sqrt{4}=\frac{1}{2}\log_4 4=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

nous multiplions deux membres de l'éqttation par 2 et nous trouverons

$$2(\log_4 x-2)\log_4 x=3(\log_4 x-1).$$

Introduisons l'inconnue nouvelle/auxiliaire en prenant

$$y=\log_4 x.$$

On aura l'équation suivante

$$2y(y-2)=3(y-1).$$

Transposons son second membre de droite à gauche, ouvrons les parenthèses et réduisons les termes semblables. Nous obtenirons l'équation du second degré [l'équation quadratique]

$$2y^2-7y+3=0.$$

Elle n'est pas celle réduite donc nous résolvons la à l'aide de la formule générale des racines de l'équation quadratique. Son discriminant égale $25 = 5^2$, ses racines sont

$$y_1=\frac{1}{2},\ y_2=3$$

Revenons à l'inconnue initiale x. Nous avons deux cas:

a) $\log_4 x=\frac{1}{2}$, d'ou $x_1=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$; b) $\log_4 x=3$, d'ou $x_2=4^3=64$.

Maintenant il faut faire la vérifîcation, c'est-a-dire de verifier si les valeurs cherchées de x sont les racines de l'équation donnée.

a) Testons la valeur $x_1 = 2$. En substituant 2 dans le membre gauche de l'équation, nous avons

$$x^{\log_4 x-2} = 2^{\log_4 2-2} = 2^{\frac{1}{2}-2} = 2^{-\frac{3}{2}}.$$

En substituant 2 dans le membre droite de l'équation, nous trouvons

$$2^{3(\log_4 x-1)} = 2^{3(\log_4 2-1)} = 2^{3\left(\frac{1}{2}-1\right)} = 2^{3\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2^{-\frac{3}{2}}.$$

Ainsi, $2^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}}$. Cela signifie que le nombre $x_1 = 2$ satisfait l'équation donnée et il est donc sa racine.

b) Vérifions la valeur $x_2 = 64$. En substituant 64 dans le membre gauche de l'équation, nous avons

$$x^{\log_4 x-2} = 64^{\log_4 64-2} == 64^{3-2} = 64.$$

En substituant 64 dans le membre droite de l'équation, nous trouvons

$$2^{3(\log_4 x-1)} = 2^{3(\log_4 64-1)} = 2^{3(3-1)} = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64.$$

Ainsi, $64 = 64$, le nombre $x_2 = 64$ satisfait aussi l'équation donnée, et il est donc sa racine.

Réponcse: $x_1 = 2$, $x_2 = 64$.

Example of solving of a logarithmic equation

Solve the logarithmic equation

$$x^{\log_4 x-2} = 2^{3(\log_4 x-1)}.$$

We take the logarithm to the base 4 both of left and right sides [members] of the equation,

$$\log_4 x^{\log_4 x-2} = \log_4 2^{3(\log_4 x-1)}.$$

Using the property of a logarithm of a power we multiply the indeces of the powers by the logarithms of the bases of the powers, whence

$$(\log_4 x-2)\log_4 x = 3(\log_4 x-1)\log_4 2.$$

Taking into account that

$$\log_4 2 = \log_4 \sqrt{4} = \frac{1}{2}\log_4 4 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2},$$

we multiply both sides of the equation by 2 and we'll get

$$2(\log_4 x-2)\log_4 x = 3(\log_4 x-1).$$

Let's introduce the new [auxiliary] unknown setting

$$y = \log_4 x.$$

We'll obtain the equation:

$$2y(y-2) = 3(y-1).$$

Let's transpose its second member from the right to the left, open the parentheses and collect similar terms. We'll get the quadratic equation

$$2y^2 - 7y + 3 = 0.$$

It isn't that reduced, therefore we solve it by means of the general quadratic formula. Its discriminant equals $25 = 5^2$ and its roots are

$$y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = 3$$

Let us return to the initial unknown *x*. We have two cases:

a) $\log_4 x = \frac{1}{2}$, whence $x_1 = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$; b) $\log_4 x = 3$, whence $x_2 = 4^3 = 64$.

Now it is required to fulfil the verification that is to verify whether the found values of x are the roots of the given equation (and to throw off by necessity extraneous roots).

a) We check the value $x_1 = 2$. Substituting 2 in the left side of the equation we have

$$x^{\log_4 x-2} = 2^{\log_4 2-2} = 2^{\frac{1}{2}-2} = 2^{-\frac{3}{2}}.$$

Substitution of 2 in the right side of the equation gives

$$2^{3(\log_4 x-1)} = 2^{3(\log_4 2-1)} = 2^{3\left(\frac{1}{2}-1\right)} = 2^{3\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2^{-\frac{3}{2}}.$$

Thus, $2^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}}$. It means that the number $x_1 = 2$ satisfies the given equation, and therefore it is its root.

b) Now we test the value $x_2 = 64$. If we substitute 64 in the left side of the equation we'll obtain

$$x^{\log_4 x-2} = 64^{\log_4 64-2} == 64^{3-2} = 64.$$

Substituting 64 in the right side of the equation we'll get

$$2^{3(\log_4 x-1)} = 2^{3(\log_4 64-1)} = 2^{3(3-1)} = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64.$$

Thus, $64 = 64$, the number $x_2 = 64$ also satisfies the given equation, hence it's its root.

Answer: $x_1 = 2$, $x_2 = 64$.

Noms français des identites fondamentales trigonometriques

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

2. Формулы сложения

3. Формулы двойного аргумента

4. Формулы половинного аргументта

5. Формулы понижения степени

6. Формулы преобразования суммы/разности двух (ко)синусов в произведение

7. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму

8. Формулы приведения.

Функции от

$$\pi \pm x$$

не изменяют назвавний. Функции от

$$\frac{\pi}{2} \pm x, \frac{3\pi}{2} \pm x$$

изменяются на кофункции.

Знак + или – справа определяется знаком функции слева, если считать угол x острым.

1. Relations entre fonctions trigonometriques de meme argument

2. Formules d'addition

3. Formules de double argument

4. Formules de la moitié d'argument

5. Formules d'abaissement d'une puissance

6. Formules de transformation d'une somme/difference de (co)sinus en produit

7. Formules de transformation d'un produit de fonctions trigonometriques en somme algebrique

8. Formules relatives aux angles associes

Fonctions de

$$\pi \pm x$$

ne changent pas leurs noms. Fonctions de

$$\frac{\pi}{2} \pm x, \frac{3\pi}{2} \pm x$$

changent en cofonctions.

Le singe + ou – à droite est déterminé par le signe d'une fonction à gauche s'on suppose l'anlge x comme celui aigu.

English names of the fundamental trigonometrical identities

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

1. Relations between trigonometrical functions of the same argument

2. Формулы сложения

2. Addition formulas

3. Формулы двойного аргумента

3. Double-argument formulae

4. Формулы половинного аргументта

4. Half-argument formulas

5. Формулы понижения степени

5. Power reduction formulae.

6. Формулы преобразования суммы/разности двух (ко)синусов в произведение

6. Trànsformátion fórmulas of a sum/dífference of (có)sines (ín)to a product

7. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму

7. Trànsformátion fórmulae of a próduct of trigonométric fúnctions (in)to an àlgebráical sum; próduct formulas

8. Формулы приведения.

8. Reduction formulas.

1) Функции от

$$\pi \pm x$$

не изменяют назвавний. Функции от

$$\frac{\pi}{2} \pm x, \frac{3\pi}{2} \pm x$$

изменяются на кофункции.

1) Functions of

$$\pi \pm x$$

doesn’t change their names. Functions of

$$\frac{\pi}{2} \pm x, \frac{3\pi}{2} \pm x$$

are changed by cofunctions.

2) Знак + или – справа определяется знаком функции слева, если считать угол x острым.

2) The sign + or – to the right is defined by the sign of the function to the left if one supposes the angle x as acute one.

ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ

МНОЖЕСТВО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

1. Абсолютная величина числа	Valeur *f* absolue [module *m*] d'un nombre	Ábsolute válue [módulus] of a númber
2. Бесконечная десятичная дробь (периодическая, непериодическая)	Nombre *m* décimal illimité/infini (périodique, non périodique)	Nòntérminàting (pèriódic, nòn-pèriódic) décimal/póint fráction
3. Быть эквивалентным [равносильным] *чему*	Equivaloir (il équivaut, ils équivalent) [être équivalent(e)] *à qch*	Be equívalent to *smth*
4. Быть элементом множества ($x \in X$, x (малое) является элементом множества X (большого); $x \notin X$, x не является элементом множества X)	Etre un élément d'un ensemble ($x \in X$, petit x est un élément de grand X; $x \notin X$, x n'est pas un élément de X)	Be an élément of a set ($x \in X$, small x is an élement of a set cápital X; $x \notin X$, x isn`t an élement of X)
5. Вещественное число	Nombre *m* réel, réel *m*	Réal númber
6. Взаимно однозначное соответствие (между множеством всех вещественных чисел и множеством всех точек числовой/координатной оси)	Correspondance *f* biunivoque [réciprocité *f* univoque] entre l'ensemble *m* des réels et l'ensemble de tous les points de l'axe numérique [de l'axe de coordonnées]	One-to-one còrrespóndence [bijection] (betwéen the set of all réal númbers and the set of all póints of the númber/coórdinate áxis)
7. Десятичная дробь	Nombre *m* décimal	Décimal/póint fráction
8. Единица длины/измерения	Unité *f* de longueur *f* [de mesure]	Únit of length, únit of measurement
9. Интервал (открытый ограниченный интервал) $(a, b) \equiv \,]\, a, b\, [$	Intervalle *m* (intervalle ouvert borné) $(a, b) \equiv \,]\, a, b\, [$ (« ouvert *ab* »)	Ínterval (bóunded ópen ínterval) $(a, b) \equiv \,]\, a, b\, [$
10. Интервал, симметричный относительно точки	Intervalle *m* symétrique par rapport à un point (au point)	Symmétric ínterval with respéct to a póint
11. Иррациональное число	Nombre m irrationnel	Irrátional númber
12. Конец интервала (левый/правый)	Borne *f* [extrémité *f*] (gauche/droite) d'un intervalle	(Left(-hand)/right(-hand)) end/endpoint of an ínterval
13. Конечная десятичная	Nombre *m* décimal limité/	Términating décimal/póint

дробь	fini	fráction
14.Координата точки	Coordonnée *f* d'un point	Coórdinate of a point
15.Координатная ось	Axe *m* de coordonnées	Coórdinate áxis
16.Множество	Ensemble *m*	Set
17.Множество всех вещественных чисел	L'ensemble *m* des réels [de tous les nombres réels]	Set of all réal númbers
18.Множество, обладающее некоторым свойством	Ensemble *m* ayant/possédant une propriété (certaine)	Set háving/posséssing (certain) próperty
19.Модуль числа	Module *m* d'un nombre	Módulus (*pl* móduli) of a númber
20.Натуральное число	Nombre *m* naturel, (entier) naturel *m*	Nátural númber
21.Начало координат	Origine *f* des coordonnées	Órigin (of coordinates)
22.Нечетное число	Nombre *m* impair	Odd númber
23.Обратное число	Nombre *m* inverse	Ìnvérse (of a) númber
24.Объединение (сумма) множеств	(Ré)union *f* (somme *f*)d'ensembles [des ensembles]	Únion (sum) of (the) sets
25.Обыкновенная дробь	Fraction *f* ordinaire	Cómmon/símple fráction
26.Окрестность точки	Voisinage *m* d'un point	Néighbourhood of a póint
27.Отрезок/сегмент (замкнутый ограниченный интервал) [*a*, *b*]	Segment *m* (intervalle *m* fermé borné) [*a*, *b*] (« fermé *a b* »)	Ségment (bóunded clósed ínterval) [*a*, *b*]
28.Отрицательное число	Nombre *m* négatif	Négative númber
29.Пересечение (произведение) множеств	Intersection *f* (produit *m*) d'ensembles [des ensembles]	Ìntersé́ction (próduct, còmposítion) of (the) sets
30.По модулю	En module [modulo (*lat*)]	In módulus [módulo (*lat*)]
31.Подмножество множества	Sous-ensemble *m* d'un ensemble	Súbsèt of a set
32.Положительное направление	Direction *f* positive	Pósitive diréction
33.Положительное число	Nombre *m* positif	Pósitive númber
34.Представляться, быть представленным (в виде)	Se représenter, être représenté (sous la forme)	Be rèpresénted (in the form)
35.Принадлежать множеству.	Appartenir (il appartiens, ils appartiennent) à un ensemble	Belóng to [be contáined in] a set
36.Противоположное чи-	Nombre *m* opposé	Ópposite númber

сло		
37.Противоположный знак/смысл	Signe *m*/sens [sã:s] *m* opposé	Ópposite/ìnvérse/cóntrary sign/sense
38.Прямая (линия)	Ligne *f* droite, droite *f*	Stráight líne
39.Пустое множество	Ensemble *m* vide	Émpty set
40.Рациональное число	Nombre *m* rationnel, rationnel *m*	Rátional number, rátional
41.Смысл неравенства	Sens *m* d'une inégalité [sã :s]	Sense/méaning/signíficance of an ìnequálity
42.Содержать *что-либо*. Множество Y содержит множество X, $Y \supseteq X$	Contenir (il contient, ils contiennent) [inclure (il inclut, ils incluent)] *qch*. L'ensemble Y contient/inclut l'ensemble X, $Y \supseteq X$. Y contient X	Inclúde/contáin *smth*. Thé set Y inclúdes/contáins the set X, $Y \supseteq X$
43.Содержаться во множестве (о множестве).	Etre inclu(e)/contenu(e) dans un ensemble (sur un ensemble).	Be inclúded/contáined in a set.
44.Соответствовать вещественному числу (о точке числовой оси)	Correspondre (il correspond, ils correspondent) à un nombre réel (sur un point d'axe numérique)	Còrrespónd to a réal númber (of a póint of the number/numérical áxis)
45.Соответствовать точке числовой оси (о вещественном числе)	Correspondre (il correspond, ils correspondent) à un point d'axe numérique (sur un nombre réel)	Còrrespónd to a póint of the númber/numérical áxis (of a réal númber)
46.Ставить в соответствие каждому вещественному числу вполне определённую точку числовой оси	Associer (faire correspondre) un point bien défini de l'axe numérique à chaque nombre réel	Assígn/assóciate quite définite póint of the númber/numérical áxis to éach réal númber
47.Стрелка	Aiguille *f*, flèche *f*	Árrow
48.Целое число	Nombre *m* entier, entier *m*	Ínteger/entíre (númber)
49.Чётное число	Nombre *m* pair	Éven númber
50.Числовая ось	Axe *m* numérique	Númber/numérical áxis
51.Эквивалентное/равносильное неравенство	Inégalité *f* équivalente	Equívalent ìnequálity
52.Элемент множества	Elément *m* d'un ensemble	Élement of a set
53.Эпсилон-окрестность [ε-окрестность] точки	ε-voisinage *m* d'un point	ε-néighbourhood of a póint

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

1. *a* относится к *b*, как *c* (относится) к *d*	*a* est à *b* ce que *c* est à *d*	*a* (is) to *b* as *c* (is) to *d*, *a* to *b* is as *c* to *d*
2. *a*, делённое на *b*	*a* divisé par *b*	*a* divíded by *b*
3. *a*, умноженное на *b*	*a* multiplié par *b*	*a* múltiplied by *b*
4. Арифметическое действие	Opération *f* arithmétique	Àrithmétical òperátion
5. Вычесть [отнять] *b* из *a*	См.: Отнять	
6. Вычитаемое	Nombre *m* à soustraire, le (plus) petit nombre	Súbtrahend
7. Вычитание	Soustraction *f*	Subtráction
8. Деление	Division *f*	Divísion
9. Делимое	Dividende *m*	Dívidend
10. Делитель	Diviseur *m*	Divísor
11. Дробь	Fraction *f*	Fráction
12. Знаменатель	Dénominateur *m*	Denóminator
13. Коэффициент пропорциона-льности	Coefficient *m* [facteur *m*] de pro-portionnalité	Propòrtionálity còefficient, fáctor [cónstant] of propòrtionálity
14. Крайний член пропорции	Terme *m* extrême d'une propor-tion	Extréme (term) of a propórtion
15. Кратное	Multiple *m*	Múltiple
16. Минус	Moins *m*	Mínus
17. Наименьшее общее кра-тное	Le plus petit commun multiple	Léast cómmon múltiple
18. Наибольший общий дели-тель	Le plus grand commun diviseur	Gréatest cómmon divísor, g.c.d.
19. Наименьший общий знаменатель	Le plus petit commun dénomina-teur	Léast cómmon denóminator
20. Нечётное число	Nombre *m* impair	Odd [únéven] númber
21. Обратная пропорциональность	Proportionnalité *f* inverse	Ìnvérse propòrtionálity
22. Обратно пропорциона-льно	Inversment proportionnellement	Ìnvérsely propórtional (to), in ìn-vérse propórtion (to)
23. Обратно пропорциона-льные величины	Grandeurs *f pl* inversment pro-portionnelles	Ìnvérsely propórtional mágnitu-des [quántities]
24. Обратно пропорциона-льный	Inversment proportionnel,-le	Ìnvérsely propórtional

25.Обыкновенная дробь	Fraction *f* ordinaire	Cómmon [simple] fráction
26.Общее кратное	Multiple *m* commun	Cómmon múltiple
27.Общий делитель	Diviseur *m* commun	Cómmon divísor
28.Общий знаменатель	Dénominateur *m* commun	Cómmon denóminator
29.Операнд (действия)	Opérande *f* (d'une opé-ration)	Óperand (of an operátion)
30.Основное свойство дроби, пропорции	Propriété *f* principale d'une frac-tion, d'une proportion	Básic [main, príncipal] próperty of a fráction, of a propórtion
31.Отношение	Rapport *m*	Rátio
32.Отнять [вычесть] *b* из *a*	Soustraire [ôter] (*b* de *a*)	Subtráct [táke] (*b* from *a*)
33.Плюс	Plus *m* [-ys]	Plus
34.Прибавить, сложить	Ajouter, additioner, faire une ad-dition	Add
35.Приведение дробей к общему знаменателю	Réduction *f* de fractions au même dénominateur, au dénominateur commun	Redúction of fractions to the cómmon/sáme denóminator
36.Привести дроби к об-щему знаменателю	Réduire (je réduis, n. réduisons) des fractions au même dénomina-teur, au dénominateur commun	Redúce fractions to the cómmon/ sáme denómina-tor
37.Произведение	Produit *m*	Próduct
38.Производная пропор-ция	Proportion *f* dérivée	Propórtion (derívеd) by addítion [by (addítion and) subtráction]
39.Пропорция	Proportion *f*	Propórtion, rátio
40.Пропорционально	Proportionnellement	Propórtionally, in propór-tion (to)
41.Пропорциональность	Proportionnalité *f*	Propòrtionálity
42.Пропорциональный	Proportionnel, -le	Propórtional
43.Прямая пропорцио-наль-ность	Proportionnalité *f* directe	Diréct propòrtionálity
44.Прямо пропорцио-нально	Directement proportionnellement	Diréctly propórtional to, in (di-réct) propórtion (to)
45.Прямо пропорцио-нальные величины	Grandeurs *f pl* directement pro-portionnelles	Diréctly propórtional mágnitu-des [quántities]
46.Прямо пропорцио-нальный	Directement proportionnel, -le	Diréctly propórtional

47.Разделить (*a* на *b*)	Diviser (*a* par *b*)	Divíde (*a* by *b*)
48.Разность	Différence *f*	Dífference
49.Результат (действия)	Résultat *m* (d'une opé-ration)	Resúlt (of an operátion)
50.Слагаемое	Terme *m* (d'une addition), nom-bre *m* à ajouter/additioner	Súmmand
51.Сложение, прибавле-ние	Addition *f*	Addítion
52.Сложить, прибавить	См.: прибавить	
53.Сократить дробь (на *a*)	Simplifier [réduire (je réduis, n. réduisons)] une fraction (par *a*)	Redúce a fráction (by *a*, cáncel *a* out of a fráction)
54.Сокращение дроби	Simpification *f* [réduction *f*] d'une fraction	Redúction [càncellátion] of a fráction
55.Сомножитель	Facteur *m*, multiplicateur *m*	Fáctor
56.Средний член про-порции	Terme *m* moyen d'une proportion	Méan (term) of a propór-tion
57.Сумма	Somme *f* (*a*+*b* font *c*)	Sum
58.Уменьшаемое	Premier [le (plus) grand] nombre	Mínuend
59.Умножение	Multiplication *f*	Mùltiplicátion
60.Умножить *a* на *b*	Multiplier *a* par *b, a* facteur de *b*	Múltiply *a* by *b*, *a* times *b*
61.Частное	Quotient *m*	Quótient
62.Черта дроби	Barre *f* [trait *m*] d'une fraction	Fráction line/bar
63.Чётное число	Nombre *m* pair	Éven número
64.Числитель	Numérateur *m*	Númerator
65.Член дроби	Terme *m* d'une fraction	Term of a fráction

ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ, ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ, ЛОГАРИФМЫ, ПРОГРЕССИИ

1. *a* в степени *n*, 2, 3; *a* в *n*-ой степени	*a (*à la) puissance *n*/deux/ trois; *a* deux/trois, *a* à la puissance ennième; *a* à l'ennième puissance	*a* (ráised) to the *n*-th/se-cond/third pówer
2. *a*-куб, *a* в кубе	*a* cube, *a* trois, *a* au cube *m*	*a* cúbed, *a* (raised) to the cúbe
3. *n*-ая степень (числа) *a*	La puissance ennième, l'ennième puissance de (d´un nombre) *a*	*n*-th pówer of (a númber) a
4. *a* в третьей степени	*a* au troisième degré *m*, *a* à la troisième puissance *f*	*a* (ráised) to the third pówer
5. *a* во второй степени	*a* au second/deuxième degré , *a* à la seconde/deuxième puissance	*a* (ráised) to the second pówer
6. *a*-квадрат, *a* в квадрате	*a* carré, *a* deux, *a* au carré *m*	*a* squared, *a* (raised) to the square
7. Арифметическая прогрессия	Progression *f* arithmétique	Àrithmétical progréssion
8. Арифметический корень (чётной степени)	Racine arithmétique (d'indice pair)	Árithmétical root (of éven índex)
9. Бесконечная геометрическая прогрессия	Progression *f* géométrique infinie [illimitée]	Ínfinite [nontérminàting] geomé-tric(al) progréssion
10.Бесконечно убывающая геометрическая прогресссия	Progression *f* géométrique infiniment décroissante	Ínfinitely decréasing geomé-trical progréssion
11.Бином Ньютона	Binôme *m* de Newton	Newton('s) binómial
12.Бином, двучлен	Binôme *m*	Binómial
13.Биномиальный коэффициент	Coefficient *m* binomial	Binómial còeffícient
14.Возведение в *n*-ю степень	Elévation [é-] *f* à la puissance en-nième	Ráising to the *n*-th pówer
15.Возведение в квадрат	Elévation *f* [é-] au carré	Squáring, ráising to the squáre
16.Возведение в куб	Elévation *f* [é-] au cube *m*	Cúbing, ráising to the cube
17.Возведение в степень, в квадрат, в куб	Elévation [é-] *f* à la puissance *f*, au carré *m*, au cube *m*	Ráising to a pówer, to the squáre/ cúbe; squá-ring/cúbing
18.Возвести (число) в *n*-	Elever [é] (un nombre) à la	Ráise (a númber) to the *n*-

ю степень, в квадрат, в куб	puissance ennième, au carré *m*, au cube *m*	th pów-er, to the squáre/cúbe; (to) squáre /cúbe (a number)
19.Возвести в квадрат	Elever [é-] au carré	Squáre, ráise to the squáre
20.Возвести в куб	Elever [é-] au cube	Cube, ráise to the cube
21.Возвести в степень	Elever [é-] à la puissance	Ráise to a pówer; ex-pònentiáte
22.Геометрическая прогрессия	Progression *f* géométrique	Geométric(al) progréssion
23.Десятичный [бриггсов] логарифм	Logarithme *m* décimal [vulgaire, (de) base 10, dans la base 10, de Briggs], log	Décimal [cómmon, (to thé) base 10, Brigg's] lógarithm
24.Знак корня [радикала]	Signe *m* d'une racine [d'un radi-cal]	Rádical [róot] sign
25.Знаменатель геометрической прогрессии	Raison *f* d'une progression géométrique	(Cómmon) rátio [quótient] of a geométrical progression, geométric rátio
26.Извлечение корня	Extraction *f* de la racine	Róoting, táking/extráction the root
27.Извлечь корень	Extraire la racine	Root, take/extract the root
28.Квадрат суммы, разности	Carré *m* d'une somme/différence	Squáre of a sum/dífference
29.Квадрат, вторая степень (числа) *a*	Carré m [le second degré] de (du nombre) *a*	Squáre [the second pówer] of (the number) *a*
30.Квадратный корень	Racine *f* carrée	Squáre/quadrátic root
31.Корень *n*-ой степени [степени *n*] из *a*	Racine *f* ennième [racine d'indi-ce *n*, ennième racine] de *a*	*n*-th róot of *a*
32.Корень степени 2*n* -1, 2*n* (два *n* минус первой, два энной степени)	Racine *f* deux *n* moins unnième, racine deux ennième	(2*n* - l)-th, 2*n*-th root
33.Корень четвертой/пятой степени	Racine *f* quatrième/cinquième; quatrième/cinquième racine	Fourth/fifth root
34.Корень чётной/нечётной степени	Racine *f* d'indice pair/impair	Root of éven/odd índex
35.Куб [третья степень] (чис-ла) *a*	Cube *m* [le troisième degré] de (du nombre) *a*	Cúbe [the third pówer] of (the númber) *a*
36.Куб суммы, разности	Cube *m* d'une somme/différence	Cúbe of a sum/dífference
37.Кубический корень	Racine *f* cubique	Cúbic [third, cube] root
38.Логарифм корня *n*-ой	Logarithme *m* de la ra-cine	Lógarithm of the *n*-th root

степени из положитель-ного числа	ennième d'un nom-bre positif	of a pósitive númber
39.Логарифм основания, единицы	Logarithme *m* de la ba-se, de l'unité	Lógarithm of the base, of the únity
40.Логарифм произведе-ния (частного) двух по-ложительных чисел	Logarithme *m* d'un pro-duit (d'un quotient) de deux nombres positifs	Lógarithm of a próduct, (of a quótient) of two pósi-tive númbers
41.Логарифм старого ос-нования по новому осно-ванию	Logarithme dans la base nouvelle de la base an-cienne/précédante	Lógarithm of a(n) old/ precéding base to a new base
42.Логарифм степени положительного числа	Logarithme *m* d'une puissance d'un nombre positif	Lógarithm of a power of a pósitive númber
43.Логарифм числа *b* по основанию *a*	Logarithme *m* [logue] (de) base *a* [dans la ba-se *a*] de [d'un/du nom-bre] *b*	Lógarithm of (a núm-ber) *b* (to the) base *a,* lógarithm with base *a* of *b,* base *a* lógarithm of *b*
44.Логарифмирование	Recherche *f* d'un loga-rithme	Táking lógarithms [tá-king the lógarithm]
45.Логарифмировать	Prendre un logarithme	To take a lógarithm
46.Логарифмировать обе части уравнения	Prendre un logarithme de deux membres *m* de l'équation *f*	To take a lógarithm of both (both of left and right) sides/members of an equátion
47.Мантисса логарифма	Mantisse *f* d´un logari-thme	Mantíssa of a lógarithm
48.Модуль десятичных логарифмов (относи-тельно натуральных ло-гарифмов) (lg*e*=0,43429…)	Module *m* de logarith-mes décimals (par rap-port aux logarithmes naturels)	Módulus (*pl* móduli) of cómmon lógarithms (with respéct to nátural lóga-rithms)
49.Модуль натуральных логарифмов (относите-льно десятичных лога-рифмов) (ln10=2,30259…)	Module *m* de logarith-mes naturels (par rap-port aux logarithmes décimals)	Módulus (*pl* móduli) of nátural lógarithms (with respect to cómmon lóga-rithms)
50.Модуль перехода	Module *m* d´un système de logarithmes	Módulus (*pl* móduli) (of a logaríthmic sýstem)
*51.*Натуральный [непе-ров] логарифм (числа) *x*	Logarithme *m* naturel [népérien, hyperboli-que, (de) base *e*, dans la base *e*] de (du nombre) *x*, Log *x*,	Nátural [Napierian, Na-perian, hýperbólic(al)] lógarithm of (the num-ber) *x*, ln *x*; lógarithm of (a

	ln *x*	númber) *x* (to the) base *e*
52.Неполный квадрат	Carré *m* incomplet [réduit]	Ìncompléte squáre
53.Новое основание логарифма	Base *f* nouvelle d´un/de logarithme	New base of a lóga-rithm
54.Общий член (арифметической, геометрической) прогрессии	Terme *m* général d'une progres-sion (arithmétique, géométrique)	Géneral term of a(n) àrithmétical [geométric(al)] progréssion
55.Основание логарифма	Base *f* d´un/de logarith-me	Base of a lógarithm
56.Основание степени	Base *f* d'une puissance	Báse of a pówer
57.Основное логарифмическое тождество	L'identité *f* logarithmi-que principale	Básic [príncipal, básis, fùndaméntal] lògaríth-mic idéntity
58.Перейти к новому основанию логарифмов	Passer à une nouvelle base de logarithmes	To pass to a new [to anóther] base of lóga-rithms
59.Переход к новому основанию логарифмов	Passage *m* à une nou-velle base de logarith-mes	Passage to a new base of lógarithms
60.Подкоренное выражение	Radicande *m*	Rádicand
61.Показатель корня	Indice *m* d'une racine [d'un radical]	Índex (*pl* índices) [órder] of a róot [rádical], róot [rádical] índex
62.Показатель степени	Indice *m* [exposant *m*] d'une puissance; puissance *f*	Índex (*pl* índices) [expónent] of a pówer; pówer
63.Потенцирование	Recherche *f* de l'expression algébrique dont le logarithme est connu	Èxponentiátion, èxponentiáting
64.Потенцировать	Rechercher l'expression algébrique dont le logarithme est connu	Èxponentiáte
65.Прогрессия (арифметическая, геометрическая)	Progression *f* (arithmétique, géométrique)	(Àrithmétical, geométric(al)) progréssion
66.Разложение квадрата, куба, бинома, выражения	Développement *m* du carré/cube/ binôme, de l'expression	Devélopment/expánsion of the squáre/cúbe/binómial/expréssion
67.Разложить квадрат/ куб суммы/разности, би-	Développer le carré/cube d'une somme/différence,	Devélop/expánd the squáre/cúbe of a

ном, выражение	le binôme, une expression	sum/dífference, the binómial, an expréssion
68.Разность арифметической прогрессии	Raison *f* d'une progression arith-métique	(Cómmon) dífference of an àrithmétical progression, àrithmétical rátio
69.Разность квадратов, кубов	Différence *f* de carrés/cubes	Dífference of squáres/cúbes
70.Свойство логарифмов	Propriété *f* de logarith-mes	Próperty of lógarithms
71.Сокращённое деление	Division *f* abrégée	Abrídged [short] divísion
72.Сокращённое умножение	Multiplication *f* abrégée	Abrídged [short] mùltiplicátion
73.Среднее арифметическое	Moyenne *f* arithmétique	(Àrithmétical) áverage [méan]
74.Среднее взвешенное	Moyenne *m* pondérée	Wéighted méan [áveradge]
75.Среднее гармоническое	Moyenne *m* harmonique	Harmónic méan [áveradge]
76.Среднее геометрическое	Moyenne *f* géométique	Geométric(al) áverage [méan]
77.Среднее квадратичное	Moyenne *m* quadratique	Quadrátic méan, root méan squá-re
78.Старое основание логарифма	Base *f* ancienne [précédante, initiale [-sjal], originalle, première, primitive, primaire] d´un/de logarithme	Old [first, precéding, inítial, príme, prímitive, oríginal] base of a lógarithm
79.Степень (числа *a*)	Puissance *f* (d'un nombre *a)*	Pówer (of a númber *a*)
80.Сумма квадратов, кубов	Somme *f* de carrés/cubes	Sum of squáres/cúbes
81.Таблица логарифмов	Table *f* [tableau *m*] de logarithmes	Táble of lógarithms
82.Удвоенное произведение	Produit *m* double [porté au double, doublé]	Dóubled próduct
83.Утроенное произведение	Produit *m* triple [porté au triple, triplé]	Trípled próduct
84.Формула бинома Ньютона	Formule *f* du binôme de Newton	Newton('s) binómial fórmula
85.Формула сокращённого ум-ножения, деления	Formule *f* de multiplication/divi-sion abrégée	Fórmula (*pl* fórmulae, fórmulas) of abrídged [short] mùltiplicátion /divísion
86.Характеристика лога-	Caractéristique *f* d´un	Chàracterístic of a

рифма	logarithme	lógarithm
87. Числовая последовательность	Suite *f* numérique	Nùmérical séquence, séquence of númbers
88. Член (прогрессии, числовой последовательности)	Terme *m* (d'une progression, d'une suite numérique)	Term (of a progréssion, of a nù-mérical séquence)

ЛОГАРИФМЫ

1. Десятичный [бриггсов] логарифм	Logarithme *m* décimal [vulgaire, (de) base 10, dans la base 10, de Briggs] log*x*	Décimal [cómmon, (to thé) base 10, Brigg's] lógarithm
2. Логарифм старого основания по новому основанию	Logarithme dans la base nouvelle de la base ancienne/précédante	Lógarithm of a(n) old/precéding base to a new base
3. Логарифм числа *b* по основанию *a*	Logarithme *m* [logue] (de) base *a* [dans la base *a*] de [d'un/du nombre] *b*	Lógarithm of (a númber) *b* (to the) base *a,* lógarithm with base *a* of *b,* base *a* lógarithm of *b*
4. Логарифмировать	Prendre un logarithme	To take a lógarithm
5. Натуральный [неперов] логарифм (числа) *x*	Logarithme *m* naturel [népérien, hyperbolique, (de) base *e*, dans la base *e*] de (du nombre) *x*, Log *x*, ln *x*	Nátural [Napierian, Naperian, hýperbólic(al)] lógarithm of (the number) *x*, ln *x*; lógarithm of (a númber) *x* (to the) base *e*
6. Новое основание логарифма	Base *f* nouvelle d´un/de logarithme	New base of a lógarithm
7. Основание логарифма	Base *f* d´un/de logarithme	Base of a lógarithm
8. Основное логарифмическое тождество	L'identité *f* logarithmique principale	Básic [príncipal, básis, fùndaméntal] lògaríthmic idéntity
9. Перейти к новому основанию логарифмов	Passer à une nouvelle base de logarithmes	To pass to a new [to anóther] base of lógarithms
10.Переход к новому основанию логарифмов	Passage *m* à une base nouvelle de logarithmes	Passage to a new base of lógarithms
11.Потенцировать	Rechercher l'expression algébrique dont le logarithme est connu	Èxponentiáte
12.Старое основание логарифма	Base *f* ancienne [précédante, initiale [-sjal], originalle, première, primitive, primaire] d´un/de logarithme	Old [first, precéding, inítial, príme, prímitive, oríginal] base of a lógarithm
13.Таблица логарифмов	Table *f* [tableau *m*] de logarithmes	Táble of lógarithms

ПЛАНИМЕТРИЯ

1.	Апофема	Apothème *m*	Apóthem
2.	Биссектриса	Bissectrice *f*	Biséctor/biséctrix *pl* bisé-ctrices
3.	Боковая сторона	Côté *m* latéral	Side
4.	Боковое ребро	Arête *f* latérale	Edge/rib
5.	Быть наклонённым к прямой под углом α	Etre incliné(e) sous l'angle α à/vers une droite	Be inclíned at/on the ángle α to a straight line
6.	Вертикальные углы	Angles *m* opposés par le sommet	Vértical ángles
7.	Верхнее основание трапеции	Base *f* supérieure d'un tra-pèze	Úpper base of a trapézium
8.	Вершина	Sommet *m*	Vértex (*pl* vértices)
9.	Взаимно перпенди-кулярные	Mutuellement perpendicu-laires	Mútually pèrpendícular
10.	Внешний угол	Angle *m* extérieur/externe	Extérior/extérnal ángle
11.	Внутренний угол	Angle *m* intérieur/interne	Intérier [insíde] ángle
12.	Восставить пер-пендикуляр из, к ...	Elever (é-) une perpendicu-laire de, à…	Eréct a pèrpendícular from, out of, to…
13.	Восьмиугольник	Octogone *m*	Óctagon
14.	Восьмиугольный	Octogonal(e), octogone	Octágonal
15.	Вписанная окруж-ность	Cercle *m* inscrit (circonfé-rence *f* inscrite)	Incírcle, inscríbed circle
16.	Вписанный много-угольник	Polygone *m* inscrit	Inscríbed pólygon
17.	Вписать многоуго-льник в …	Inscrire (j'inscris, n. ins-crivons) un polygone dans …	Inscríbe a pólygon in(to) …
18.	Вписать окружно-сть в …	Inscrire (j'inscris, n. inscri-vons) un cercle dans ..	Inscríbe a circle in(to) …
19.	*Выпуклый много-угольник*	Polygone *m* convexe	Cónvex pólygon
20.	Высота	Hauteur *f*	Áltitude/height
21.	Градус	Degré *m*	Degrée
22.	Девятиугольник	Ennéagone *m*	Nónagon
23.	Девятиугольный	Ennéagonal(e)	Nonágonal
24.	Делить на части	Diviser/partager en parties	Divide into parts
25.	Делить пополам	Faire part à deux [diviser/ partager en deux]	Halve/bisect [divide in half /halves]
26.	Десятиугольник	Décagone *m*	Décagon
27.	Десятиугольный	Décagonal(e)	Decágonal
28.	Диагональ	Diagonale *f*	Diágonal

29.	Диаметр	Diamètre *m*	Diámeter
30.	Длина окружности	Longueur *f* d'un cercle, d'une circonférence	Length of a circúmference, of a circle
31.	Касательная к окружности	Tangente *f* à un cercle, à une circonférence	Tángent (line) to a circle
32.	Касаться *чего-то* в точке	Toucher à *qch* en point	Touch *smth* at a póint
33.	Катет прямоугольного треугольника	Cathète *f* d'un triangle *m* rectangle	Leg of a right (right-ángled) tríangle
34.	Квадрат	Carré *m,* tétragone *m* régulier	Squáre, régular tétragòn
35.	Круг	Cercle *m*	Circle [(círcular) disk]
36.	Круговой сектор	Secteur *m* circulair	Círcular séctor
37.	Медиана	Médiane *f*	Médian
38.	Многоугольник	Polygone *m*	Pólygon
39.	Многоугольный	Polygonal(e), polygone	Polýgonal
40.	Наклонная	Oblique *f*; droite *f* oblique	Oblíque [slánting] line
41.	Нижнее основание трапеции	Base *f* inférieure d'un trapèze	Lówer base of a trapézium
42.	Образовывать [составлять] угол α с …	Former [faire, composer, constituer] un angle α avec…	Make [form] an ángle α with …
43.	Окружность	Circonférence *f*, cercle *m*	Circúmference [circle, períphery of a circle]
44.	Описанная окружность	Cercle *m* circonscrit (circonférence *f* circonscrite)	Círcumcírcle, círcumscribed circle
45.	Описанный многоугольник	Polygone *m* circonscrit	Círcumscribed pólygon
46.	Описать многоугольник около …	Circonscrire (je circonscris, n. circonscrivons) un polygone autour …	Círcumscribe [descríbe] a pólygon about…
47.	Описать окружность около…	Circonscrire (je circonscris, n. circonscrivons) un cercle autour …	Círcumscribe [descríbe] a circúmference, a circle about …
48.	Опустить перпендикуляр на...	Abaisser une perpendiculaire sur...	Drop a pèrpendícular on...
49.	Основание (треугольника, трапеции)	Base *f* (d'un triangle, d'un trapèze)	Base of a tríangle, of a trapézium
50.	Остроугольный треугольник	Triangle *m* acutangle	Acúte(-ángled) tríangle
51.	Острый угол	Angle *m* aigu	Acúte ángle
52.	Ось симметрии	Axe *m* de symétrie	Áxis of sýmmetry
53.	Параллелограмм	Parallélogramme *m*	Pàrallélogram
54.	Параллельный	Parallèle	Párallel

55.	Периметр	Périmètre *m*	Perímeter
56.	Перпендикуляр	Perpendiculaire *f*	Pèrpendícular
57.	Перпендикулярно	Perpendiculairement	Pèrpendícularly, at right ángle
58.	Перпендикулярный	Perpendiculaire	Pèrpendícular
59.	Площадь фигуры	Aire *f* d'une figure	Área of a figure
60.	Подобие	Similitude *f*	Simílitude [sìmilárity]
61.	Подобные фигуры	Figures *f* semblables	Símilar figures
62.	Полупериметр	Demi-périmètre *m*	Half-perímeter/semi-perímeter
63.	Полусумма оснований (трапеции)	Demi-somme *f* des bases (d'un trapèze)	Half-sum of báses (of a trapézium)
64.	Правильный многоугольник	Polygone *m* régulier	Régular pólygon
65.	Признак подобия	Test *m*/critère *m* de similitude	Sìmilárity/simílitude critérion/test
66.	Признак равенства	Test *m*/critère *m* d'égalité	Equálity critérion/test
67.	Прилежащая сторона	Côté *m* adjacent	Adjácent/adjóining side
68.	Прилежащий угол	Angle *m* adjacent	Adjácent/adjóining ángle
69.	Прилежащий катет	Cathète *f* adjacente	Adjácent/adjóining leg
70.	Провести (перпендикуляр и др.)	Mener (une perpendiculaire etc)	Draw (a pèrpendícular etc.)
71.	Противолежащий угол	Angle *m* opposé	Ópposite ángle
72.	Противолежащий катет	Cathète *f* opposée	(Lýing) ópposite leg
73.	Прямая *a* наклонена к прямой *b* под углом α	Droite *a* s'incline [est inclinée] sous l'angle α vers la droite *b*	Straight line *a* inclínes [is inclíned] at the ángle α to the straight line *b*
74.	Прямая *a* образует угол α с прямой *b*	Droite *a* forme/fait/compose l'angle α avec la droite *b*	Straight line *a* makes/forms the ángle α with the straight line *b*
75.	Прямой угол	Angle *m* droit	Right ángle
76.	Прямоугольник	Rectangle *m*	Réctàngle
77.	Прямоугольный треугольник	Triangle *m* rectangle	Right [right-ángled] tríangle
78.	Пятиугольник	Pentagone *m*	Péntagon
79.	Пятиугольный	Pentagonal,-e	Pentágonal
80.	Равенство плоских фигур	Egalité *f* de figures planes	Equálity of plane fígures
81.	Равнобедренный треугольник	Triangle *m* isocèle	Isósceles tríangle
82.	Равнобочная/рав-	Trapèze isocèle	Isósceles trapézium

нобедренная трапеция		
83. Равные фигуры	Figures égales	Équal fígures
84. Радиан	Radian *m*	Rádian
85. Радиус	Rayon *m*	Rádius, *pl* rádii
86. Радиус вписанной окруности	Rayon *m* d'un cercle inscrit (d'une circonférence inscite)	Inrádius, short radius, radius of an incírcle [of an inscríbed circle]
87. Радиус описанной окружности	Rayon *m* d'un cercle circonscrit (d'une circonférence circonscrite)	Círcumrádius, long radius, radius of a círcumcircle [of a circumscribed circle]
88. Ромб	Rhombe *m*, losange *m*	Rhómbus/rhomb, *pl* rhómbi, rhómbuses
89. Семиугольник	Heptagone *m*	Héptagon
90. Семиугольный	Heptagonal(e)	Heptágonal
91. Симметрия	Symétrie *f*	Sýmmetry
92. Смежные стороны	Côtés m contigues/adjacents	Adjácent/adjóining sides
93. Смежные углы	Angles *m* adjacents supplémentaires	Contíguous ángles
94. Соответственные стороны	Côtés *m* correspondents	Correspónding/símilar/like sides/legs
95. Соответствующие углы	Angles *m* correspondents	Correspónding ángles
96. Средняя линия	Ligne *f* médiane; base *f* moyenne	Mídlìne [médian, médian/médial line]
97. Сторона	Côté *m*	Side
98. Теорема Пифагора	Théorème *m* de Pythagore	Pythàgoréan théorem
99. Теорема синусов, косинусов	Théorème *m* [loi *f*] des sinus, des cosinus; règle *f* du (co)sinus	Law of (co)sines, (co)sine théorem/rule
100. Точка касания	Point *m* de tangence	Póint of tángency
101. Точка пересечения	Point *m* d'intersection	Interséction point
102. Трапеция	Trapèze *m*	Trapézium, *pl* trapézia
103. Треугольник	Triangle *m*	Tríangle
104. Треугольный	Triangulaire	Triángular
105. Тригонометрические функции острого угла (в прямоугольном треугольнике)	Fonctions trigonométrique d'angle aigu (dans un triangle *m* rectangle)	Trìgonométric(al) fúnctions of acúte ángle (in a right [right-ángled] tríangle)
106. Тупой угол	Angle *m* obtus	Obtúse/blunt ángle
107. Тупоугольный треугольник	Triangle *m* obtusangle	Obtúse(-ángled) tríangle
108. Угол между…	Angle *m* de…	Ángle inclúded betwéen…
109. Угол наклона пря-	Angle *m* d'inclinaison de la	Slópe ángle, ángle of ìncli-

мой a к прямой b	droite a vers/à la droite b	nátion of the straight line a to the straight line b
110. Угол при вершине равнобедренного треугольника	Angle *m* au sommet d'un triangle isocèle	Ápex/ápical/vértex ángle [ángle at a vértex/córner] of an isósceles tríangle
111. Угол при основании равнобедренного треугольника	Angle *m* adjacent à la base d'un triangle isocèle	Base ángle of an isósceles tríangle
112. Хорда окружности	Corde *f* d'un cercle	Chord of a circle
113. Центр (круга, окружности)	Centre *m* (d'un cercle, d'une circonférence)	Cénter=céntre (of a circúmference, circle)
114. Центр вписанной окружности	Centre *m* d'un cercle inscrit	Incéntre, céntre of an incírcle [of an inscríbed circle]
115. Центр описанной окружности	Centre *m* d'un cercle circonscrit	Círcumcéntre, centre of a círcumcírcle [of an círcumscribed circle]
116. Центр правильного треугольника/многоугольника	Centre *m* du triangle/polygone régulier	Centre of the régular traingle/pólygon
117. Центр симметрии	Centre *m* de symétrie *f*	Céntre of sýmmetry [sýmmetry céntre]
118. Четырёхугольник	Quadrilatère *m*/quadrangle *m*/tétragone *m*	Quádràngle/quàdriláteral/tétragòn
119. Четырёхугольный	Quadrilatéral(e)/quadrilatère/quadrangulaire	Quadrángular/tetrágonal
120. Шестиугольник	Hexagone *m*	Héxagon
121. Шестиугольный	Hexagone/hexagonal(e)	Hexágonal
122. Эн-(n-)угольник	Polygone *m* à n côtés	n-sided pólygon

ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. Абсцисса точки	Abscisse *f* d'un point	Abscíssa of a póint
2. Вращаться	Tourner	Revólve/rotáte/turn
3. Гипотенуза прямоугольного треугольника	Hypothénuse *f* d'un triangle rectangle	Hypótenuse of a right [right-án-gled] tríangle
4. Градус	Degré *m*	Degrée
5. Градусная мера угла	Mesure *f* des angles en degrés	Ángular méasure of an ángle
6. Единичная окружность	Circonférence *f* unitaire	Únit circle/circúmference
7. Единичный круг	Cercle *m* unité	Únit circle
8. Катет прямоугольного треугольника	Cathète *f* d'un triangle *m* rectangle	Leg of a right (of a right-ángled) tríangle
9. Квадрант, четверть	Quadrant *m* [k(w)a-]	Quádrant
10.Конец подвижного радиуса	Extrémité *f* d'un rayon mobile	Extrémity [end point] of a móbile rádius
11.Конечная сторона угла	Côté *m* final d'un angle	Térninal síde of an ángle
12.Косинус	Cosinus *m*	Cosine
13.Котангенс	Cotangente *f*	Cotangent
14.Кофункция	Cofonction *f*	Cofúnction
15.Линия котангенсов	Ligne *f* de cotangentes	Cotángent líne
16.Линия тангенсов	Ligne *f* de tangentes	Tángent líne
17.Мнемоническое правило	Règle *f* mnémonique	Mnemónic rúle [ni:-]
18.Наименьший положительный период; период	La plus petite période *f* positive ; période *f*	The smállest/léast pósitive périod; périod
19.Начальная сторона угла	Côté *m* initial d'un angle	Inítial síde of an ángle
20.Неподвижный радиус	Rayon *m* immobile/fixe/ fixé	Fíxed/státionary rádius
21.Нечётная функция	Fonction *f* impaire	Odd fúnction
22.Оборот	Tour *m*, révolution *f*, rotation *f*	Rèvolútion/turn/rotátion
23.Оканчиваться в первом, втором…квадранте (в первой, второй… четверти) (об угле)	Se terminer au premier/ deuxième … quadrant (sur un angle)	Términate in the first/sécond … quádrant (about an angle)
24.Ордината точки	Ordonnée *f* d'un point	Órdinate of the póint
25.Ориентированная дуга (со стрелкой на конце)	Arc *m* orienté (avec l'aiguille *f* , la flèche au bout *m*)	Óriented/diréсted arc (with an árrow at the end/end-point)
26.Острый угол	Angle *m* aigu	Acúte ángle

27.Ось котангенсов	Axe *m* de cotangentes	Cotángent áxis
28.Ось тангенсов	Axe *m* de tangentes	Tángent áxis
29.Отрицательный угол	Angle *m* négatif	Négative ángle
30.Период	Période *f*	Périod
31.Периодическая функция (с периодом *T*)	Fonction *f* périodique (de période *T*)	Pèriódic(al) fúnction (with périod *T*)
32.Периодичность	Périodicité *f*	Pèriodícity
33.По часовой стрелке	Dans le sens à l'aiguille *f* d'une montre, dextrorsum, rétrograde	Clóckwise
34.Поворот около начала координат (на угол α)	Rotation *f* autour l'origine *f* des coordonnées (à l'angle α)	Turn/rotátion about [with respéct to] the órigin of coórdinates (by the ángle α)
35.Подвижный радиус	Rayon *m* mobile	Móbile rádius
36.Полный оборот	Tour *m* complet; révolution *f* [rotation *f*] complète	Compléte rèvolútion/turn/rotátion
37.Положительная полуось абсцисс	Demi-axe *m* positif d'abscisses	Pósitive *x*-áxis [semi-axis of abscíssas/abscíssae]
38.Положительный угол	Angle *m* positif	Pósitive ángle
39.Полуразность аргументов	Demi-différence *f* d'arguments	Half-dífference of árguments
40.Полусумма аргументов	Demi-somme *f* d'arguments	Half-sum of árguments
41.Предполагать угол *x* острым	Supposer l'angle *x* comme l'aigu	Suppóse the ángle *x* as acúte one
42.Прилежащий (к углу) катет	Cathète *f* adjacente (à un angle, à l'angle)	Adjácent/adjóining leg (to an/the ángle)
43.Принимать то же самое значение при изменении угла на π (2π)	Prendre (il prend, ils prennent)/admettre (il admet, ils admettent) la même valeur si l'angle se change à π (2π)	Take on the same válue as the angle changes/váries on/at/by π (2π)
44.Продолжение подвижного радиуса	Prolongement *m* d'un rayon mobile	Pròlongátion of the móbile rádius
45.Произвести поворот/оборот	Faire/opérer/exécuter un tour [une révolution, une rotation]	Make [cárry out] a turn/rotátion/rèvolútion
46.Против часовой стрелки	Dans le sens contraire à l'aiguille *f* d'une montre, sinistrorsum, directement	Cóunter-clóckwise
47.Противолежащий (углу) катет	Cathète *f* opposée (à un angle, à l'angle)	Ópposite leg (of a right [right-ángled] tríangle)
48.Прямой угол	Angle *m* droit	Right ángle
49.Прямоугольный тре-	Triangle *m* rectangle	Right [right-ángled] trían-

угольник		gle
50.Радиан	Radian *m*	Rádian
51.Радианная мера угла	Mesure *f* des angles en radians	Rádian méasure of an ángle
52.Свойство нечётности	Propriété *f* d’imparité	Próperty of óddness
53.Свойство чётности	Propriété *f* de parité	Próperty of évenness
54.Синус	Sinus *m*	Sine
55.Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента	Relations *f*, *pl* entre les fonctions trigonométriques de même argument *m*	Relátions betwéen the trìgonométric(al) fúnctions of the sáme árgument
56.Стандартное положение угла	Position *f* standarde d’un angle	Stándart posítion of an angle
57.Стрелка	Aiguille *f* , flèche *f*	Árrow
58.Тангенс произвольного (числового) аргумента	Tangente *f* d’un argument arbitraire (numérique)	Tángent of an árbitrary (numérical) árgument
59.Точка пересечения продолжения подвижного радиуса с линией/ осью (ко-)тангенсов	Point *m* d’intersection *f* du prolongement d’un rayon mobile et de la ligne *f* [de l’axe *m*] de (co)tangentes	Ìnterséction póint of the pròlongátion of the móbile rádius with the (có)tángent líne/áxis
60.Тригонометрическая функция произвольного (числового) аргумента	Fonction *f* trigonométrique d’un argument arbitraire (numérique)	Trìgonométric(al) fúnction of an árbitrary (numérical) árgument
61.Тригонометрический круг	Cercle *m* trigonométrique	Trìgonométric(al) circle
62.Угол (между подвижным и неподвижным Радиусами)	Angle *m* (du rayon mobile et celui immobile/fixe/fixé)	Angle (betwéen the móbile rádius and the físed/státionary one)
63.Угол в первом, втором … квадранте	Angle *m* du premier/deuxième… quadrant *m*	First/sécond… quádrant ángle
64.Угол из интервала…, (ко)тангенс которого равен *a*	Angle *m* d’intervalle *m*… dont la (co)tangente *m* égale (est égal(e) à) *a*	Ángle of the ínterval which (có)tángent équals (is équal to) *a*
65.Угол из отрезка…, (ко)синус которого равен *a*	Angle *m* du segment *m*…dont le (co)sinus égale (est égal(e) à) *a*	Ángle of the ségment which (có)sine équals (is équal to) *a*
66.Формула двойного (удвоенного) угла/аргумента	Formule *f* de double angle *m*/argument *m*	Double-ángle/-árgument fórmula
67.Формула половинного угла/аргумента	Formule *f* de la moitié d’angle *m*/d’argument *m*	Half-ángle/-árgument fórmula
68.Формула понижения степени	Formule *f* d’abaissement *m* d’une puissance	Fórmula of redúction of a pówer [pówer redúction fórmula]

69. Формула преобразования произведения тригонометрических функций в (алгебраическую) сумму	Formule *f* de transformation *f* d'un produit *m* de fonctions trigonométriques en somme (algébri-que)	Trànsformátion fórmula of a próduct of trigonométric fúnctions (ín)to a(n) (àlgebráic(al)) sum; próduct fórmula
70. Формула преобразования суммы/разности (ко-)синусов в произведение	Formule *f* de transformation *f* d'une somme/différence de (co)sinus en produit *m*	Trànsformátion fórmula of a sum/dífference of (có)sines (ín)to a próduct
71. Формула сложения	Formule *f* d'addition *f*	Addítion fórmula
72. Формулы приведения	Formules relatives aux angles associés	Redúction fórmulas/fórmulae
73. Чётная функция	Fonction *f* paire	Éven fúnction
74. Число/количество полных оборотов	Nombre *m* de tours complets, de révolutions/rotations complètes)	Númber of compléte rèvolútions/turns/rotátions

СТЕРЕОМЕТРИЯ

1. Апофема	Apothème *m*	Ápothem
2. Боковая грань	Face *f* latérale	Láteral fáce
3. Боковая поверхность	Surface *f*/aire latérale	Láteral súrface/área
4. Боковое ребро	Arête *f*/côté *m* latéral(e)	Side edge/rib
5. Большой круг	Grand cercle *m*	Gréat círcle
6. Быть наклонённой к плоскости под углом α	S'incliner [être inclinée] au (vers le) plan sous l'angle α	Inclíne [be inclíned] to the plane at/on the ángle α
7. Верхнее основание	Base *f* supérieure	Úpper/top báse
8. Вершина	Sommet *m*	Vértex
9. Восьмиугольный	Octogonal(e)	Octógonal
10. Вписанн|ый,-ая в …	Inscrit(e) dans un(e)…	Inscríbed in(to)…
11. Вписать в …	Inscri|re,-s,-vons dans …	Inscríbe in(to)…
12. Вращаться около прямой	Tourner autour de droite	Revólve/rotáte/turn about a stráight line
13. Вращение около прямой	Rotation *f*/révolution *f* autour de droite	Rotátion, rèvolútion about a stráight line
14. Выпуклый многогранник	Polyèdre *m* convexe	Cónvex pólyhédron/pólytope
15. Высота	Hauteur *f*	Áltitude/height
16. Грань двугранного угла	Face *f* d'un angle dièdre [face d'un dièdre]	Fáce of a dihédral/ínterfàcial ángle [fáce of a dihédron]
17. Грань многогранника	Face *f* d'un polyèdre; facette *f* d'un polyèdre	Fáce of a pólyhédron
18. Грань многогранного угла	Face *f* d'un angle polyèdre	Fáce of a pólyhédral ángle
19. Двугранный угол	Angle *m* dièdre, dièdre *m*	Dihédral/ínterfàcial ángle, dihédron
20. Двугранный угол при боковом ребре	Dièdre *m* à l'arête (au côté) latérale	Dihédral ángle, dihédron at the side edge/rib
21. Двугранный угол при основании	Dièdre *m* à la base	Dihédral ángle, dihédron at the báse
22. Девятиугольный	Ennégonal(e)	Nonágonal
23. Десятиугольный	Décagonal(e)	Decágonal/decángular
24. Диагональ	Diagonale *f*	Diágonal
25. Диаметр	Diamètre *m*	Diámeter
26. Диаметральная плоскость	Plan *m* diamétral	Diámetral/dìamétric(al) pláne
27. Додекаэдр	Dodécaèdre *m*	Dòdecahédron
28. Измерение прямо-	Dimension *f* d'un paral-	Diménsion of a rectángu-

угольного параллелепипеда	lélépipède *m* rectangle	lar pàrallelépiped
29.Измерять угол	Mesurer un angle	Méasure an ángle
30.Измеряться линейным углом (о двугранном угле)	Se mesurer, être mesuré par un angle rectiligne (sur un dièdre [un angle dièdre])	Be méasured by a line/línear ángle (abóut a dihédral ángle [abóut a dihédron])
31.Икосаэдр	Icosaèdre *m*	Ìcosahédron
32.Коническая поверхность	Surface *f* conique (circulaire)	(Círcular) cónic(al) súrface
33.Конус	Cône *m*	Cóne
34.Круговая коническая поверхность	Surface *f* conique circulaire	Círcular cónic(al) súrface
35.Круговая цилиндрическая поверхность	Surface *f* cylindrique (circulaire)	Círcular cylíndrical súrface
36.Куб	Cube *m*	Cube
37.Линейный угол двугранного угла	Angle *m* rectiligne d'un dièdre [d'un angle *m* dièdre]	Line/línear ángle of a dihédral ángle [of a dihédron]
38.Линия пересечения	Ligne *f* d'intersection	Interséction line, line of interséction
39.Малый круг	Petit cercle *m*	Small círcle
40.Мера (двугранного угла)	Mesure *f* (d'un dièdre, d'un angle *m* dièdre)	Méasure (of a dihédral ángle [of a dihédron])
41.Многогранник	Polyèdre *m*	Pólyhédron/pólytope (*pl* pólyhédra, pólyhédrons)
42.Многоугольный	Polygonal(e), polygone	Polýgonal
43.Наклонная прямая	Oblique *f*, droite *f* oblique	Oblíque/slánting líne
44.Наклонная призма	Prisme *m* oblique	Oblíque prism
45.Наклонный параллелепипед	Parallélépipède *m* oblique	Oblíque pàrallelépiped
46.Направляющая	Directrice *f*	Diréctrix (*pl* dìrectríces), dirécting líne
47.Нижнее основание	Base *f* inférieure	Lówer báse
48.Образовывать двугранный угол	Former un angle dièdre, former un dièdre	Form a dihédral ángle, form a dihédron
49.Образующая	Génératrice *f*	Géneratrix [generating line, génerator, rúling]
50.Объём	Volume *m*	Vólume
51.Объём тела, ограниченного поверхностью	Volume *m* d'un corps limité par une surface	Vólume of a bódy/sólid bóunded by a súrface
52.Октаэдр	Octaèdre *m*	Óctahédron
53.Описанный около …	Circonscrit(e) autour …	Círcumscribed abóut…

54.Описать около …	Circonscrire autour …	Círcumscribe abóut…
55.Осевое сечение	Section *f*/coupe *f* axial, pan *m* coupé axial	Áxial séction
56.Ось (цилиндра, конуса)	Axe *m* (d'un cylindre/cône)	Áxis (of a cýlinder, cóne)
57.Ось симметрии	Axe *m* de symétrie *f*	Sýmmetry áxis, áxis of sýmmetry
58.Параллелепипед	Parallélépipède *m*	Pàrallelépiped
59.Параллельный	Parallèle	Párallel
60.Пересекающиеся	Intersectant/sécantes/concourantes	Concúrrent/ìnterséсting
61.Перпендикуляр	Perpendiculaire *f*	Pèrpendícular
62.Перпендикулярный	Perpendiculaire	Pèrpendícular
63.Пирамида	Pyramide *f*	Pýramid
64.Плоский угол при вершине пирамиды	Angle *m* plan près d'un sommet d'une pyramide	Pláne ángle at vértex, plane ápex/ápical/vértex angle of a pýramid
65.Плоское сечение	Section *f*/coupe *f* plane, pan *m* coupé plan	Pláne séction
66.Плоскость симметрии	Plan *m* de symétrie *f*	Sýmmetry pláne, pláne of sýmmetry
67.Плоскость	Plan *m*	Pláne
68.Площадь (поперечного) сечения	Surface *f*/aire *f* d'une section *f* /coupe *f* (transversale)	(Cross-)séction/séctional área
69.Площадь боковой поверхности	Aire *f* de la surface latérale	Láteral súrface área
70.Площадь полной поверхности	Aire *f* de la surface totale	Tótal/compléte súrface área
71.Поверхность вращения	Surface *f* de rotation/révolution	Súrface of rotátion/rèvolútion
72.Полная поверхность	Surface *f*/aire totale	Tótal/compléte súrface/ área
73.Поперечное сечение	Section *f*/coupe *f* transversale, pan *m* coupé transversal	Tránsverse séction, cross-séction
74.Правильная пирамида	Pyramide *f* régulière	Régular pýramid
75.Правильная призма	Prisme *m* régulier	Régular prism
76.Правильный многогранник	Polyèdre *m* régulier	Régular pólyhédron/pólytope
77.Правильный тетраэдр	Tétraèdre *m* régulier	Régular tétrahédron
78.Призма	Prisme *m*	Prism
79.Проекция прямой на	Projection *f* d'une droite	Projéction of a stráight li-

плоскость	sur un plan	ne on a pláne
80.Пространственная фигура	Figure *f* spatiale, figure de l'espace	Spáce/spátial fígure
81.Пространственное тело	Corps *m*/solide *m* spatial, corps/solide de l'espace)	(Spáce/spátial) bódy/sólid
82.Прямая призма	Prisme *m* droit	Right prism
83.Прямая, прямая линия	Droite *f*, ligne *f* droite	Stráight/right líne, line
84.Прямой круговой конус	Cône *m* droit circulaire [cône à base circulaire]	Right círcular cóne
85.Прямой круговой цилиндр	Cylindre *m* droit circulaire	Right círcular cýlinder
86.Прямой параллелепипед	Parallélépipède *m* droit	Right pàrallelépiped
87.Прямоугольный параллелепипед	Parallélépipède *m* rectangle	Rectángular pàrallelépiped
88.Пятиугольный	Pentagonal(e)	Pentágonal
89.Радиус	Rayon *m*	Rádius
90.Радиус вписанной сферы	Rayon *m* d'une sphère inscrite	Rádius of an inscríbed sphére
91.Радиус описанной сферы	Rayon *m* d'une sphère circonscrite	Rádius of a círcumscribed sphére
92.Развёртка	Développement *m*	Devélopment
93.Ребро	Arête *f*/côté *m*	Edge/rib
94.Семиугольный	Heptagonal(e)/heptagone	Heptágonal
95.Сечение (многогранника плоскостью)	Section *f*/coupe *f*, pan *m* coupé (d'un polyèdre par un plan)	Séction (of a pólyhédron by a pláne)
96.Скрещивающиеся прямые	Droites non coplanaires	Skew stráight lines
97.Среднее поперечное сечение (усечённого конуса)	Section *f* transversale moyenne (d´un cône tronqé)	Méan/middle tránsverse séction, méan/middle cross-séction (of a trúncated cóne)
98.Сфера	Sphère *f*	Sphére
99.Сферическая/шаровая поверхность, сфера	Surface *f* sphérique, sphère *f*	Sphérical/ball súrface, sphére
100. Сферический пояс	Zone *f* sphérique	Sphérical zóne, zóne of a sphére
101. Сферический сегмент	Segment *m*/calotte *f* sphérique à une base	Sphérical ségment (of one base), zóne of one base
102. Тело	Corps *m*/solide *m*	Bódy/sólid
103. Тело вращения	Corps *m* de rotation/révo-	Bódy/sólid of rotátion/rè-

	lution	volútion
104. Теорема о трёх перпендикулярах	Théorème *m* de trois perpendiculaires *f*	Three pèrpendículars théorem
105. Тетраэдр	Tétraèdre *m*	Tétrahédron
106. Точка пересечения	Point d'intersection	Interséction póint, póint of intersection
107. Треугольный	Triangulaire	Triángular
108. Угол между двумя плоскостями	Angle *m* de deux plans	Ángle included betwéen two planes
109. Угол между двумя прямыми	Angle *m* de deux droites	Ángle (inclúded) betwéen two stráight lines
110. Угол между прямой и плоскостью	Angle *m* d'une droite et d'un plan	Ángle (inclúded) betwéen a stráight line and a pláne
111. Угол наклона прямой к плоскости	Inclinaison *f* [angle *m* d'inclinaison] d'une droite au [vers le] plan	Ángle of ìnclinátion of a stráight line to a pláne
112. Усечённая пирамида	Pyramide *f* tronqée; tronc *m* de pyramide *f*	Frústum of a pýramid, trúncated pýramid
113. Усечённый конус	Cône *m* tronqé; tronc *m* du cône	Frústum of a cóne, trúncated cóne
114. Фигура	Figure *f*	Fígure
115. Центр (сферы)	Centre *m* (d'une sphère)	Centre (of a sphére)
116. Центр вписанной сферы	Centre *m* d'une sphère inscrite	Centre of an inscríbed sphere
117. Центр описанной сферы	Centre *m* d'une sphère circon-scrite	Centre of a círcumscribed sphére
118. Центр симметрии	Centre *m* de symétrie *f*	Sýmmetry centre, centre of sýmmetry
119. Цилиндр	Cylindre *m*	Cýlinder
120. Цилиндрическая поверхность	Surface *f* cylindrique	Cylíndrical súrface
121. Четырёхугольный	Quadrilatéral(e)/quadrilatère/tétragone	Quadrángular/quàdriláteral/tetrágonal
122. Шар	Boule *f*, sphère *f*	Ball
123. Шаровой сектор	Secteur *m* sphérique	Sphérical séctor
124. Шаровой слой	Segment *m* sphérique couronne *f* sphérique	Sphérical ségment of two bases
125. Шаровой пояс	Zone *f* sphérique	Sphérical zóne, zóne of a sphére
126. Шаровой сегмент	Segment *m*/calotte *f* sphérique à une base	Sphérical ségment (of one base), zóne of one base
127. Шестиугольный	Hexagonal(e)/hexagone	Hexágonal
128. Эн(*n*)-угольный	*n*-angulaire, à *n* angles	*n*-angled/*n*-córnered/*n*-gonal

ОГЛАВЛЕНИЕ

Математика: Методичний посібник по вивченню курсу елементарної і елементів вищої математики для студентів підготовчого відділення ДонНТУ (російською мовою)

УКЛАДАЧІ: Косолапов Юрій Федорович, кандидат фізико-математичних наук, профессор, Косолапова Нінель Василівна, старший викладач

ФОРМАТ $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Умовних друкарських аркушів

83000, м. Донецьк, вул. Артема, 58, ДонНТУ