

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

## **НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ**

**(Навчальний посібник)  
Частина 2**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

## **НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ**

**(Навчальний посібник)  
Частина 2**

**РОЗГЛЯНУТО**  
на засіданні кафедри нарисної  
геометрії та інженерної графіки  
Протокол № 8 від 08.04.2008 р.

**ЗАТВЕРДЖЕНО**  
на засіданні навчально – видавничої  
ради ДонНТУ  
Протокол № 4 від 19.05.2008 р.

УДК 514.18(075.8)  
Н28

Нарисна геометрія (навчальний посібник), частина 2 /Укл.: Катькалова О. А., Коломієць А. Ф., Пастернак Д. М., Скідан І. А. – Донецьк: ДВНЗ ДонНТУ. 2008. – 72 с.: іл.

Посібник містить навчальний матеріал з нарисної геометрії за темами „Площини, дотичні до кривих поверхонь”, „Перетин поверхонь з площиною”, „Перетин прямої лінії з поверхнями”, „Взаємний перетин поверхонь”, „Розгортання поверхонь” та „Аксонетричні проєкції”. Для студентів вищих технічних навчальних закладів III – IV рівнів акредитації напрямку підготовки „Інженерна механіка”.

Укладачі:

О. А. Катькалова, доц.,  
А. Ф. Коломієць, проф.,  
Д. М. Пастернак, проф.,  
І. А. Скідан, проф.

Рецензент:

М. С. Гармаш, доц.

© Катькалова О. А., Коломієць А. Ф., Пастернак Д. М., Скідан І. А.

## ЗМІСТ

	С.
<b>Передмова</b> .....	5
<b>9 Площини, дотичні до кривих поверхонь</b> .....	6
Запитання для самоперевірки.....	15
<b>10 Перетин кривих поверхонь з площиною. Розгортання кривих поверхонь</b> .....	16
10.1 Конічні перерізи.....	
Запитання для самоперевірки.....	28
<b>11 Взаємний перетин кривих поверхонь</b> .....	29
11.1 Перетин прямої з кривою поверхнею.....	14
11.2 Взаємний перетин кривих поверхонь.....	14
11.2.1 Спосіб допоміжних площин-посередників.....	17
11.2.2 Спосіб допоміжних сфер.....	19
11.3 Деякі особливі випадки перетину поверхонь.....	20
Запитання для самоперевірки.....	48
<b>12 Розгортання поверхонь</b> .....	49
Запитання для самоперевірки.....	63
<b>14 Аксонометричні проєкції</b> .....	64
14.1 Стандартні аксонометричні проєкції.....	
14.2 Способи побудови аксонометрії.....	
Запитання для самоперевірки.....	
<b>Список літератури</b> .....	72

## ПЕРЕДМОВА

Це видання посібника «Нарисна геометрія» є продовженням першої частини, опублікованої у 2007 році. Тому ми тут не наводимо умовні позначення геометричних елементів та операцій із ними, номери розділів продовжують нумерацію першої частини. Сподіваючись на те, що читач уже засвоїв матеріал першої частини у другій частині ми на додаток до текстових пояснень широко застосовуємо символічну форму пояснень виконаних геометричних побудов.

Оскільки матеріал цієї частини викладати на лекції дуже непросто, ми підготували у вигляді робочого зошита комплект карток, які містять умови прикладів, що розглядаються на лекціях. Ці картки роздаються студентам на лекціях і вони розв'язують приклади безпосередньо на картках слідом за поясненнями лектора.

Для студентів, які з якоїсь причини пропустили лекції чи взагалі не можуть їх відвідувати (наприклад, заочники), ми підготували робочий зошит, в якому усі приклади названого вище комплекту карток подані у розв'язаному вигляді з короткими текстовими та символічними поясненнями. Цей зошит є своєрідним коротким конспектом навчального матеріалу основних тем другої частини посібника «Нарисна геометрія».

На майбутнє передбачається доповнити цю частину посібника детальним оглядом кривих поверхонь, які застосовуються в техніці та будівництві.

Коломієць А. Ф.

## 9 ПЛОЩИНИ, ДОТИЧНІ ДО КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ

Візьмімо на якійсь поверхні  $\Phi$  (рис. 9.1) довільну точку  $M$  і проведемо через неї декілька кривих ліній, наприклад,  $a, b, c$ , що належать поверхні  $\Phi$ . Через точку  $M$  проведемо дотичні прямі  $t_1, t_2, t_3$  до кривих ліній  $a, b, c$ . У диференціальній геометрії доведено, що усі дотичні прямі до кривих ліній поверхні, що проведені через одну точку цієї поверхні, які дотикаються до цих кривих у тій самій точці поверхні, належать одній площині, дотичній до поверхні у тій самій точці. Та, оскільки, площина може бути визначена двома прямими, що перетинаються, то для того, щоб до заданої поверхні провести площину, яка дотикається до неї у точці, що їй належить, достатньо через цю точку провести будь-які дві криві лінії, що належать заданій поверхні, і провести до цих кривих дотичні прямі через ту саму точку на поверхні.

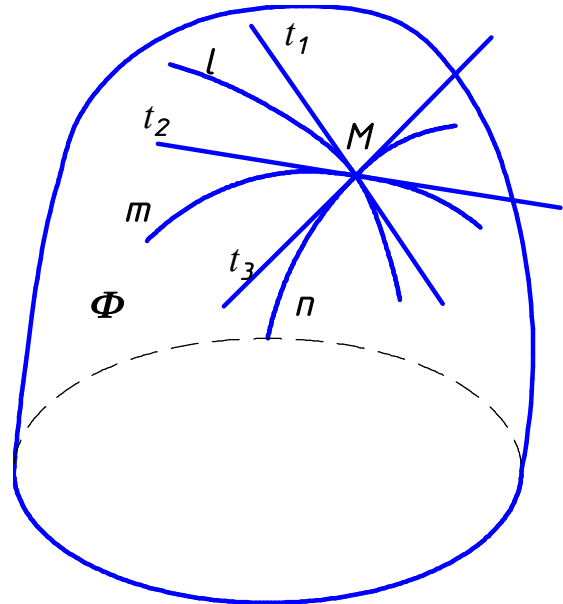


Рис. 9.1

Точка поверхні, у якій може бути до того ж одна дотична площина, називається звичайною (або правильною).

На відміну від звичайних на поверхні можуть бути особливі точки, наприклад, вершина конічної поверхні, вершина поверхні обертання, точка на ребрі звороту тощо. Якщо поверхня має тільки звичайні точки, то вона є опуклою.

Перпендикуляр до дотичної площини у звичайній точці поверхні є нормаллю до площини. Звідси нормальний переріз поверхні – пелощиною, яка проходить через нормаль до площини.

На рис. 9.2 показано конкретний приклад побудови площини, дотичної до опуклої поверхні – еліпсоїда обертання. На поверхні еліпсоїда задана точка  $A(A_1, A_2)$ . Її проекції побудовані за допомогою паралелі  $p(p_1, p_2)$ , що належить поверхні еліпсоїда. Через точку  $A$  проведено дотичну до паралелі  $p$  пряму  $t(t_1, t_2)$ . Ця пряма належить площині, що дотикається до поверхні еліпсоїда у точці  $A$ .

За другу криву на поверхні еліпсоїда беремо меридіан еліпсоїда, який проходить через точку  $A$

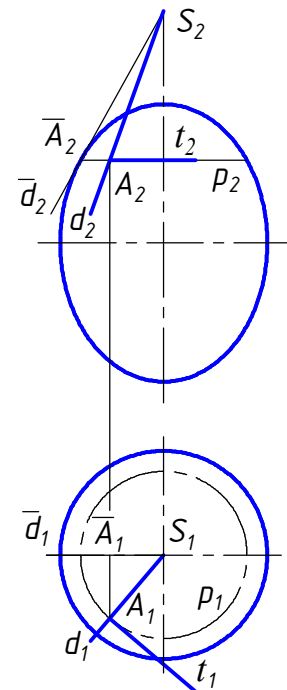


Рис. 9.2

(на рис. 9.2 не показаний). Дотична пряма  $d(d_1, d_2)$  до цього меридіана на горизонтальній проекції збігається з проекцією меридіана. Для побудови фронтальної проекції  $d_2$  дотичної  $d$  повернуто меридіан разом із точкою  $A$  навколо вертикальної осі еліпсоїда до фронтального положення. У цьому положенні меридіан точки  $A$  збігається з головним меридіаном – обрисом фронтальної проекції еліпсоїда. А точка  $A$  переміщується у положення  $\bar{A}(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$  на головному меридіані. Через точку  $\bar{A}_2$  проведено дотичну  $\bar{d}_2$  до головного меридіана. Ця дотична перетинається з вертикальною віссю еліпсоїда у точці  $S(S_2)$ , яка є нерухомою точкою дотичної  $d$  при її обертанні навколо вертикальної осі еліпсоїда. Тому фронтальну проекцію  $d_2$  дотичної  $d$  проведено через точки  $A_2$  і  $S_2$ . Дві дотичні прямі  $t(t_1, t_2)$  і  $d(d_1, d_2)$  визначають шукану дотичну до еліпсоїда площину  $\Delta(d, t)$ .

Найпростішою із опуклих поверхонь можна вважати сферу. Будь-яка дотична до сфери площина перпендикулярна до радіуса, який проходить через точку дотику. На рис. 9.3 показано побудову дотичної до сфери площини  $\Gamma(f; h)$ . На поверхні сфери за допомогою кола  $a(a_1, a_2)$ , що належить поверхні сфери, побудована точка  $A(A_1, A_2)$ . Із центра сфери  $O(O_1, O_2)$  проведено радіус у точку  $A$ . Через точку  $A$  проведено фронталь  $f(f_1, f_2)$  і горизонталь  $h(h_1, h_2)$ , перпендикулярні до радіуса  $OA$ :  $f_2 \perp O_2A_2$ ,  $f_1 \perp A_1A_2$ ,  $h_1 \perp O_1A_1$ ,  $h_2 \perp A_1A_2$ . Це не суперечить сказаному щодо рис.16.1. Адже горизонталь  $h$  дотикається до кола  $a$ , за допомогою якого побудована точка  $A$  на сфері, а фронталь  $f$  дотикається до кола (воно не показане на рис. 9.2), яке належить сфері і фронтальній площині, що проходить через фронталь  $f$ .

Тут слід зауважити, що площина, дотична до сфери, має з нею одну спільну точку. Такі точки на поверхні називаються еліптичними. Еліптичним називають і дотик площини до поверхні, якщо площина має лише одну спільну з поверхнею точку. Еліптичні точки мають і інші поверхні, наприклад, еліпсоїд, параболоїд та ін.

А от площина, яка дотикається до конічної чи циліндричної поверхні, або поверхні з ребром звороту, має з нею спільну пряму – твірну поверхні.

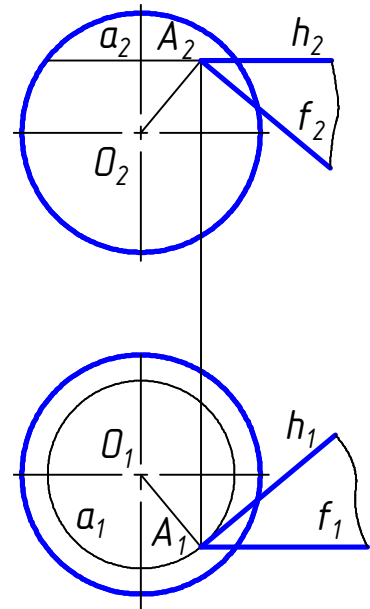


Рис. 9.3

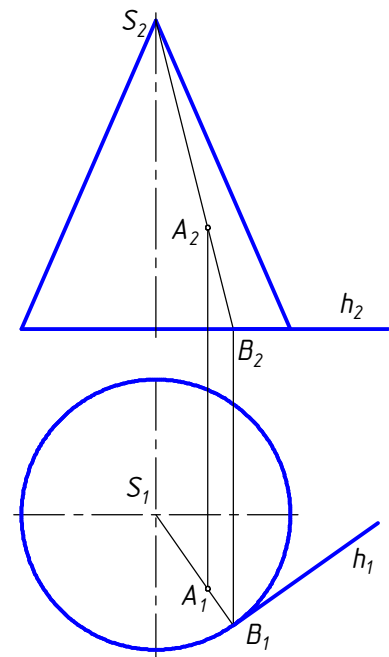


Рис. 9.4

У цьому разі площина дотикається до поверхні в усіх точках, що належать одній твірній. Такі точки називають параболічними і дотикання площини до поверхні – теж параболічним.

На рис. 9.4 показано побудову площини, дотичної до поверхні конуса. На поверхні конуса задано точку  $A(A_1, A_2)$ . Вона побудована за допомогою твірної  $BS(B_1S_1, B_2S_2)$ . Площина, яка дотикається до поверхні конуса у точці  $A$ , має з конусом спільну пряму  $BS$ . Тому достатньо через точку  $B$ , яка належить кривій поверхні конуса, - його основі, - провести дотичну пряму до цієї кривої у точці  $B$ . Твірна  $BS$  і дотична пряма  $h(h_1, h_2)$  визначають дотичну до поверхні конуса площину  $\Gamma(h, BS)$ .

Аналогічно може бути проведена площина  $\Delta(d, KD)$ , яка дотикається до поверхні циліндра у точці  $D(D_1, D_2)$ , побудованій за допомогою твірної  $KD(K_1D_1, K_2D_2)$ , і має з циліндром спільну цю твірну. Дотична площина визначається твірною  $KD$  і прямою  $d(d_1, d_2)$ , дотичною до основи циліндра у точці  $K(K_1, K_2)$  (рис. 9.5).

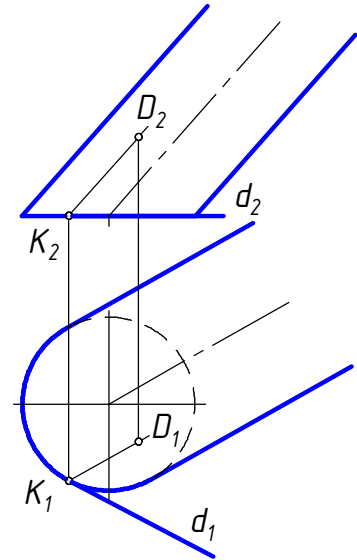


Рис. 9.5

На відміну від опуклих поверхонь, з якими дотичні до них площини не перетинаються, є поверхні, що перетинаються з дотичними до них площинами.

Точки поверхні, в яких дотична площина перетинає поверхню, називаються гіперболічними. Так, наприклад, площина, яка дотикається до гіперболічного параболоїда, перетинає його по двом твірним, площина, дотична до циліндроїда, перетинає його по прямій і кривій лініям.

Підсумовуючи вищесказане, покажемо декілька площин, що дотикаються до поверхні тора (рис. 9.6). Так, профільна площина  $\Gamma(\Gamma_1, \Gamma_2)$  дотикається до поверхні тора у одній точці  $A(A_1, A_2)$ . Таких площин, що мають з тором лише одну спільну точку, можна провести безліч.

Площина  $\Delta(\Delta_2)$ , на якій лежить тор, інакше кажучи, тор дотикається до площини  $\Delta$  по колу  $m$ . Аналогічна площина  $\Lambda(\Lambda_2)$  лежить на торові зверху і дотикається до нього по другому колу  $n$ . Ці два кола (у площинах  $\Delta$  та  $\Lambda$ ) поділяють поверхню тора на опуклу та угнуту частини. Будь-яка площина, що дотикається до тора у опуклій його частині, має з ним спільну одну еліптичну точку.

Площини  $\Delta$  та  $\Lambda$  дотикаються до поверхні тора у його параболічних точках.

Угнута внутрішня частина поверхні тора (між колами  $m$  та  $n$ ) містить на собі тільки гіперболічні точки. Так, площина  $\Sigma(\Sigma_1)$  дотикається до внутрішньої поверхні тора у точці  $B(B_1, B_2)$  і перетинає його по кривій Персея (у



окремому випадку ця крива може бути лемніскаатою Бернуллі) (рис. 9.6, б).

Площина

$\Theta(\Theta_2)$  дотикається до поверхні тора у двох гіперболічних точках  $C(C_1, C_2)$  і  $D(D_1, D_2)$  та перетинає його по двом колам Вілларсо (рис. 9.6, в).

Будь-яка інша площина, яка дотикається до внутрішньої поверхні тора (у гіперболічній точці) перетинається з ним по петлеподібній кривій четвертого порядку (рис. 9.6, г).

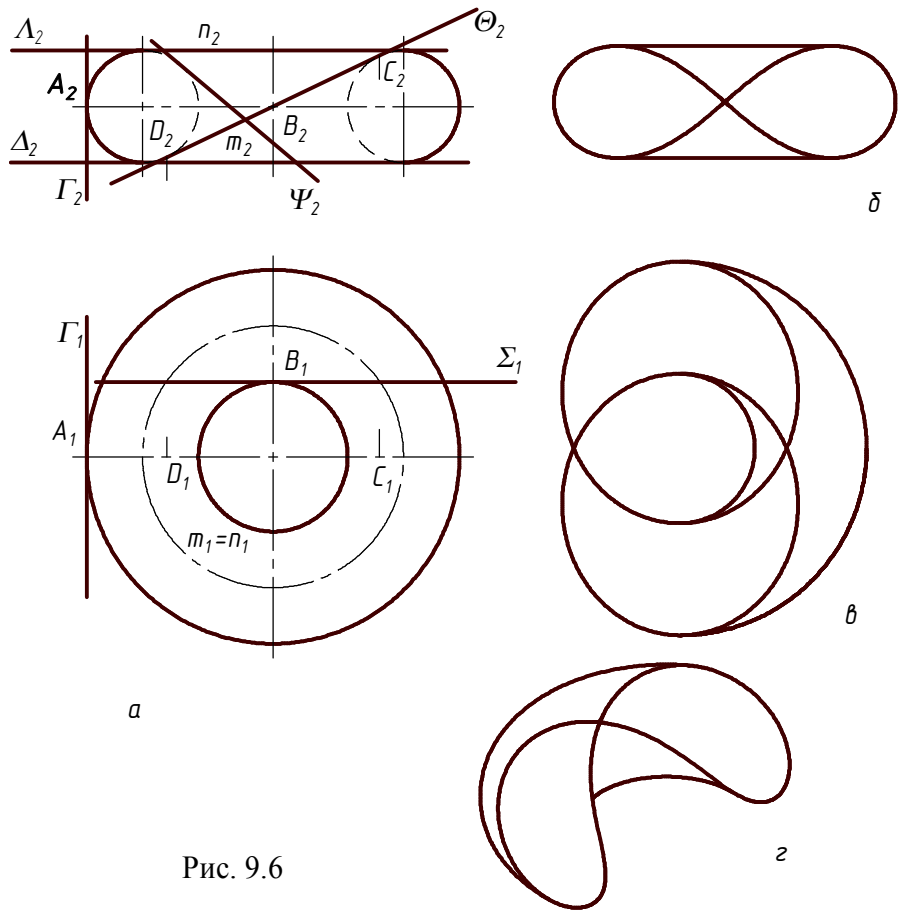


Рис. 9.6

Наведемо декілька прикладів побудови площин, дотичних до кривих поверхонь, таких типів:

- 1) побудова площини, дотичної до поверхні у точці, що належить цій поверхні;
- 2) проведення дотичної до поверхні площини через точку, яка не належить цій поверхні;
- 3) проведення дотичної до поверхні площини через задану пряму;
- 4) проведення дотичної до поверхні площини паралельно заданій прямій;
- 5) проведення дотичної до поверхні площини паралельно заданій площині.

Приклади 1-го типу наведено на рис. 9.2, 9.3, 9.5.

Приклад 1. Через точку  $M$  провести площину, дотичну до поверхні конуса (рис. 9.7).

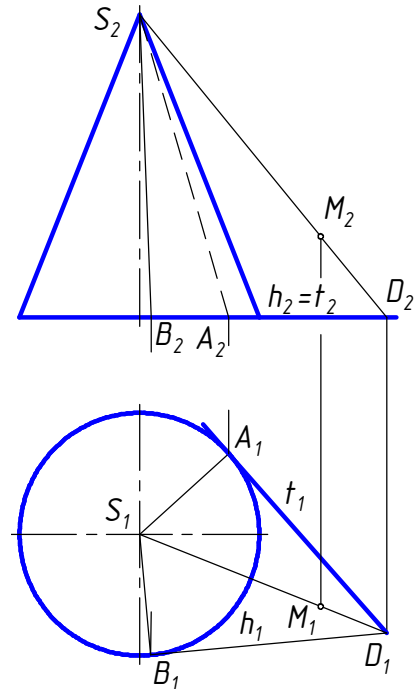


Рис. 9.7

Оскільки будь-яка дотична до конуса площина проходить через його вершину, то у даному випадку дотична площина проходить через пряму  $MS$ . Тому сполучаємо точки  $M$  і  $S$  прямою та знаходимо точку  $D(D_1, D_2)$  перетину її з площиною основи конуса. Через точку  $D$  проводимо дві дотичні до основи конуса прямі  $h(h_1, h_2)$  і  $t(t_1, t_2)$ .

Ці прямі разом з прямою  $SM$  визначають дві дотичні до конуса площини  $\Gamma(h, SM)$  і  $\Delta(t, SM)$ . Точки  $A(A_1, A_2)$  і  $B(B_1, B_2)$  дотику їх до основи конуса сполучаємо з вершиною конуса  $S$ . Твірні конуса  $AS(A_1S_1, A_2S_2)$  та  $BS(B_1S_1, B_2S_2)$  – це прямі дотику площин  $\Gamma$  і  $\Delta$  до поверхні конуса.

Приклад 2. *Через точку  $A$  провести площину, дотичну до поверхні похилого циліндра (рис.9.8).*

Будь-яка площина, що дотикається до поверхні циліндра, має з ним спільну твірну його. Через точку  $A$  можна провести дві площини, дотичні до циліндра. Кожна із них має з циліндром одну спільну твірну і паралельна усім іншим його твірним. Тому через точку  $A(A_1, A_2)$  проводимо пряму, паралельну твірним циліндра, і знаходимо точку  $M(M_1, M_2)$  перетину її з площиною основи циліндра. Через точку  $M$  проводимо дві дотичні до основи циліндра прямі  $h(h_1, h_2)$  та  $t(t_1, t_2)$ . Ці прямі визначають дві дотичні до циліндра площини  $\Gamma(h, AM)$  і  $\Delta(t, AM)$ .

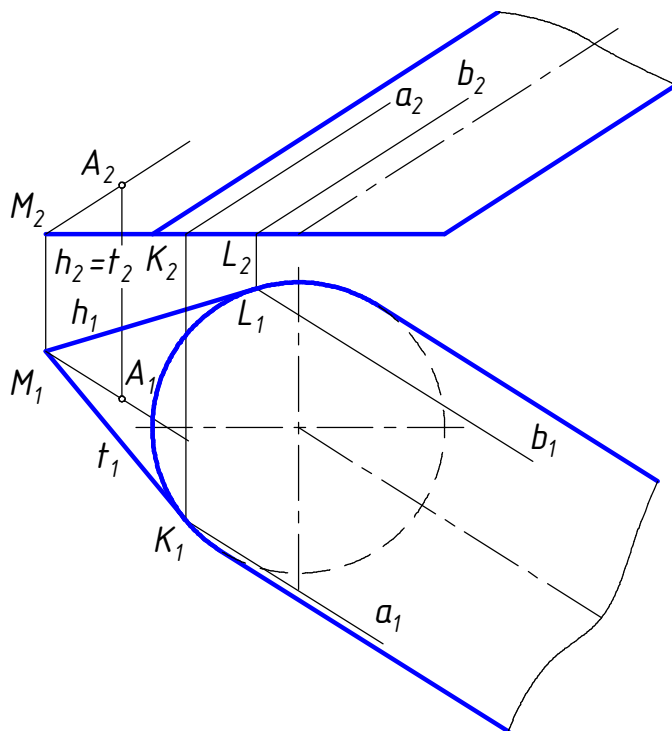


Рис. 9.8

Через точки  $K(K_1, K_2)$  та  $L(L_1, L_2)$  дотику прямих  $t$  і  $h$  проведені твірні  $a(a_1, a_2)$ ,  $b(b_1, b_2)$  циліндра, які належать і дотичним площинам.

Приклад 3. *Через пряму  $a$  провести площину, дотичну до сфери (рис.9.9).*

Через пряму, яка не має спільних точок зі сферою, можна провести дві площини, дотичні до цієї сфери. Для визначення дотичної площини необхідно побудувати на сфері точку дотику, яка разом із заданою прямою  $a$  визначає шукану площину.

Одним із варіантів розв'язання задачі є перетворення креслення способом заміни площин проєкцій так, щоб задана пряма  $a$  стала проєкціовальною.

Тому першим перетворенням замінюємо площину  $\Pi_2$  на площину  $\Pi_4$  так, щоб пряма  $a$  стала лінією рівня  $\Pi_4 \parallel a$ ;  $x_{14} \parallel a_1$ . На прямій  $a$  взято дві точки  $1(1_1, 1_2)$  і  $2(2_1, 2_2)$  та побудовані їхні проекції  $1_4$  і  $2_4$  на площині  $\Pi_4$ . Маємо проекцію  $a_4$  прямої  $a$  на площині  $\Pi_4$ . Другим перетворенням замінюємо площину  $\Pi_1$  на  $\Pi_5$  так, щоб пряма  $a$  стала проєкціювальною:

$\Pi_5 \perp a$ ,  $x_{45} \perp a_4$ . Пряма  $a$  спроектувалась на площину  $\Pi_5$  у одну точку  $a_5$ . Разом із прямою  $a$  побудовані проекції

сфери на площинах  $\Pi_4$  і  $\Pi_5$ . Через проєкцію  $a_5$  прямої проводимо проєкції  $\Gamma_5$  і  $\Delta_5$  площин  $\Gamma$  і  $\Delta$ , дотичних до сфери. Маємо проєкції  $A_5$  і  $B_5$  точок дотику. Точки  $A$  та  $B$  спільно із прямою  $a$  визначають дві дотичні до сфери площини. Зворотним послідовним перетворенням знаходимо проєкції  $A_4$  і  $B_4$ , а потім  $A_1$  і  $B_1$ , та  $A_2$  і  $B_2$ . Таким чином, побудовані дві площини  $\Gamma(A; a)$  і  $\Delta(B; a)$ , дотичні до сфери.

Цю задачу можна розв'язати і іншим способом, наприклад, обертанням навколо ліній рівня. Точки дотику площин, що проходять через пряму  $a$ , і дотикаються до сфери, належать великому колу сфери, яке розташоване у площині, що перпендикулярна до прямої  $a$  і проходить через центр сфери (рис.9.10).

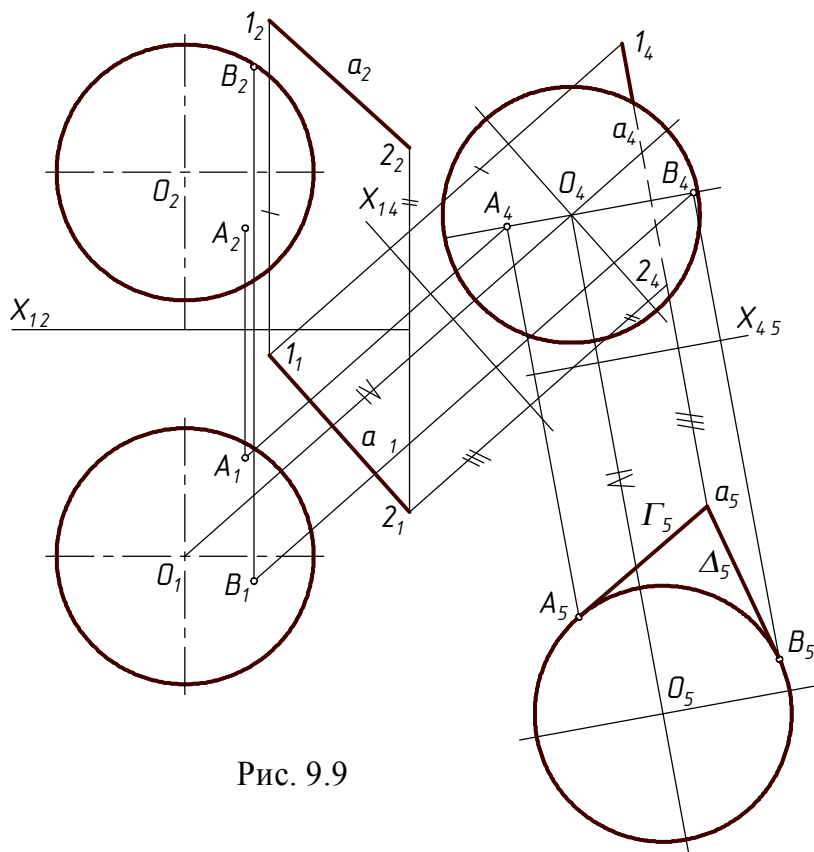


Рис. 9.9

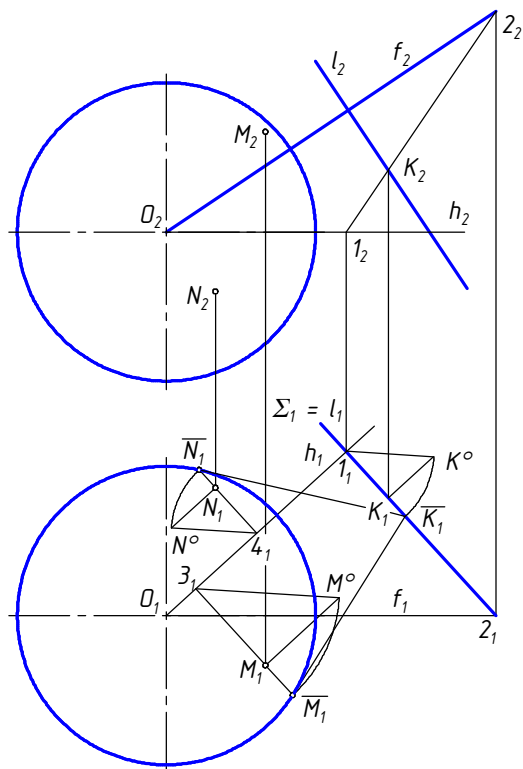


Рис. 9.10

Тому через центр сфери проведено площину  $\Gamma(f; h)$ , перпендикулярно до прямої  $a: h_1 \perp a_1, f_2 \perp a_2$ . Потім побудована точка  $K(K_1, K_2)$  перетину прямої  $a$  із цією площиною:  $K = a \cap \Gamma(f; h)$  ( $a = \Sigma; 12 = \Sigma \cap \Gamma; 12 \cap a = K$ ). Далі точку  $K$  обертаємо навколо горизонталі  $h(h_1, h_2)$  до положення  $\bar{K}_1$  так, щоб вона опинилась у горизонтальній площині, яка проходить через центр сфери. Відтак велике коло, на якому розташовані точки дотику, стає горизонтальним і збігається із зображенням екватора сфери. Тоді через точку  $\bar{K}_1$  проведено прямі, дотичні до екватора сфери. Маємо точки  $\bar{M}_1$  і  $\bar{N}_1$ . Зворотним обертанням повертаємо ці точки у положення  $M_1$  і  $N_1$ . Разом із цим визначаються відрізки  $M^0M_1$  та  $N^0N_1$ , які становлять перевищення точок  $M$  та  $N$  над рівнем горизонталі, а отже і фронтальних проєкцій  $M_2, N_2$ . Таким чином, на поверхні сфери побудовані точки  $M(M_1, M_2)$  та  $N(N_1, N_2)$ , які спільно з прямою  $a(a_1, a_2)$  визначають дві дотичні до сфери площини, що проходять через пряму  $a$ .

Приклад 4. Побудувати площину, дотичну до поверхні конуса і паралельну заданій прямій  $t(t_1, t_2)$  (рис. 9.11).

Задача може мати один розв'язок, якщо пряма  $t$  паралельна якійсь твірній конуса, два розв'язки, коли пряма  $t$  нахилена до площини основи конуса під кутом, меншим за кут нахилу твірних конуса до його основи, і не має жодного розв'язку, якщо пряма  $t$  нахилена до площини основи конуса під кутом, більшим за кут нахилу його твірних до тієї ж основи.

Оскільки дотичні до конуса площини проходять через його вершину, то проводимо через вершину конуса пряму  $a(a_1, a_2)$ , паралельну заданій прямій і знаходимо точку  $M(M_1, M_2)$  перетину її з площиною основи конуса.

Через точку  $M$  проводимо дві дотичні до основи конуса прямі  $t(t_1, t_2)$  і  $d(d_1, d_2)$ . Ці дотичні разом із прямою  $SM(S_1M_1, S_2M_2)$  визначають дві дотичні до конуса площини  $\Gamma(a; t)$  та  $\Delta(a; d)$ . Вони дотикаються до конуса по його твірним  $SA(S_1A_1, S_2A_2)$   $SB(S_1B_1, S_2B_2)$ .

Приклад 5. Побудувати дотичні до похилого циліндра площини, які паралельні прямій  $a$  (рис. 9.12).

Через задану пряму  $a$  проводимо площину, паралельну твірним циліндра. Для цього через будь-яку точку прямої  $a$ , наприклад,  $A(A_1, A_2)$ , проводимо пряму  $b(b_1, b_2)$ , що паралельна твірним циліндра. У площині  $\Gamma(a, b)$  проводимо пряму  $12(1_12_1, 1_22_2)$  паралельну площині основи циліндра.

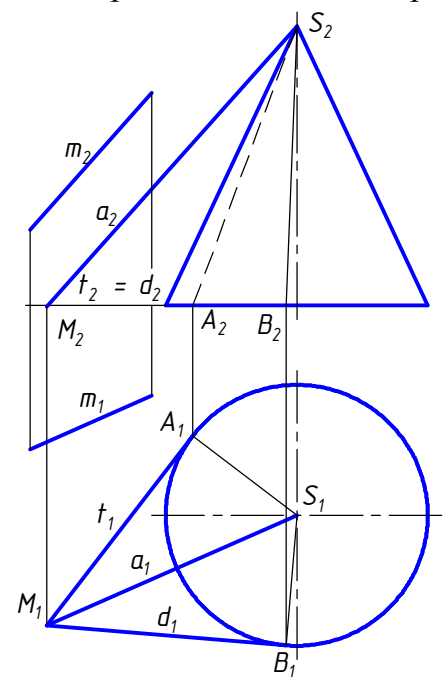


Рис. 9.11

Паралельно прямій 12 проводимо дві дотичні до основи циліндра прямі  $t(t_1, t_2)$  і  $d(d_1, d_2)$ . Через точки  $K(K_1, K_2)$  і  $L(L_1, L_2)$  дотику цих прямих проводимо твірні  $m(m_1, m_2)$  і  $n(n_1, n_2)$  циліндра. Ці твірні разом з дотичними  $t$  і  $d$  визначають дві площини  $\Delta(m; t)$  і  $\Delta(n; d)$ , дотичні до циліндра.

Приклад 6. Побудувати дотичні до сфери площини, паралельні прямій  $a$ . Точки дотику площин мають бути на паралелі сфери  $k$  (рис.9.13).

Множина усіх площин, що дотикаються до сфери і паралельні заданій прямій, - це сукупність площин, які дотикаються до сфери у точках великого кола, площина якого перпендикулярна до заданої прямої. Для однозначності розв'язку в умові задачі подано обмеження - точки дотику шуканої площини мають належати заданій паралелі сфери.

Множина усіх площин, дотичних до сфери у точках, що належать паралелі  $k$ , - це площини, що дотикаються до конуса, який у свою чергу дотикається до сфери по паралелі  $k$ . Із цієї множини площин необхідно вибрати тільки ті, що паралельні прямій  $a$ . Така задача нами розглянута на рис. 9.11.

Отже, спочатку будуємо вершину названого конуса. Для цього проводимо його крайню твірну  $b(b_1, b_2)$ , яка дотикається до головного меридіана сфери у точці перетину його із паралеллю  $k(k_1, k_2)$ . Твірна  $b$  перетинається з вертикальною віссю сфери у точці  $S(S_1, S_2)$  - вершині конуса. Далі через точку  $S$  проводимо пряму  $m(m_1, m_2)$ , паралельну прямій  $a(a_1, a_2)$ , і знаходимо точку  $M(M_1, M_2)$  перетину її з площиною паралелі  $k$ . Через точку  $M$  проводимо дві дотичні до паралелі  $k$  прямі  $c(c_1, c_2)$  і  $d(d_1, d_2)$ . Ці дві дотичні прямі разом із прямою  $m$  визначають дві площини  $\Gamma(c, m)$  та  $\Delta(d, m)$ , які дотикаються до сфери у точках, що належать паралелі  $k$ , і паралельні прямій

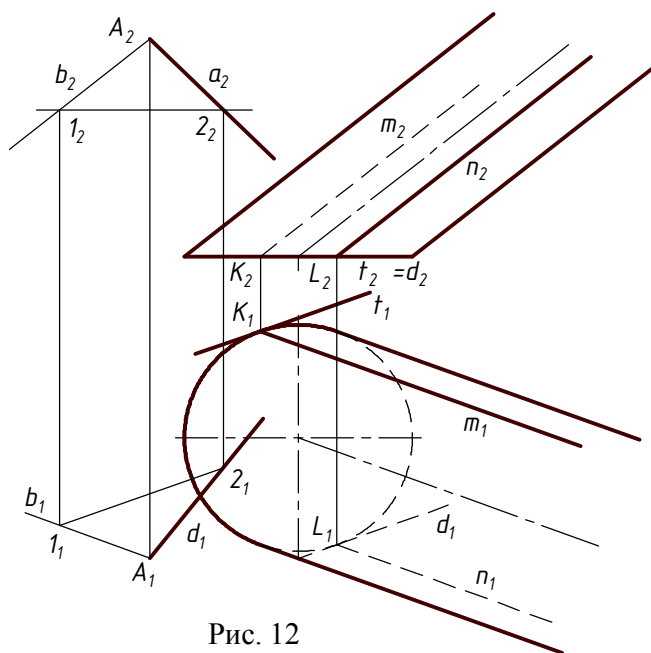


Рис. 12

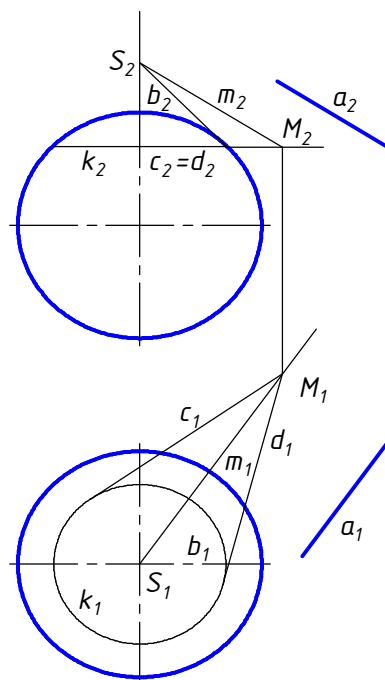


Рис. 9. 13

$a$  (точки дотику не позначені).

Приклад 7. Побудувати дотичну до поверхні тора площину, паралельну заданій площині  $\Delta(f; h)$  (рис. 9.14).

Обертанням навколо вертикальної осі тора повертаємо задану площину  $\Delta$  до положення фронтально проєкціювальної площини. Для цього повертаємо горизонталь  $h(h_1, h_2)$  площини  $\Delta$  до фронтально проєкціювального положення  $\bar{h}(\bar{h}_1, \bar{h}_2)$ . Це виконано за допомогою точки  $1(1_1)$ , що належить горизонталі  $h$ . Точка  $1$  повернена до положення  $\bar{1}_1$ , де вона належить фронтальній площині, що проходить через вертикальну вісь тора. Фронталь  $f(f_1, f_2)$  повернута у положення  $\bar{f}_1$  за допомогою точки  $2(2_1, 2_2)$ , яка повернута до положення  $\bar{2}_1$ . У новому положенні площина  $\bar{\Delta}(\bar{f}; \bar{h})$  спроекціювалася у свій слід-проекцію  $\bar{\Delta}_2$  на площині  $\Pi_2$ .

Паралельно проєкції  $\bar{\Delta}_2$  площини  $\bar{\Delta}$ , проводимо дотичну до головного меридіана тора прямою  $\bar{d}(\bar{d}_1, \bar{d}_2)$ . Маємо точку  $\bar{T}_2$  дотику прямої  $\bar{d}$  до головного меридіана і точку  $7(7_1, 7_2)$  перетину прямої  $\bar{d}$  з вертикальною віссю тора.

Точку  $\bar{T}(\bar{T}_1, \bar{T}_2)$  повертаємо зворотним обертанням у положення  $T(T_1, T_2)$ , повертаючи її на такий самий кут, на який була повернута площина  $\Delta$  у положення  $\bar{\Delta}$ . Дотична  $\bar{d}$  повертається у положення  $d(d_1, d_2)$  (проходить через точки  $T_1$  і  $7_1$ ). Через точку  $T(T_1, T_2)$  проводимо дотичну  $t(t_1, t_2)$  до паралелі тора  $\bar{T}_1 T_1$  перпендикулярно до прямої  $d$  ( $t_1 \perp d_1$ ). Прямі  $t(t_1, t_2)$  і  $d(d_1, d_2)$  визначають площину  $\Gamma(d; t)$ , дотичну до тора і паралельну заданій площині  $\Delta(f; h)$ .

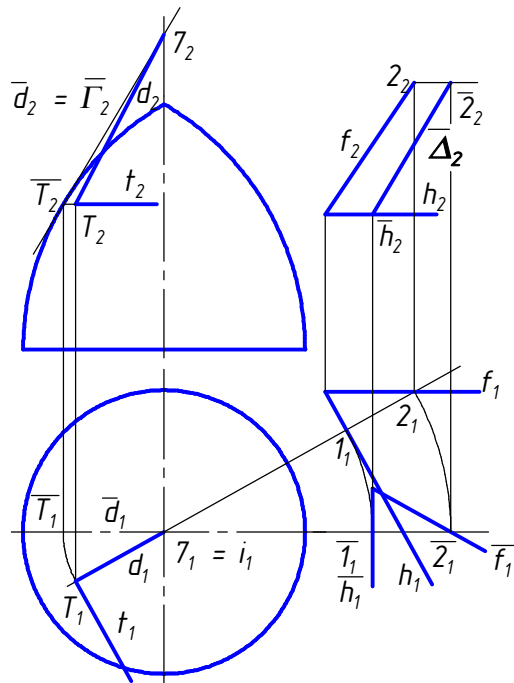


Рис. 9.14

### Запитання для самоперевірки

1 Якими геометричними елементами може бути визначена площина, яка дотикається до заданої поверхні?

2 Що означають поняття: „еліптичне дотикання”, „параболічне дотикання”, „гіперболічне дотикання”?

3 Що є спільними геометричними елементами у поверхні і дотичної до неї площини при еліптичному (параболічному, гіперболічному) дотиканні? Назвіть приклади поверхонь для таких випадків.

4 Сформулюйте план побудови площини, яка дотикається до сфери і паралельна заданій площині.

5 Сформулюйте план побудови площини, дотичної до конуса і паралельної заданій прямій.

6 Сформулюйте план побудови площини, яка дотикається до циліндра і проходить через задану точку.

7 Сформулюйте план побудови площини, яка дотикається до сфери і походить через зовнішню пряму.

8 Сформулюйте план побудови площини, яка дотикається до циліндра і паралельна зовнішній прямій.

9 Сформулюйте план побудови площини, яка дотикається до сфери і паралельна зовнішній прямій та проходить через точку, що не належить цій прямій.

10 Побудуйте площину, яка дотикається до поверхні тора (кільця) у його гіперболічній точці.

## 10 ПЕРЕТИН КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ З ПЛОЩИНОЮ. РОЗГОРТАННЯ КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ

Лінія перетину кривої поверхні площиною є плоскою кривою лінією, вид якої залежить від виду кривої поверхні та розташування площини відносно поверхні. Лінія перетину може бути замкнутою чи незамкнутою, опуклою чи опукло угнутою. У деяких випадках вона розпадається на дві прямі лінії. Методика побудови лінії перетину залежить від положення поверхні та січної площини відносно площин проекцій. Так, якщо твірні поверхні перпендикулярні до якої-небудь площини проекцій, а січна площина перпендикулярна до іншої площини, то на двох площинах проекцій уже є проекції лінії перетину і розв'язання задачі полягає у розпізнанні та позначенні точок лінії перетину, а також побудові, якщо це необхідно, третьої проекції її.

Якщо січна площина перпендикулярна до якої-небудь площини проекцій, то на останній проекція лінії перетину збігається зі слідом-проекцією площини. Інші проекції лінії перетину можуть бути побудовані за умови належності її заданій поверхні, або за точками перетину твірних поверхні з січною площиною.

Якщо ж січна площина розташована довільно щодо площин проекцій, а твірні поверхні перпендикулярні до якої-небудь площини проекцій (це циліндрична поверхня), то на цю площину проекцій лінія перетину проекціюється на слід-проекцію заданої поверхні. Інші проекції лінії перетину можуть бути побудовані за умови належності її заданій площині.

Коли ж і січна площина і поверхня, що нею перетинається, не є проєкціювальними, то проекції лінії перетину будуються за допомогою допоміжних площин (рис. 10.1). Суть цього способу полягає у тому, що січна площина (наприклад,  $\Gamma$ ) і поверхня  $\Phi$  перетинаються якою-небудь допоміжною площиною, наприклад  $\Sigma$ , знаходяться лінія  $m$  перетину січної площини  $\Gamma$  з допоміжною площиною  $\Sigma$ , а також лінія  $n$  перетину допоміжної площини  $\Sigma$  з поверхнею  $\Phi$  і позначаються точки перетину ліній  $m$  та  $n$ . Ці точки належать шуканій лінії перетину. У символічній формі це може бути записано так:

$$\text{Дано: } \Gamma \cap \Phi = l?$$

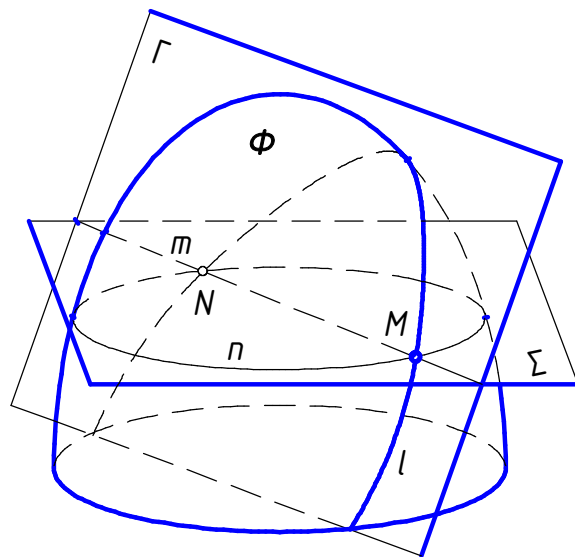


Рис. 10.1



- Побудова: 1. Вводимо  $\Sigma$   
 2. Будуємо  $m = \Sigma \cap \Gamma$ ,  $n = \Sigma \cap \Phi$   
 3. Позначаємо  $M$ ,  $N = m \cap n$

Цей алгоритм повторюється доти, доки буде побудована достатня кількість точок лінії перетину, які потім сполучаються між собою плавною кривою. Але будь-яка побудова лінії перетину починається з визначення опорних точок: найвищої та найнижчої, найближчої та найдалшої, точок дотику проєкцій лінії перетину до граничних твірних (вони є границями видимості лінії перетину) і т. п. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Побудувати проєкції лінії перетину площини  $\Gamma(f; h)$  з прямим круговим циліндром, та розгортку поверхні циліндра з нанесенням лінії перетину (рис. 10.2).

Лінія перетину є еліпсом, горизонтальна проєкція якого збігається з колом - проєкцією бічної поверхні циліндра. Фронтальну проєкцію еліпса можна побудувати за допомогою прямих, що належать січній площині, або з використанням допоміжних площин. Так, наприклад, за допомогою фронтальної площини  $\Delta (\Delta_1)$  побудовані точки  $A(A_1, A_2)$  і  $B(B_1, B_2)$  дотику фронтальної проєкції еліпса до граничних твірних циліндра. Площина  $\Delta$  перетинає горизонталь  $h(h_1, h_2)$  у точці  $1(1_1, 1_2)$ , а площину  $\Gamma$  - по її фронталі, яка проходить через точку  $1$ . Ця фронталь перетинає крайні твірні циліндра у точках  $A(A_2)$  і  $B(B_2)$  ( $1_2 A_2 \parallel f_2$ ). Фронталь  $1A$  перетинає вісь циліндра у точці  $2(2_1, 2_2)$ .

За допомогою площини  $\Lambda (\Lambda_1)$ , перпендикулярної до горизонталі  $h$ , побудовані найвища  $C(C_1, C_2)$  та найнижча  $D(D_1, D_2)$  точки еліпса, які належать лінії найбільшого нахилу площини  $\Gamma$ , що перетинається з віссю циліндра. Відрізок  $CD$  ( $C_1 D_1, C_2 D_2$ ) є великою віссю еліпса. Площина  $\Lambda$  перетинає горизонталь  $h$  ( $\Lambda \perp h$ ) у точці  $3(3_1, 3_2)$ , а січну площину  $\Gamma$  по її лінії найбільшого нахилу до площини проєкцій  $\Pi_1$ . З циліндром площина  $\Lambda$  перетинається по його твірним, на яких розташовані точки  $C$  і  $D$ . Через точки  $3_2$  і  $2_2$  проводимо проєкцію вище згаданої лінії найбільшого нахилу і за лініями зв'язку знаходимо точки  $C_2$  і  $D_2$ . Кінці малої осі еліпса (точки  $E(E_1, E_2)$  та  $F(F_1, F_2)$ ) належать горизонталі січної площини, яка проходить через точку  $2(2_1, 2_2)$ .

Через вісь циліндра проводимо площину  $\Theta (\Theta_1) \parallel h(h_1)$ , яка перетинає циліндр по його твірним  $8E(8_1 E_1, 8_2 E_2)$  та  $12F(12_1 F_1, 12_2 F_2)$ . Через точку  $2_2$  проводимо відрізок прямої паралельно  $h_2$  і за лініями зв'язку знаходимо на ньому точки  $E_2$  і  $F_2$ . Будь-яка проміжна точка еліпса може бути побудована так само, як побудована точка  $M$  за допомогою площини  $\Sigma (\Sigma_1)$ :  $\Sigma_1 \parallel f_1$ ,  $\Sigma_1 \cap 3_1 2_1 = 4_1$ ,  $M_1 4_1 \parallel f_1$ ,  $M_2 4_2 \parallel f_2$ .

Розгортка бічної поверхні циліндра – це прямокутник, висота якого дорівнює висоті циліндра, а довжина - довжині кола основи циліндра. Основу циліндра поділено на 8 частин, які відкладені на горизонтальній стороні

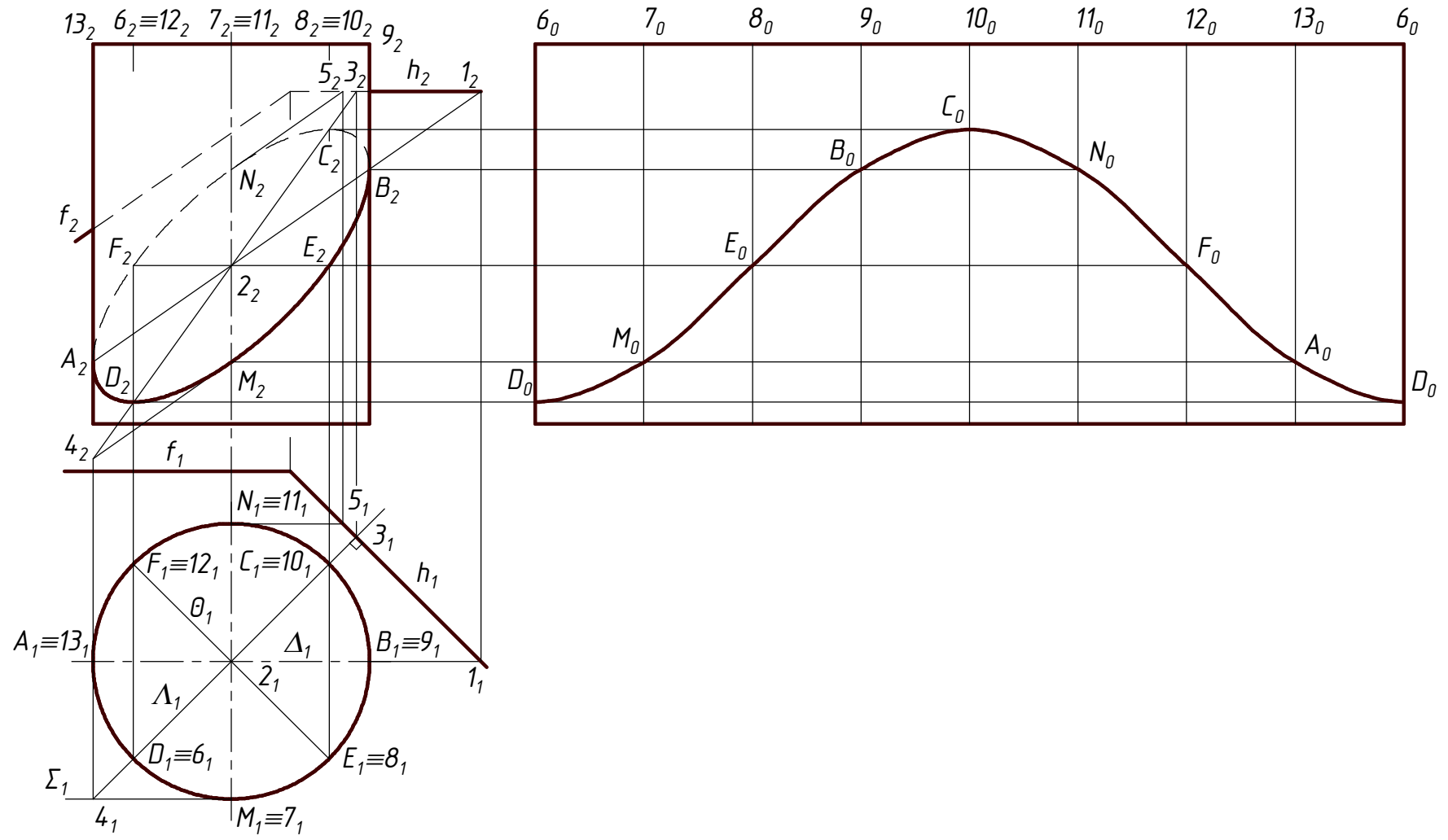


Рис. 10.2

прямокутника. Маємо точки  $6_0, 7_0, \dots, 13_0, 6_0$ . Через ці точки проведено вертикально твірні циліндра і на них відкладені відсічені відрізки їх. Таким чином побудовані точки  $D_0, M_0, E_0, B_0, C_0, N_0, F_0, A_0, D_0$ . Це точки лінії перетину на розгортці, яка має вигляд синусоїди.

*Приклад 2. Побудувати проєкції лінії перетину площини  $\Delta(f; h)$  і похилого циліндра з фронтальними твірними (рис. 10.3).*

Розв'язування задачі полягає у побудові точок перетину твірних циліндра з площиною  $\Delta$ . Горизонтальну проєкцію кола основи циліндра поділяємо на 12 рівних частин, позначаємо точки  $1_1, 2_1, \dots, 12_1$ . Знаходимо і позначаємо їхні фронтальні проєкції  $1_2, 2_2, \dots, 12_2$  (за браком місця не всі точки позначені). На колі основи циліндра знаходимо найбільш та найменш віддалені від горизонталі  $h(h_1, h_2)$  точки  $13(13_1, 13_2)$  та  $14(14_1, 14_2)$  – це точки перетину кола основи циліндра з перпендикуляром до горизонталі  $h$ , проведеним через центр кола. Через точки  $1, 2, \dots, 14$  проведені твірні циліндра. Спочатку побудовані точки  $A(A_1, A_2)$  і  $B(B_1, B_2)$  дотику фронтальної проєкції лінії перетину до граничних твірних циліндра. Через ці твірні (їхні горизонтальні проєкції збігаються з проєкцією осі циліндра) проведена фронтальна площина  $\Gamma(\Gamma_1)$ . Вона перетинає горизонталь  $h(h_1, h_2)$  площини  $\Delta$  у точці  $15(15_1, 15_2)$ , а площину  $\Delta$  по її фронталі  $15A(15_1A_1, 15_2A_2)$  ( $15A \parallel f$ ). На проєкції  $h_2$  горизонталі знаходимо проєкцію  $15_2$  точки  $15$  і через неї проводимо фронталь  $15A(15_2A_2)$  площини  $\Gamma$ , яка перетинає крайні твірні циліндра у точках  $A_2, B_2$ . За лініями зв'язку будуємо їхні горизонтальні проєкції  $A_1, B_1$ .

Точки  $C(C_1, C_2)$  і  $D(D_1, D_2)$  дотику горизонтальної проєкції лінії перетину до крайніх твірних циліндра побудовані за допомогою фронтальних площин  $\Lambda(\Lambda_1)$  і  $\Theta(\Theta_1)$ , проведених через 4-у та 10-у твірні циліндра. Вони перетинають горизонталь  $h$  у точках  $16(16_1, 16_2)$  та  $17(17_1, 17_2)$ . Через точки  $16_2$  та  $17_2$  проводимо фронталі площини  $\Delta$ . Ці фронталі перетинають 4-у та 10-у твірні циліндра у точках  $C(C_1, C_2)$  і  $D(D_1, D_2)$ , у яких горизонтальна проєкція лінії перетину дотикається до граничних твірних.

Найвища і найнижча точки лінії перетину розташовані на найбільш і найменш віддалених від горизонталі  $h$  твірних циліндра, які проходять через точки  $13(13_1)$  і  $14(14_1)$ . А далі побудовано точки  $E(E_1, E_2)$  і  $F(F_1, F_2)$  перетину цих твірних з площиною  $\Delta$  за допомогою фронтальних площин  $\Sigma(\Sigma_1)$  і  $\Psi(\Psi_1)$ :  $\Sigma \cap h = 18(18_1, 18_2)$ ,  $\Psi \cap h = 19(19_1, 19_2)$ ;  $18E \parallel f$  ( $18_2E_2 \parallel f_2$ ),  $19F \parallel f$  ( $19_2F_2 \parallel f_2$ ).

Побудова проміжних точок лінії перетину показана на прикладі точок  $M$  і  $N$ . Через точки  $2(2_1)$  і  $6(6_1)$  основи циліндра проведена фронтальна площина  $\Omega(\Omega_1)$ , яка перетинає горизонталь  $h$  у точці  $20(20_1, 20_2)$ , а циліндр - по його твірних, що проходять через точки  $2$  і  $6$ . Через точку  $20$  проведена фронталь, яка паралельна  $f(f_2)$  і перетинає ці твірні у точках  $M(M_1, M_2)$  і  $N(N_1, N_2)$ .

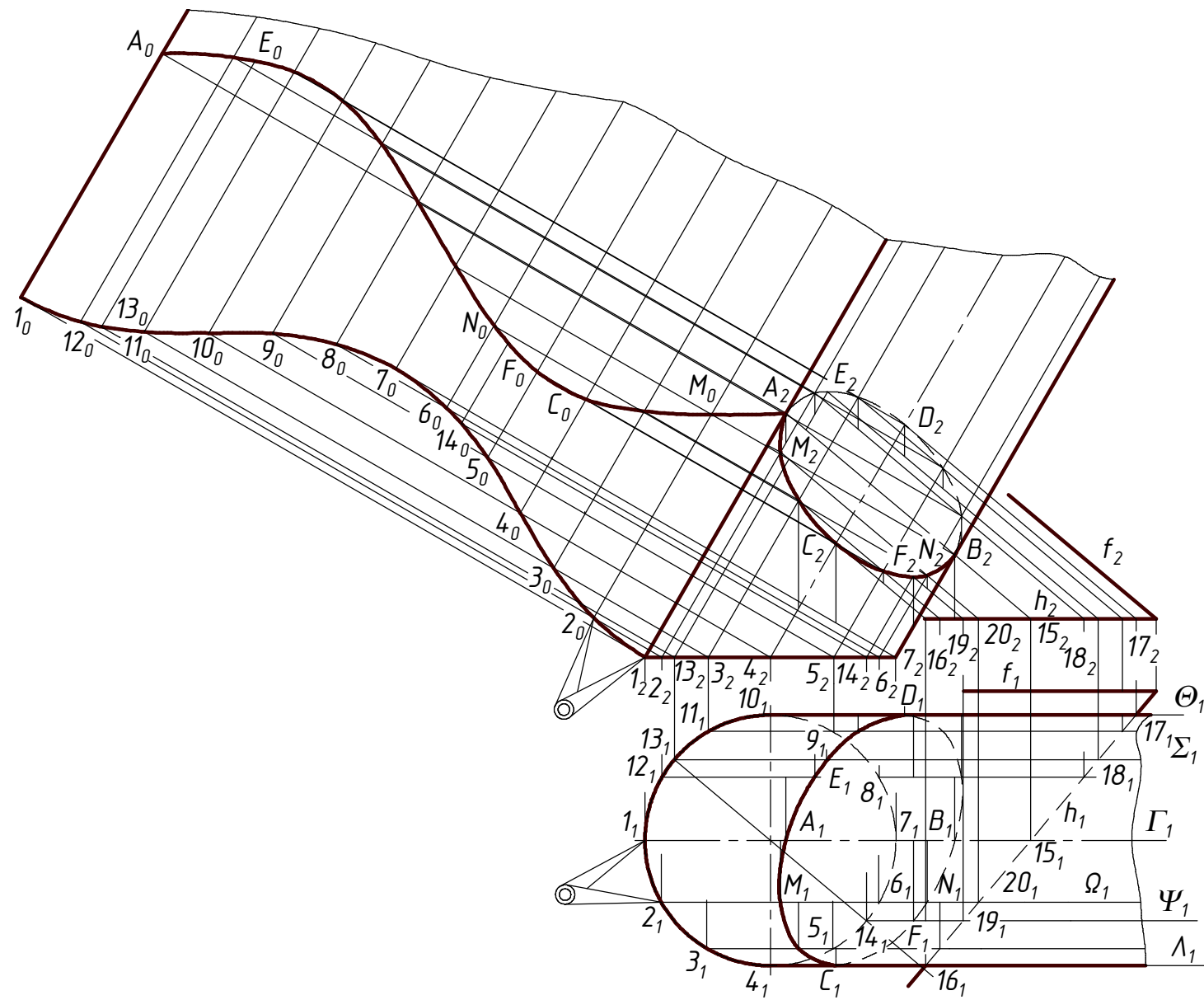


Рис. 10.3

Розгортка поверхні циліндра побудована способом розгортання, оскільки твірні циліндра паралельні фронтальній площині проєкцій. Через точки  $1_2, 2_2, \dots, 7_2$  проведені перпендикуляри до твірних циліндра і на цих перпендикулярах за допомогою циркуля (на рис. 10.3 показаний символічно) зроблено засічки  $1_2 2_0 = 1_1 2_1, 2_0 3_0 = 2_1 3_1, \dots, 12_0 1_0 = 12_1 1_1$ ). Через ці точки проведено зображення твірних циліндра на розгортці (паралельно їхнім фронтальним проєкціям), а самі точки сполучені плавною кривою – синусоїдою.

Потім за допомогою прямих, перпендикулярних до твірних циліндра, точки лінії перетину перенесено на розгортку на відповідні твірні. Маємо точки  $M_0, C_0, F_0, N_0, B_0, D_0, E_0, A_0$ . Сполучаємо їх плавною кривою – це теж синусоїда.

### 10.1 Конічні перерізи

У перетині площини з круговим конусом можуть утворитися різні криві (рис. 10.4): коло, якщо січна площина перпендикулярна до осі конуса (пл.  $\Gamma(\Gamma_2)$ ); еліпс, якщо січна площина перетинає усі твірні конуса, не проходить через його вершину і не перпендикулярна до його осі (пл.  $\Lambda(\Lambda_2)$ ); дві прямі (твірні конуса), якщо площина проходить через вершину конуса і перетинає його основу; парабола, якщо січна площина паралельна одній твірній конуса (пл.  $\Sigma(\Sigma_2)$ ); гіпербола, якщо січна площина  $\Theta(\Theta_2)$  паралельна двом твірним конуса.

У конічній поверхні дві частини, що розташовані по різні боки від її вершини. Коли січна площина  $\Sigma$  паралельна тільки одній твірній конуса, то вона перетинає всі його твірні, крім однієї, причому лінія перетину знаходиться тільки на одній частині конічної поверхні. Якщо січна площина  $\Theta$  паралельна двом твірним конічної поверхні, то вона перетинає усі інші його твірні і точки перетину розташовані на обох частинах поверхні, утворюючи гіперболу.

Вище названі лінії перетину конічної поверхні з площиною називаються *конічними перерізами*. Проекції лінії перетину конуса з площиною можуть бути побудовані за точками перетину твірних конуса з площиною, або за точками перетину його паралелей з січною площиною.

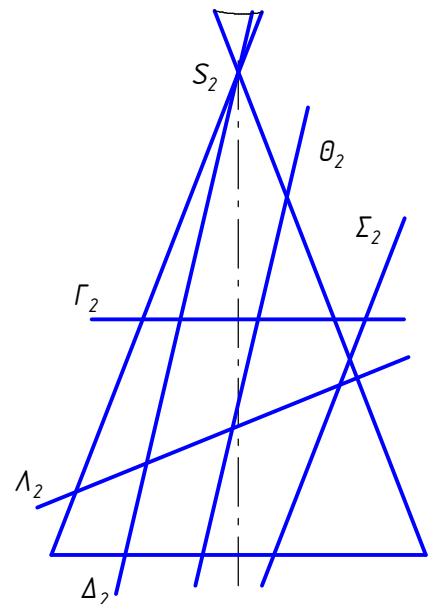


Рис. 10.4

Приклад 3. Побудувати проєкції лінії перетину конуса фронтально проєкціовальною площиною  $\Gamma(\Gamma_2)$  та розгортку бічної поверхні конуса з нанесенням лінії перетину (рис. 10.5).

Основа конуса поділена на 12 рівних частин і проведені твірні  $1S(1_1S_1, 1_2S_2)$ , ... ,  $12S(12_1S_1, 12_2S_2)$ . Найнижчу  $A(A_1, A_2)$  і найвищу  $B(B_1, B_2)$  точки видно безпосередньо на фронтальній проекції. Точка  $A$  знаходиться на крайній твірній  $1S$  і її горизонтальна проекція знаходиться за лінією зв'язку на проекції  $1_1S_1$  цієї твірної. Аналогічно побудована і проекція  $B_1$  точки  $B$  на проекції  $7_1S_1$  твірної  $7S$ . Відрізок прямої  $AB(A_1B_1, A_2B_2)$  - це велика вісь еліпса. Кінці  $C(C_1, C_2)$  і  $D(D_1, D_2)$  малої осі побудовані як точки перетину з площиною  $\Gamma$  паралелі  $a$  конуса, яка проходить через точки  $C$  і  $D$ . Для цього через середину відрізка  $A_2B_2$  (точку  $C_2 \equiv D_2$ ) проведена площина  $\Delta(\Delta_2)$ , яка перетинає конус по паралелі  $a(a_1, a_2)$ . Проекції  $C_1$  і  $D_1$  знайдені за лініями зв'язку на проекції  $a_1$  паралелі. Побудова точок  $C$  і  $D$  може бути пояснена дещо інакше. Конус і січну площину  $\Gamma(\Gamma_2)$  перетинаємо допоміжною площиною - посередником  $\Delta(\Delta_2)$ . Ця площина перетинає конус по колу  $a(a_1, a_2)$ , а площину  $\Gamma$  по прямій  $CD(C_1D_1, C_2D_2)$ . У перетині кола  $a(a_1)$  і прямої  $CD(C_1D_1)$  маємо точки  $C(C_1)$  і  $D(D_1)$ .

Проміжні точки  $M(M_1, M_2)$  і  $N(N_1, N_2)$  побудовані як точки перетину твірних  $5S(5_1S_1, 5_2S_2)$  і  $9S(9_1S_1, 9_2S_2)$  з площиною  $\Gamma(\Gamma_2)$ :  $M_2 = 5_2S_2 \cap \Gamma_2$ ,  $N_2 = 9_2S_2 \cap \Gamma_2$ . Точки  $M_1$  і  $N_1$  знайдені за лініями зв'язку:  $M_1 = 5_1S_1 \cap M_1M_2$ . Слід зауважити, що методика побудови точок  $M$  і  $N$  забезпечує тим точніший результат, чим ближче твірні, на яких будуються точки, до твірних  $1S(1_1S_1, 1_2S_2)$  і  $7S(7_1S_1, 7_2S_2)$ .

Методика, яка застосована для побудови точок  $C$  і  $D$  дає тим точніший результат, чим ближче ці точки до твірних  $4S(4_1S_1, 4_2S_2)$  та  $10S(10_1S_1, 10_2S_2)$ . До речі, точки  $C_1$  і  $D_1$  можуть бути побудовані так само як і точки  $M_1$  та  $N_1$  за допомогою твірних  $13S, 14S$ .

Розгортка конуса є сектором круга з кутом, який можна обчислити за формулою:  $\Phi = 360 * (R / l)$ , де  $R$  - радіус основи конуса,  $l$  - довжина його твірної.

На вільному місці вибираємо точку  $S_0$  і з неї як із центра проводимо дугу кола радіусом  $1_2S_2$ . На цій дузі відкладаємо 12 частин, на які поділено основу конуса, маємо точки  $1_0, 2_0, \dots, 12_0, 1_0$ . Через ці точки проводимо зображення твірних конуса  $1_0S_0, 2_0S_0, \dots, 12_0S_0, 1_0S_0$  і на них наносимо точки лінії перетину:  $1_0A_0 = 1_2A_2, 7_0B_0 = 7_2B_2$ . Точки  $M$  і  $N$  повертаємо навколо осі конуса до розташування їх на твірній  $7S(7_2S_2)$ . Це зроблено для визначення дійсної довжини відрізків  $SM$  і  $SN$  твірних  $5S$  і  $9S$ :  $7_2 \overline{M}_2 = 5M = 9N$ . На розгортці на лініях  $5_0S_0$  і  $9_0S_0$  відкладаємо відрізки  $5_0M_0 = 7_2 \overline{M}_2, 9_0N_0 = 7_2 \overline{M}_2$ .

Точки  $C_0$  і  $D_0$  побудовані за допомогою додаткових проекцій твірних  $S_113_1, S_114_1$  конуса, які проведено через точки  $C_1$  і  $D_1$ . Інші точки лінії перетину побудовані на розгортці аналогічно точкам  $M_0$  та  $N_0$ .

Коли конус перетинається площиною загального положення (рис. 10.6), то для спрощення побудови лінії перетину доцільно перетворити креслення так,

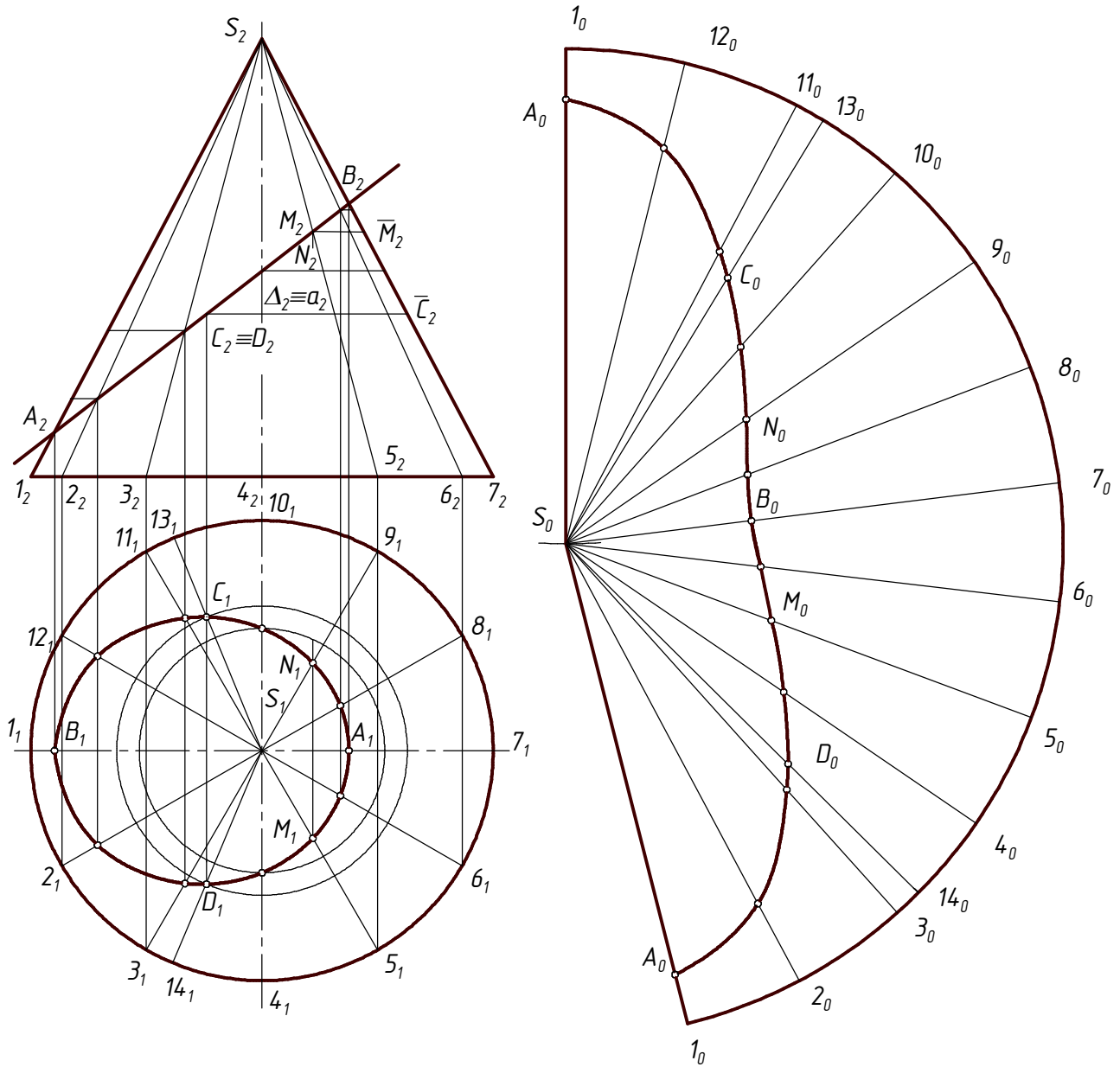


Рис. 10.5

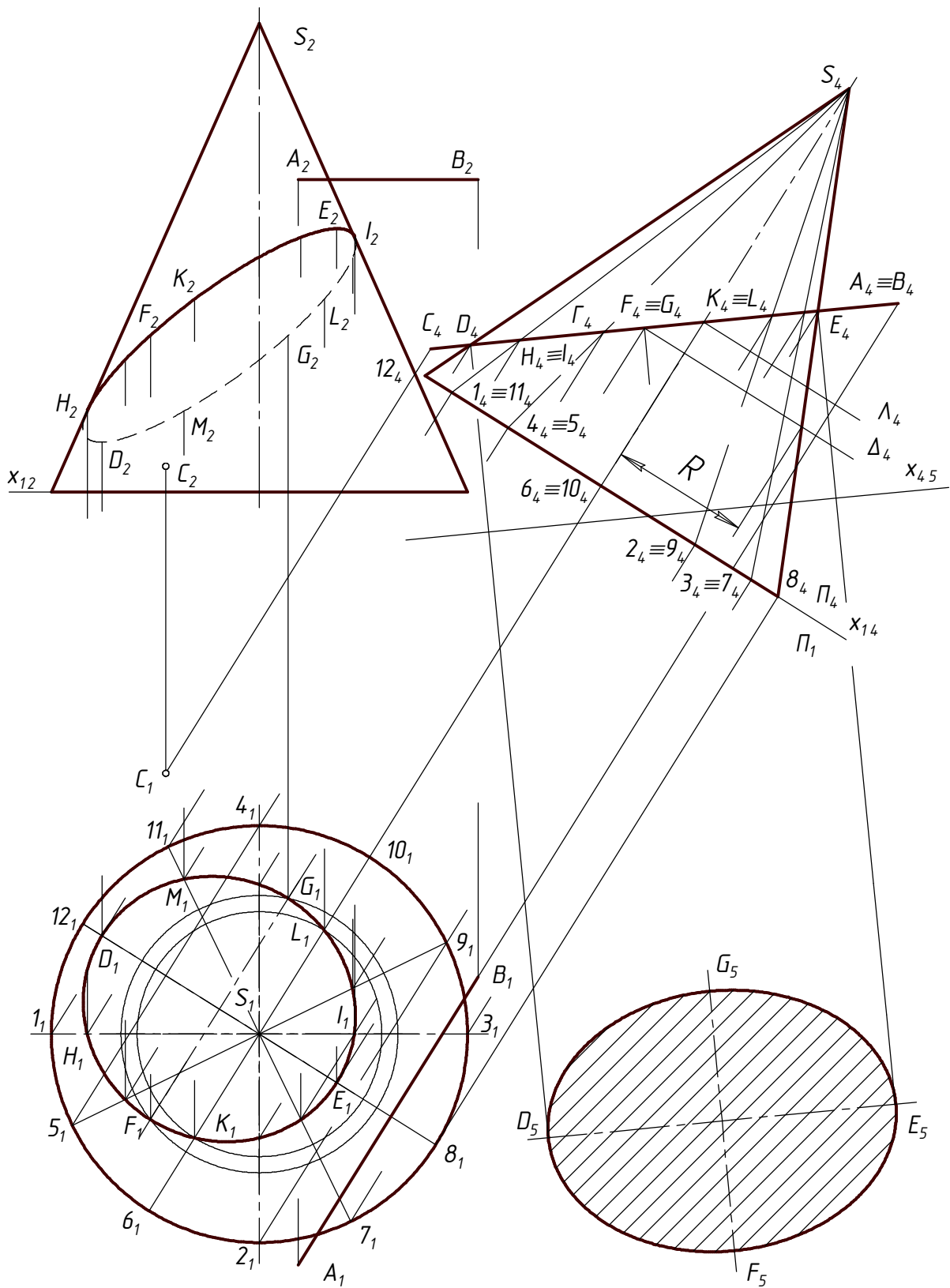


Рис. 10.6

щоб січна площина стала проєкціювальною, тобто звести його до випадку, показаному на рис. 10.5.



Приклад 4. Побудувати проекції лінії перетину конуса площиною  $\Gamma(AB; C)$ , поданою горизонтальною прямою  $AB(A_1B_1, A_2B_2)$  та точкою  $C(C_1, C_2)$ . (рис. 10.6)

Площина  $\Pi_2$  замінена площиною  $\Pi_4 \perp \Pi_1, \Pi_4 \perp AB$ . Задача розв'язується на площинах проекцій  $\Pi_1, \Pi_4$ , як це розглянуто на рис. 9.5, а потім лінія перетину будується на площині проекцій  $\Pi_2$ .

Площина  $\Gamma$  спроекціювалася на  $\Pi_4$  у пряму  $\Gamma_4$ . На горизонтальній проекції позначені твірні  $1_1S_1, 2_1S_1, 3_1S_1, 4_1S_1$ , які збігаються з осями проекції конуса. За лініями зв'язку знаходимо додаткові проекції  $1_4, 2_4, 3_4, 4_4$  точок 1, 2, 3, 4 і сполучаємо їх з вершиною  $S_4$ . Відрізки прямих  $1_4S_4, 2_4S_4, 3_4S_4, 4_4S_4$  – це додаткові проекції пар твірних конуса. Пари – це твірні конуса попарно симетричні щодо площини двох твірних  $8S$  та  $12S$ . До позначень вище названих чотирьох точок додаємо ще чотири:  $1_4 \equiv 11_4, 2_4 \equiv 9_4, 3_4 \equiv 7_4, 4_4 \equiv 5_4$ . Це пари точок, які розташовані на одному проекціювальному промені. Там, де пари твірних на додатковій проекції перетинають проекцію  $\Gamma_4$  січної площини, маємо 8 точок еліпса перетину площини  $\Gamma$  з конусом. Додамо до них найнижчу і найвищу точки  $D$  та  $E$ , кінці  $F$  і  $G$  малої осі еліпса та точки  $K$  і  $L$ , що належать твірним  $6S$  і  $10S$ . Разом маємо 14 точок еліпса. До вище названих опорних точок  $D, E, F, G$  додамо ще дві:  $H$  та  $I$  – це точки дотику фронтальної проекції еліпса перетину конуса до його крайніх твірних.

Проекції  $D_1$  та  $E_1$  найнижчої та найвищої точок побудовані за лініями зв'язку  $D_4D_1, E_4E_1$ . Проекції  $F_1$  та  $G_1$  кінців малої осі еліпса побудовані за допомогою допоміжної горизонтальної площини  $\Delta(\Delta_4)$ , яка перетинає конус по колу радіуса  $R$ . На горизонтальній проекції із точки  $S_1$  як із центра проводимо коло радіусом  $R$  і на ньому за лінією зв'язку  $F_4F_1$  знаходимо точки  $F_1$  і  $G_1$ . Так само за допомогою площини  $\Lambda(\Lambda_4)$  побудовані проекції  $K_1$  і  $L_1$  точок, що належать твірним  $6S$  та  $10S$ . Решта горизонтальних проекцій точок еліпса побудовані за лініями зв'язку на відповідних проекціях твірних конуса так само, як побудовані проекції  $D_1, E_1$ .

Фронтальні проекції точок еліпса побудовані з використанням висот точок. Наприклад, на додатковій проекції вимірюємо уздовж лінії зв'язку  $E_4E_1$  висоту точки  $E$ , - це відстань від точки  $E_4$  до осі  $x_{14}$ , - і відкладаємо її на лінії зв'язку  $E_1E_2$  від осі  $x_{12}$ . Маємо проекцію  $E_2$  точки  $E$ .

Якщо задача розв'язується вручну, то побудови слід виконувати якомога точніше і звернути увагу на те, що точки  $H_2$  та  $I_2$  належать крайнім твірним конуса і їхні висоти мають відповідати відстаням від точок  $H_4$  та  $I_4$  до осі  $x_{14}$  на додатковій проекції.

У деяких випадках виникає потреба у визначенні неспотвореної проекції фігури перерізу конуса (і взагалі будь-якої поверхні) площиною. На рис. 10.6 справа внизу побудована неспотворена проекція еліпса перетину площини  $\Gamma$  з конусом. Для цього площина проекцій  $\Pi_1$  замінена площиною  $\Pi_5$ , паралельною площині  $\Gamma$  ( $\Pi_5 \parallel \Gamma, x_{45} \parallel \Gamma_4$ ).

Проекція  $E_5$  точки  $E$  еліпса побудована за допомогою лінії зв'язку  $E_4E_5 \perp x_{45}$ . Відстань від точки  $E_5$  до осі  $x_{45}$  дорівнює відстані від точки  $E_1$  до осі  $x_{14}$ . Інші точки еліпса побудовані аналогічно. Відрізки  $D_5E_5$  та  $F_5G_5$  – це відповідно велика і мала осі еліпса. Цей еліпс може бути побудований за відомими правилами за його визначеними осями.

Приклад 5. *Побудувати проекції лінії перетину сфери фронтально проєкціювальною площиною  $\Gamma(\Gamma_2)$  та розгортку сфери з нанесенням лінії перетину (рис. 10.7).*

Лінія перетину сфери з будь-якою площиною - це коло, яке в залежності від положення січної площини може спроекціюватись у коло, пряму чи еліпс. На рис. 10.7 коло перетину площини  $\Gamma$  зі сферою на площині  $\Pi_2$  спроекціювалось у відрізок  $A_2B_2$  прямої, а на площині  $\Pi_1$  - у еліпс.

Точки цього еліпса побудовані як точки перетину паралелей сфери з площиною  $\Gamma$ . Точки  $A(A_1, A_2)$  і  $B(B_1, B_2)$  - це найвища і найнижча точки лінії перетину, на горизонтальній проєкції відрізок  $A_1B_1$  - це мала вісь еліпса - проєкції лінії перетину. Точки  $C(C_1, C_2)$  і  $D(D_1, D_2)$  - це точки дотику еліпса до екватора сфери. Велика вісь  $E_1F_1$  еліпса побудована за допомогою площини  $\Lambda(\Lambda_2) \parallel \Pi_1$  ( $O_2E_2 \perp \Gamma_2$ ). Площина  $\Lambda$  перетинає сферу по паралелі, яка проходить через точки  $E(E_1, E_2)$  і  $F(F_1, F_2)$ . Методика побудови точок еліпса детально показана на прикладі точок  $M(M_1, M_2)$  і  $N(N_1, N_2)$ : через довільно вибрані точки  $M_2 = N_2$  проведено допоміжну горизонтальну площину  $\Delta(\Delta_2)$ , яка перетинає сферу по її паралелі  $a(a_1, a_2)$ , а площину  $\Gamma(\Gamma_2)$  - по прямій  $MN$  ( $M_1N_1, M_2N_2$ ). У перетині паралелі  $a$  з прямою  $MN$  маємо точки  $M(M_1, M_2)$  і  $N(N_1, N_2)$ .

Розгортка сфери може бути побудована лише наближено, оскільки сфера - поверхня нерозгортна. Розгортку можна побудувати способом описаних циліндрів, чи описаних конусів. На рис. 10.7 розгортка побудована способом описаних циліндрів. Для цього сфера поділена на 12 рівних частин і одна з них між точками  $1(1_1)$ ,  $2(2_1)$  екватора замінена часткою циліндра, який описано навколо сфери. На вільному місці проводимо горизонтальну пряму і на ній відкладаємо відрізки  $1_02_0 = 1_12_1, \dots, 12_01_0 = 12_11_1$ . Через середину  $G_0$  відрізка  $1_02_0$  проводимо перпендикуляр до нього і на цьому перпендикулярі наносимо точки  $H_0, K_0, L_0$  ( $G_0H_0 = G_2H_2, H_0K_0 = H_2K_2, K_0L_0 = K_2L_2$ ). На горизонтальних прямих проведених через точки  $H_0, K_0$  відкладаємо ширину частки циліндра, взяту з горизонтальної проєкції у відповідних місцях (показано рисками однозначні відрізки). Через побудовані таким чином точки і точки  $L_0, 1_0, 2_0$  проводимо плавні криві, що обмежують одну частку циліндра (сфери). Аналогічно будуються і інші частини сфери, як показано на рис. 10.7. Для спрощення побудови лінії перетину на розгортці подумки

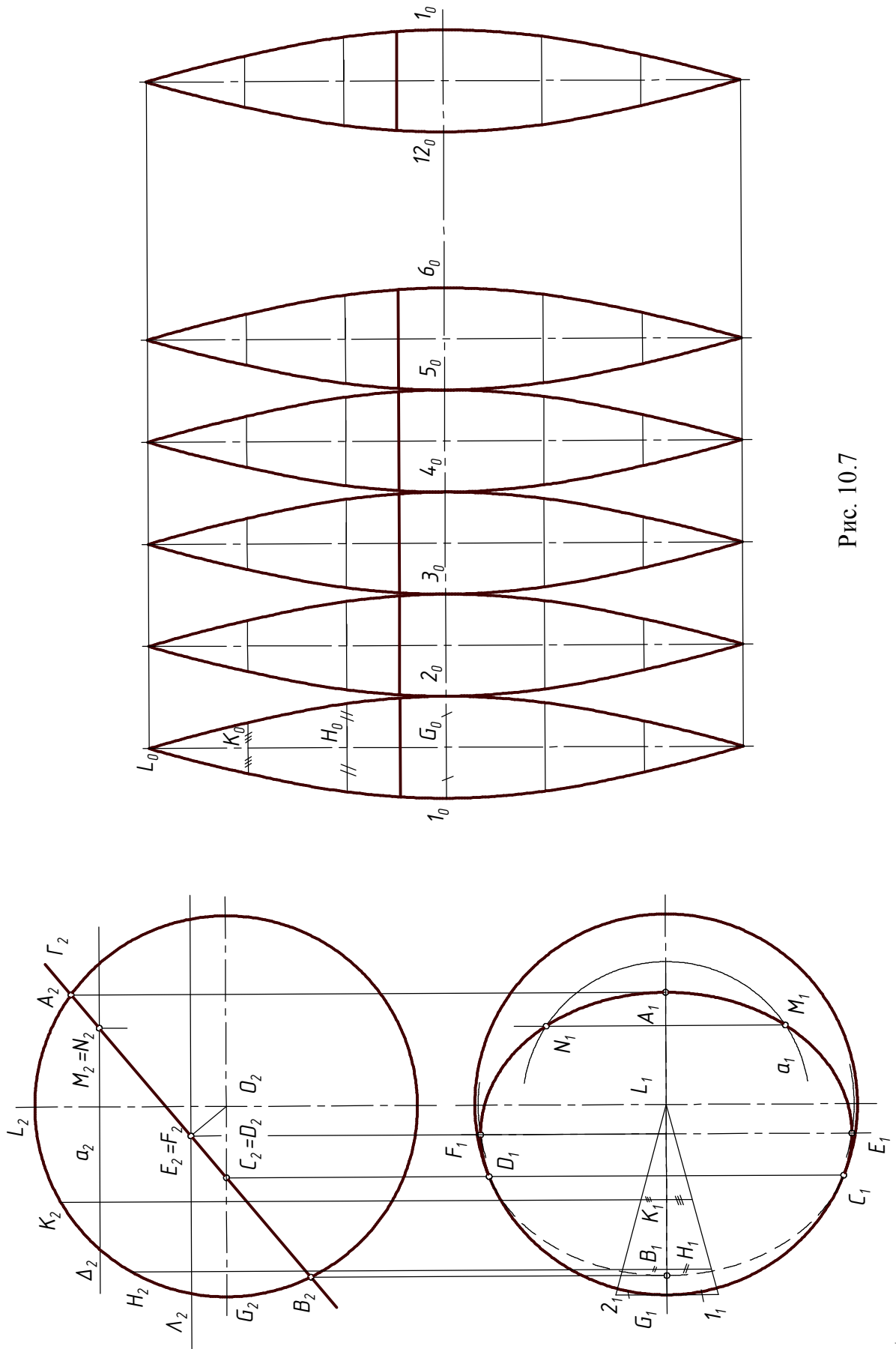


Рис. 10.7

повернемо сферу з площиною  $\Gamma$  навколо фронтально проєкціювальної осі, що проходить через центр сфери, так, щоб площина  $\Gamma$  стала горизонтальною. Тоді лінія перетину на розгортці зобразиться відрізками горизонтальної прямої (у межах кожної частки), яка віддалена від лінії  $l_0 \dots l_0$  на відстані  $m = O_2E_2$ .

Розглянута методика побудови проєкцій лінії перетину площини з поверхнею та розгортки останньої може бути застосована для будь-якої поверхні обертання. На рис. 10.9 наведено задачу побудови лінії перетину площини  $\Gamma(\Gamma_2)$  з поверхнею тора та розгортки останнього. Ця задача призначена для самостійного розв'язування студентами.

### Запитання для самоперевірки

1. Які типові задачі на побудову проєкцій ліній перетину площини з кривою поверхнею можна навести залежно від їхнього положення щодо площин проєкцій?
2. У чому полягають способи побудови проєкцій лінії перетину площини з кривою поверхнею залежно від їхнього положення щодо площин проєкцій?
3. У яку лінію може спроекціюватися лінія перетину площини з кривою поверхнею 2-го порядку?
4. З побудови яких точок починають будувати проєкції лінії перетину площини з кривою поверхнею?
5. Які лінії можуть утворюватися у перетині площини з циліндром другого порядку?
6. Як називаються лінії перетину площини з конусом 2-го порядку? Які вони?
7. Що таке площини-посередники і як вони вибираються?
8. Якими способами будуються розгортки кривих поверхонь?
9. Які лінії можуть утворюватися у перетині площини зі сферою та тором (круговим кільцем)?
10. Які криві поверхні розгортаються точно, а які – „неточно”? Як будуються неточні розгортки?

## 11 ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ

### 11.1 Перетин прямої з кривою поверхнею

Для побудови точок перетину прямої лінії з кривою поверхнею, через пряму проводять допоміжну площину і будують лінію перетину цієї площини з даною поверхнею. Точки перетину заданої прямої з побудованою лінією перетину і є точками перетину прямої з поверхнею. Слід зауважити, що площину через пряму проводять так, щоб вона перетинала поверхню по найпростішій лінії – прямій чи колу. Наведемо декілька прикладів.

Приклад 1. Побудувати точки перетину прямої з поверхнею похилого циліндра.

На рис. 11.1 наочно показана методика розв'язання задачі. Через пряму  $l$  проведена площина  $\Sigma$ , яка паралельна твірним циліндра. Ця площина перетинається з циліндром по двох його твірних. У перетині цих твірних з прямою  $l$  маємо шукані точки  $M$  та  $N$ .

На рис. 11.2 через пряму  $l(l_1, l_2)$  проведена площина  $\Sigma(a; l)$ . Пряма  $a$  проведена через довільну точку  $A(A_1, A_2)$ , що належить прямій  $l$ , паралельно твірним циліндра. Площина  $\Sigma$  перетинає площину  $\Gamma$  основи циліндра по прямій  $12(1_12_1, 1_22_2)$ :  $1 = l \cap \Gamma$ ,  $2 = A_2 \cap \Gamma$ . Пряма  $12$  перетинає основу циліндра у точках  $3(3_1)$  і  $4(4_1)$ . Через ці точки проведені твірні циліндра – лінії перетину площини  $\Sigma$  з циліндром. Ці твірні перетинають пряму  $l$  ( $l_1, l_2$ ) у шуканих точках  $M(M_1)$  і  $N(N_1)$ . Їхні фронтальні проекції знаходимо за лініями зв'язку.

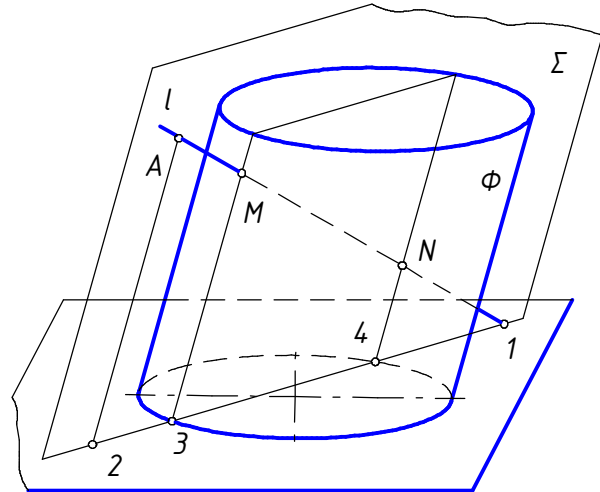


Рис. 11.1

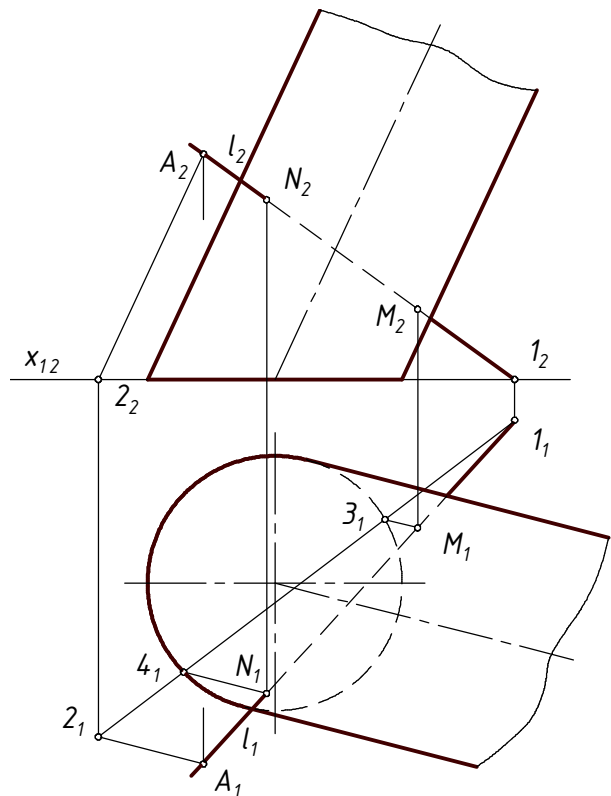


Рис. 11.2

Коли з конусом перетинається пряма, яка не паралельна його круговому перерізу, то через пряму слід провести площину  $\Sigma$ , яка проходить через вершину конуса (рис. 11.3). Така площина перетинає поверхню конуса по двох його твірних  $3S$  і  $4S$ , які перетинають пряму  $l$  у шуканих точках  $M$  і  $N$ .

Приклад 2 Побудувати точки перетину прямої  $l$  з поверхнею прямого кругового конуса (рис. 11.4).

Через вершину конуса  $S(S_1, S_2)$  проводимо пряму  $a(a_1, a_2)$ , яка перетинає пряму  $l(l_1, l_2)$  у довільній точці  $A(A_1, A_2)$ . Прямі  $l$  та  $a$  визначають допоміжну площину, яка проходить через вершину конуса і пряму  $l$ . Пряма  $l$  перетинається з площиною основи конуса у точці  $1(1_1, 1_2)$ , пряма  $a$  – у точці  $2(2_1, 2_2)$ .

Пряма  $12(1_12_1, 1_22_2)$  – це лінія перетину площини  $\Sigma(a; l)$  з площиною основи конуса. Ця пряма перетинає основу конуса у точках  $3(3_1)$  і  $4(4_1)$ . Сполучаємо ці точки з вершиною конуса  $S(S_1)$ .

Твірні  $3S(3_1S_1)$  і  $4S(4_1S_1)$  перетинають пряму  $l(l_1)$  у точках  $M(M_1)$  і  $N(N_1)$ . Їхні фронтальні проекції знаходимо за лініями зв'язку.  $M$  і  $N$  – це точки перетину прямої  $l$  з конусом.

У разі, якщо пряма загального положення перетинається зі сферою, то через пряму може бути проведена площина загального положення, або проекціювальна. Але коло, по якому перетинається сфера з будь-якою із цих площин, проекціюється спотворено. Тому необхідно перетворити креслення таким чином, щоб назване коло спроекціювалось без спотворення, побудувати шукані точки перетину прямої

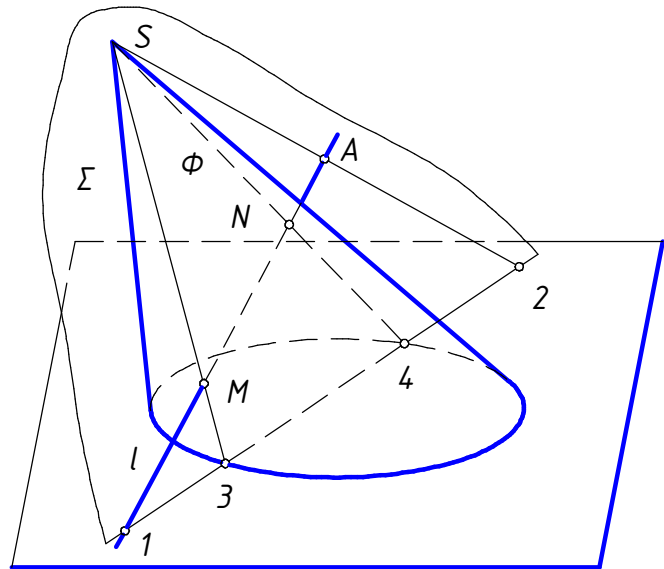


Рис. 11.3

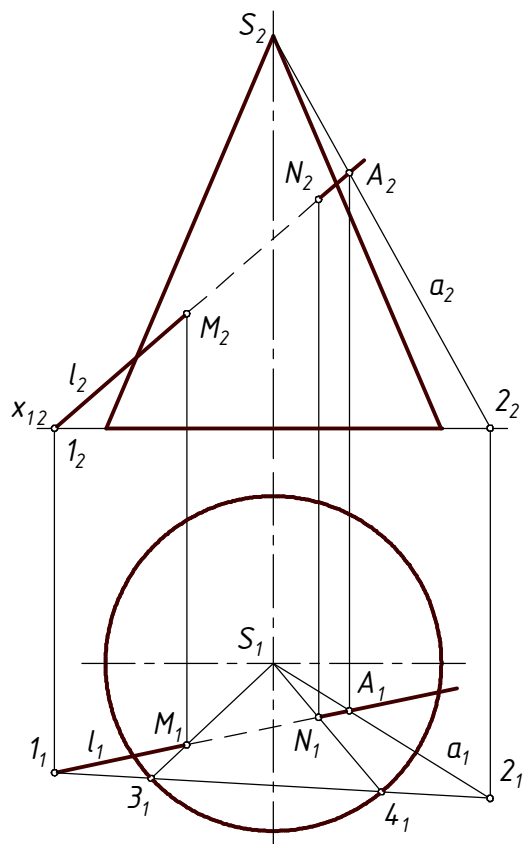


Рис. 11.4

зі сферою на перетвореному зображенні, а потім зворотним перетворенням знайти ці точки на вихідних проекціях.

Якщо через пряму проводиться площина загального положення, то її доцільно провести через центр сфери. Тоді ця площина перетинає сферу по великому колу і перетворення креслення слід виконати способом обертання навколо лінії рівня. У цьому разі коло перетину сфери з площиною збігається з проекцією екватора чи головного меридіану, дивлячись навколо якої лінії рівня обертається допоміжна площина.

Коли ж через пряму  $l$  проводиться проекціювальна площина, то перетворення слід виконати якимось зі способів, наприклад, способом заміни площин проекцій або обертання навколо проекціювальної осі.

Приклад 2. Побудувати точки перетину прямої  $l$  зі сферою (рис. 11.5).

Через пряму  $l$  проводимо горизонтально проекціювальну площину  $\Sigma(\Sigma_1)$  і змінюємо площину  $\Pi_2$  на нову площину  $\Pi_4$ , яка паралельна площині  $\Sigma$ . Для побудови додаткової проекції  $l_4$  прямої  $l$  на ній необхідно взяти дві які-небудь точки, наприклад,  $1(1_1, 1_2)$  та  $2(2_1, 2_2)$ . Використовуючи висоти цих точок, будуємо їхні проєкції  $1_4$  та  $2_4$ . Сполучаємо їх і отримуємо проєкцію  $l_4$  прямої  $l$ . Далі проводимо коло  $a_4$ , його діаметр видно на горизонтальній проєкції, а центр віддалений від осі  $x_{14}$  на такій самій відстані, як центр сфери віддалений від площини  $\Pi_1$  (показано фігурною дужкою). Коло  $a_4$

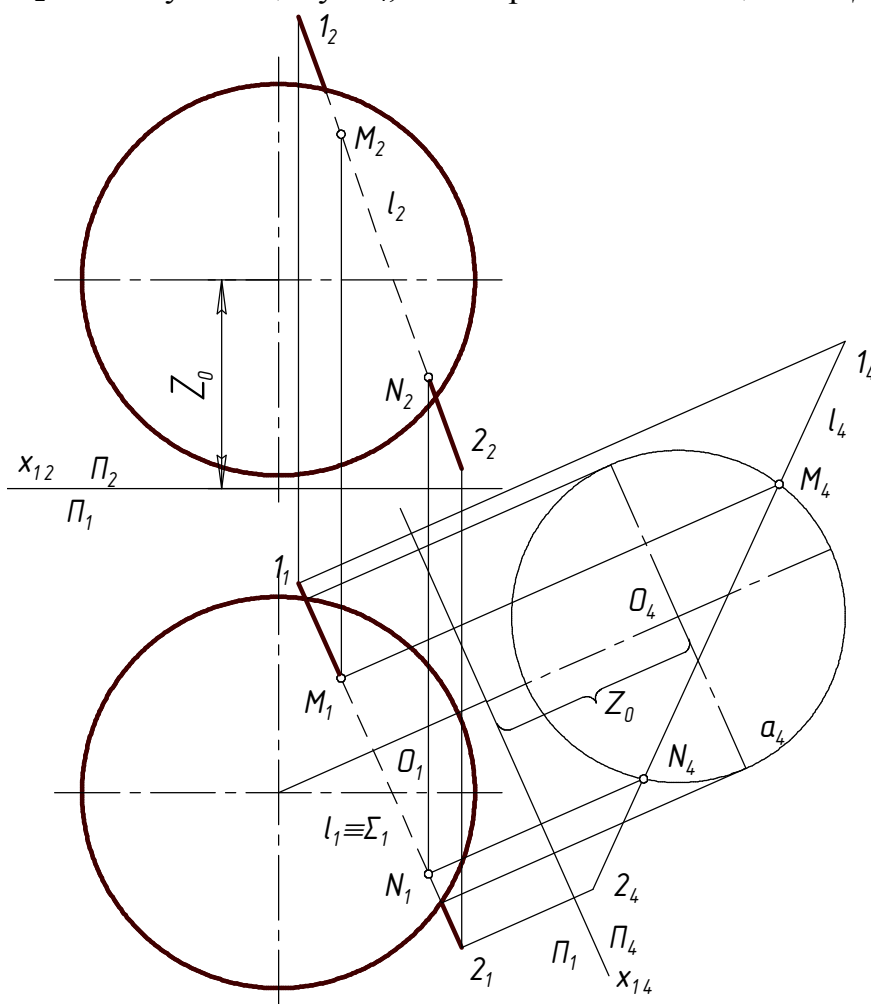


Рис. 11.5

перетинає проекцію  $l_4$  у точках  $M_4, N_4$ . Зворотним проєкціюванням знаходимо горизонтальні  $M_1$  та  $N_1$ , а потім і фронтальні проєкції  $M_2$  і  $N_2$  шуканих точок  $M$  та  $N$  перетину прямої  $l$  зі сферою.

На рис. 11.6 показано приклад побудови точок перетину трьох прямих окремого положення зі сферою. Цей приклад призначений для самостійного розв'язування студентами. У розв'язуванні використовуються площини рівня, які перетинають сферу по колах, що проєкціюються без спотворення на площинах  $\Pi_1$  або  $\Pi_2$ .

Аналогічний приклад наведено на рис. 11.7, де побудовані точки перетину трьох прямих окремого положення з конусом. Тут також використовуються допоміжні площини рівня які проведені через задані прямі. Площини-посередники слід проводити такі і так, щоб вони перетинали конус по найпростіших лініях - прямих чи колах.

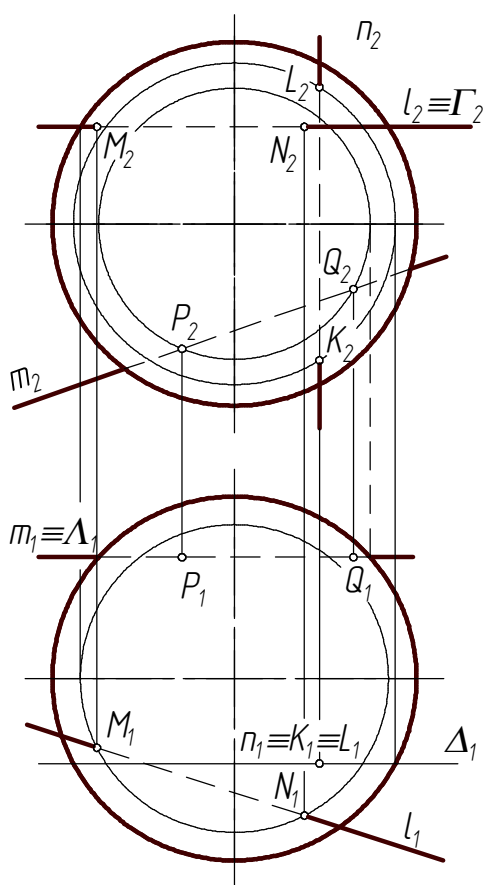


Рис. 11.6

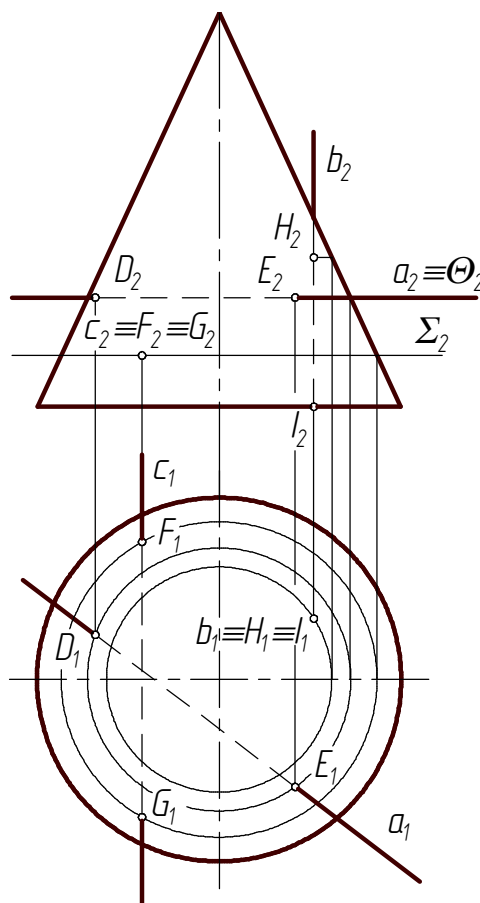


Рис. 11.7



## 11.2 Взаємний перетин кривих поверхонь

### 11.2.1 Спосіб допоміжних площин проєкцій

Лінія перетину двох кривих поверхонь у загальному випадку є просторовою кривою, яка будується за окремими точками. Загальні принципи побудови цих точок досить схожі з тими, що були розглянуті у попередній темі. Загальні точки для двох поверхонь (точки лінії перетину їх) можуть бути побудовані як точки перетину твірних однієї поверхні з іншою поверхнею. Проте частіше лінія перетину поверхонь у загальному випадку будується за допомогою допоміжних поверхонь - посередників, про що йтиметься далі.

У залежності від положення поверхонь, що перетинаються, щодо площин проєкцій, а також виду самих поверхонь побудови їхніх ліній перетину можуть бути досить простими, чи достатньо складними. Аналогічно з багатограними поверхнями виділимо і розглянемо детальніше три характерних випадки.

Випадок 1. Перетинаються два різнойменно проєкціювальні циліндри (рис. 11.8). В цьому разі вже є дві (у наведеному прикладі фронтальна та горизонтальна) проєкції лінії перетину і розв'язування задачі зводиться до розпізнання й позначення відповідних проєкцій точок цієї лінії, а також побудови, якщо необхідно, третьої проєкції.

Наприклад, на горизонтальній проєкції на колі, в яке проєкціюється вертикальний циліндр, беремо будь-яку точку  $A(A_1)$ . Їй відповідає фронтальна проєкція  $A_2$ , що розташована на колі, в яке проєкціюється поверхня фронтально проєкціювального

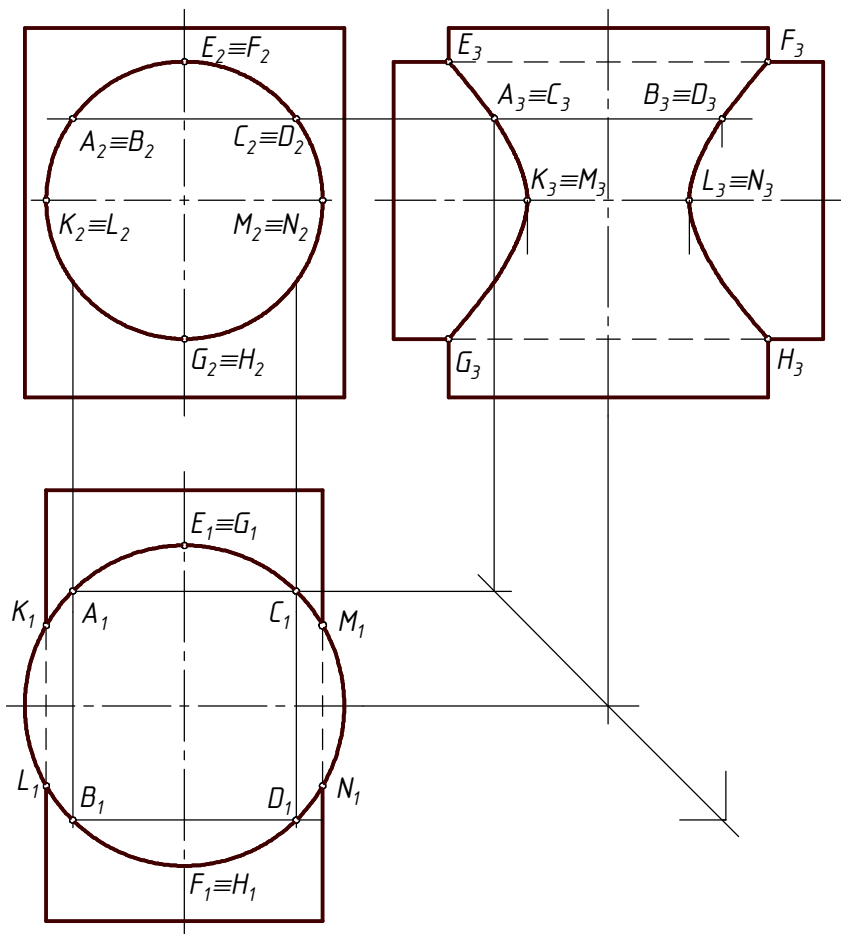


Рис. 11.8

циліндра. Профільна проекція  $A_3$  точки  $A$  будується, як звичайно, за лініями зв'язку за допомогою постійної прямої креслення або за координатами.

Випадок 2. Перетинається проєкціювальна поверхня з непроєкціювальною (наприклад, фронтально проєкціювальний циліндр з конусом (рис. 11.9)). У цьому випадку одна проєкція лінії перетину вже є. Вона збігається з проєкцією бічної поверхні проєкціювального циліндра. Друга проєкція лінії перетину будується за умови належності її іншій (непроєкціювальній) поверхні.

У наведеному на рис. 11.9 прикладі фронтальна проєкція лінії перетину збігається з колом, у яке спроєкціювалась бічна поверхня циліндра. Горизонтальну проєкцію шуканої лінії будуюмо як лінію, що розташована на поверхні конуса.

За звичай, побудова лінії перетину починається з визначення характерних (опорних) точок: найвищої і найнижчої, границь видимості лінії перетину, точки дотику її до крайніх твірних поверхонь тощо. Іноді проєкції деяких точок можуть бути побудовані без додаткових побудов. Наприклад, горизонтальні проєкції  $A_1$  і  $B_1$  точок  $A$  і  $B$  перетину крайньої правої твірної конуса з циліндром знайдені за лініями зв'язку.

Горизонтальні проєкції всіх інших точок лінії перетину знаходимо за допомогою горизонтальних допоміжних площин. Наприклад, верхні точки  $C(C_1, C_2)$  та  $D(D_1, D_2)$  побудовані за допомогою площини  $\Gamma(\Gamma_2)$ . Слід  $\Gamma_2$  проводимо через точки  $C_2 \equiv D_2$ . Площина  $\Gamma$  перетинається з конусом по колу, що проходить через точку  $1(1_1, 1_2)$ . Проводимо коло через точку  $1_1$  із центра  $O_1$  і за лінією зв'язку знаходимо на ньому точки  $C_1$  та  $D_1$ . Аналогічно побудовані горизонтальні проєкції  $E_1, F_1$  нижніх точок  $E$  і  $F$  за допомогою

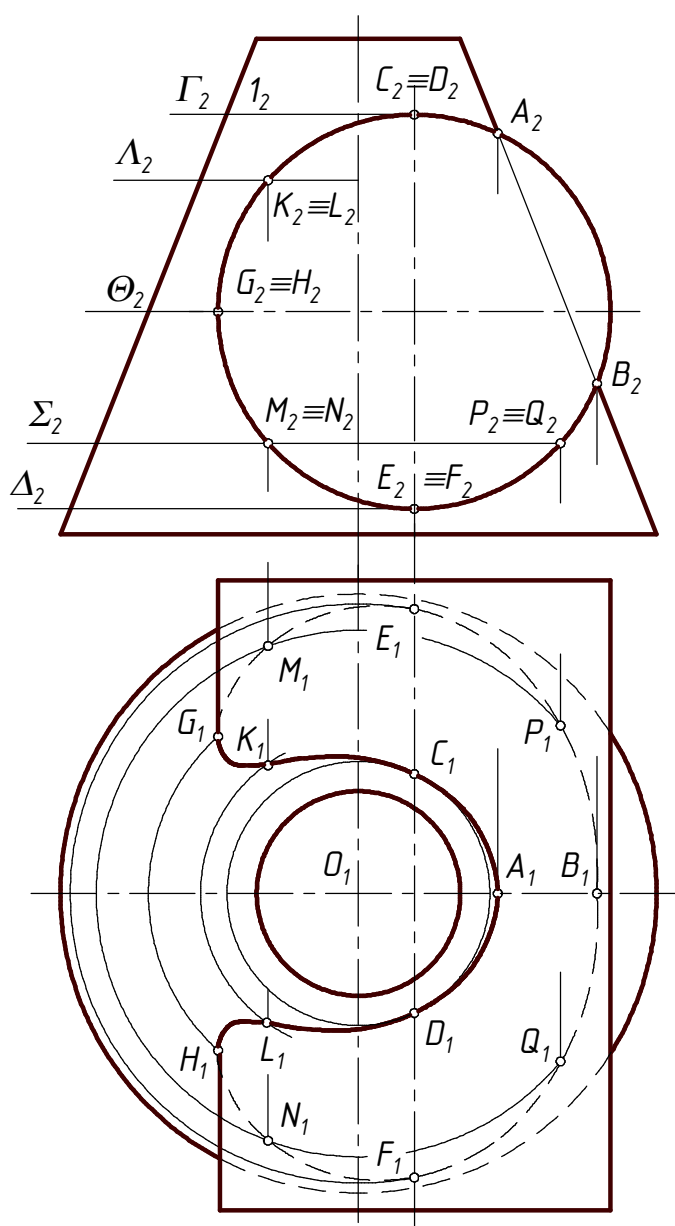


Рис. 11.9

площини  $\Delta(\Delta_2)$ . Точки дотику  $G_1, H_1$  горизонтальної проекції лінії перетину до крайньої лівої твірної циліндра побудовані за допомогою допоміжної площини  $\Theta(\Theta_2)$ , проведеної через ліву крайню твірну циліндра (через центр кола).

На рис. 11.9 також показана побудова поточних точок  $K_1, L_1, M_1, N_1, P_1, Q_1$ , яка виконана за допомогою двох площин  $\Lambda(\Lambda_2)$  та  $\Sigma(\Sigma_2)$ . Побудовані точки сполучаються з урахуванням їхньої видимості плавною кривою лінією за допомогою лекала.

Випадок 3. Перетинаються поверхні, жодна з яких не є проєкціювальною. У цьому разі лінія перетину будується за допомогою поверхонь-посередників. Як поверхні-посередники використовуються площини, сфери, циліндри, конуси.

Сутність цих побудов полягає у наступному. Хай задано поверхні  $\Phi_1$  та  $\Phi_2$  (рис. 11.10). Розріжемо їх допоміжною поверхнею  $\Sigma$  і побудуємо дві лінії  $a$  та  $b$ , по яких ця поверхня перетинається з вихідними поверхнями

$\Phi_1$  та  $\Phi_2$ . У перетині ліній  $a$  і  $b$  дістаємо точки  $A, B, \dots$ , які належать обом заданим поверхням, тобто їхній лінії перетину. Поверхонь  $\Sigma$  має бути стільки, щоб дістати достатню кількість точок для проведення плавної кривої лінії перетину. Вид і положення поверхонь  $\Sigma$  вибираються так, щоб вони перетинали задані поверхні по найпростіших лініях, - прямих чи колах, - які і проєкціюються у найпростіші лінії - прямі чи кола. Якщо як посередник використовується площина, то

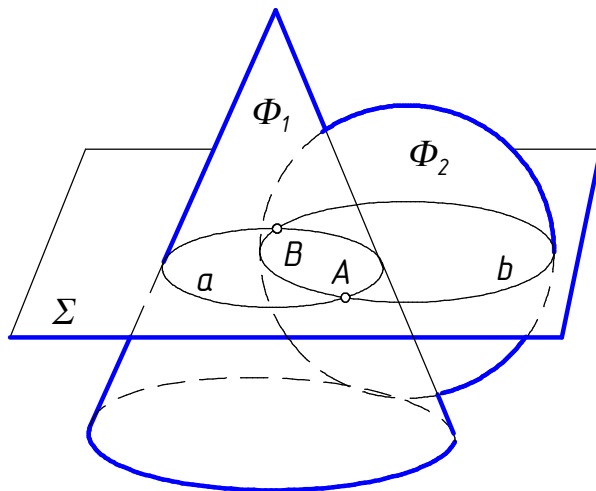


Рис. 11.10

говорять, що лінія перетину будується способом допоміжних площин, а якщо - сфери, то - способом допоміжних сфер (концентричних чи ексцентричних).

Характерним прикладом застосування способу допоміжних площин є побудова ліній перетину конуса зі сферою (рис. 11.11). Лінія перетину є просторовою кривою 4-го порядку, яка на фронтальну площину проєкцій проєкціюється у криву 2-го порядку (параболу) тому, що загальна площина симетрії конуса і сфери паралельна площині  $\Pi_2$  [Глазунов].

Спочатку визначимо опорні точки. Так у перетині крайніх твірних конуса і сфери на фронтальній проєкції позначимо найвищу  $A(A_2)$  та найнижчу  $B(B_2)$  точки лінії перетину. За лініями зв'язку знаходимо їхні горизонтальні

проекції  $A_1$  і  $B_1$  на горизонтальній осі симетрії. Точки дотику горизонтальної проекції лінії перетину до крайнього твірного кола сфери (екватора) на горизонтальній проекції знаходимо за допомогою допоміжної горизонтальної площини  $\Gamma(\Gamma_2)$ , проведеної через центр сфери. Ця площина перетинає конус по колу, що проходить через точку  $1(1_1, 1_2)$ . Горизонтальну проекцію  $1_1$  цієї точки знаходимо за лінією зв'язку на горизонтальній осі симетрії. Із центра  $O_1$  проводимо коло через точку  $1_1$ . Площина  $\Gamma$  перетинає сферу по її екватору

Тому в перетині кола з радіусом  $O_1 1_1$  із крайнім колом сфери (екватором) дістаємо точки  $C_1$  і  $D_1$ , в яких горизонтальна проекція лінії перетину дотикається до цього кола. За лініями зв'язку знаходимо їхні проекції  $C_2 = D_2$  на слідів - проекції  $\Gamma_2$  площини  $\Gamma$ .

У лінії перетину сфери з конусом є ще дві характерні точки – це точки, в яких лінія перетину дотикається до двох твірних конуса [Четверухін]. Для побудови цих двох точок на сферу „надінемо” конус з вершиною у точці  $S(S_1, S_2)$ . Цей конус дотикається до сфери по колу  $a(a_2)$ . Через коло  $a$  проведемо допоміжну сферу з центром у точці  $S(S_2)$ . Ця сфера перетинає вихідний конус по колу  $b(b_2)$ , яке в свою чергу перетинається з колом  $a$  у точках  $G$  і  $H$  ( $G_1, H_1; G_2 = H_2$ ). Через точки  $G$  і  $H$  проходять дві твірні дотичного до сфери конуса, бо ці точки належать колу  $a$ , через це твірні  $GS$  і  $HS$  дотикаються до сфери. А оскільки точки  $G$  і  $H$  належать колу  $b$  вихідного конуса, то твірні  $GS$  і  $HS$  належать і вихідному конусу і саме вони є тими двома твірними конуса, які дотикаються до сфери. І саме в точках  $G$  і  $H$  лінія перетину сфери з конусом дотикається до названих двох твірних  $GS$  і  $HS$  конуса.

Усі поточні (проміжні) точки будуються за допомогою інших горизонтальних площин. Так, наприклад, горизонтальна площина  $\Delta(\Delta_2)$  перетинає конус по колу радіусом  $O_2^1 3_2$ , а сферу - по колу радіусом  $O_2^2 4_2$ . На горизонтальній

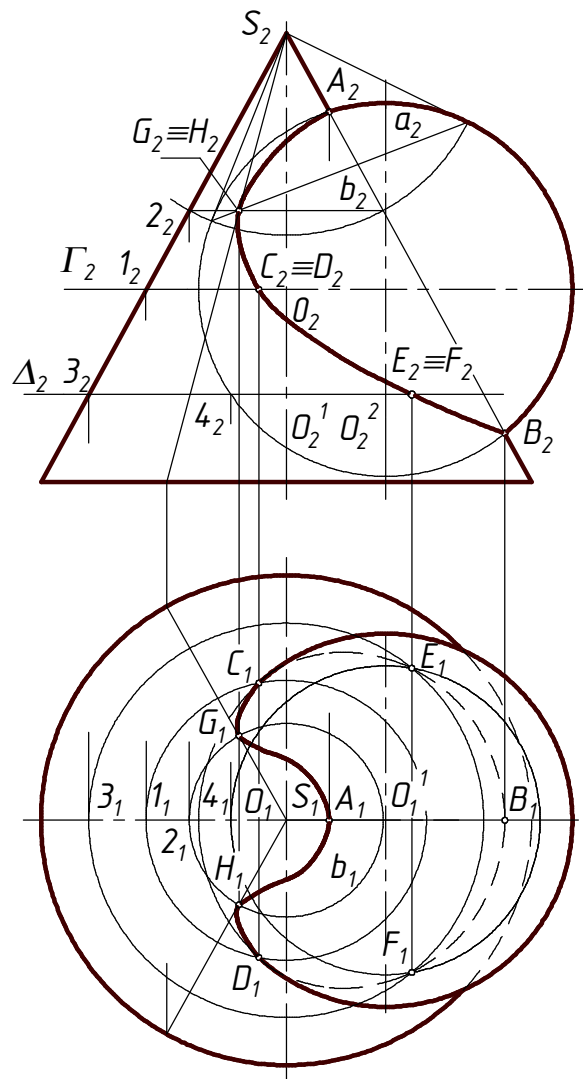


Рис. 11.11

проекції проводимо коло радіусом  $O_1Z_1$  із центра  $O_1$ , та коло радіусом  $O_1^14_1$  - із центра  $O_1^1$ . У перетині цих кіл маємо точки  $E_1$  та  $F_1$ . За лініями зв'язку знаходимо фронтальні проекції  $E_2$  і  $F_2$  точок  $E$  та  $F$  на слідові- проекції площини  $\Delta(\Delta_2)$ .

На рис. 11.12 представлено ще один приклад застосування допоміжних площин. Тут вертикальний циліндр перетинається з напівкільцем (тором). Допоміжні площини розташовують фронтально. Кожна така площина перетинає напівкільце по двох напівколах, а циліндр - по двох прямих. У перетині цих ліній маємо точки, що належать лінії перетину поверхонь. У прикладі показана побудова точок  $A(A_1, A_2)$ ,  $B(B_1, B_2)$ ,  $C(C_1, C_2)$ ,  $D(D_1, D_2)$ . Цей приклад схожий на випадок, представлений на рис.11.9. Оскільки циліндр перебуває у вертикальному положенні, то горизонтальна проекція лінії перетину збігається з колом, у яке проекціюється його бічна поверхня. Тоді фронтальна проекція шуканої лінії будується за умови її належності поверхні напівкільця за допомогою уже названих фронтальних площин.

У випадках, коли перетинаються у будь-яких поєднаннях похилі конуси та циліндри, основи яких розташовані в одній площині, доцільно застосовувати допоміжні площини загального положення.

На рис.11.13 показано приклад побудови лінії перетину двох конусів, основи яких розташовані в горизонтальній площині. Допоміжні площини проводяться через вершини конусів. Для цього через вершини  $S^1(S_1^1, S_2^1)$  та  $S^2(S_1^2, S_2^2)$  проведена пряма і побудована точка  $M(M_1, M_2)$  перетину її з площиною основ конусів. Пряма  $S^1S^2$ , як і у випадку з двома пірамідами, є "віссю обертання" допоміжних площин, тому цей спосіб у навчальній літературі названо способом площини, що обертається. Через точку  $M(M_1)$  проводимо пряму  $h(h_1)$ , що дотикається до основи конуса  $S^1$ .

Прямі  $h$  та  $S^1S^2$  визначають площину  $\Gamma(h, S^1S^2)$ , що дотикається до конуса  $S^1$  і перетинає конус  $S^2$ . Як видно з рис. 13.13, ця площина дотикається до поверхні конуса  $S^1$  по його твірній  $1S^1(1_1S_1^1, 1_2S_2^1)$  і перетинає конус  $S^2$  по його твірним  $2S^2(2_1S_2^1)$  та  $3S^2(3_1S_2^1)$ . У перетині твірної  $1S^1(1_1S_1^1)$  з твірними  $2S^2(2_1S_2^1)$  і  $3S^2(3_1S_2^1)$  маємо точки  $A(A_1)$  та  $B(B_1)$ , що належать лінії перетину

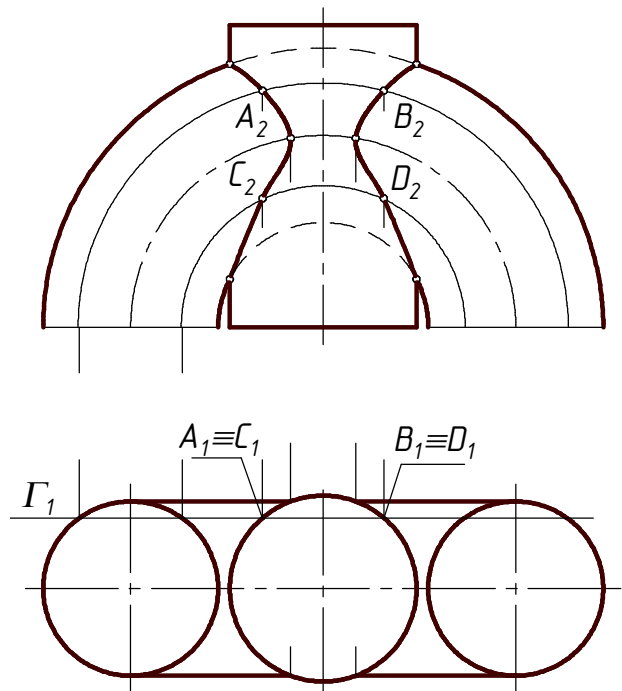


Рис. 11.12

конусів. Фронтальні проекції  $A_2$  і  $B_2$  точок  $A$  і  $B$  знаходимо за лініями зв'язку на фронтальній проекції  $1_2S_2^1$  твірної  $1S^1$ . Потім проводимо через точку  $M(M_1)$  пряму  $h^1(h_1^1)$ , дотичну до основи конуса  $S^2(S_1^2)$ . Із креслення видно, що ця пряма перетинає основу конуса  $S^1(S_1^1)$ . Прямі  $h^1$  і  $S^1S^2$  визначають площину  $\Delta(h^1, S^1S^2)$ , яка дотикається до поверхні конуса  $S^2$  по його твірній  $4S^2(4_1S_1^2)$  і перетинається з конусом  $S^1$  по його твірним  $5S^1(5_1S_1^1)$  і  $6S^1(6_1S_1^1)$ . У перетині твірної  $4S^2(4_1S_1^2)$  з твірними  $5S^1(5_1S_1^1)$  та  $6S^1(6_1S_1^1)$  маємо точки  $C(C_1)$  і  $D(D_1)$ . Прямі  $h(h_1)$  та  $h^1(h_1^1)$  визначають граничні допоміжні площини  $\Gamma$  і  $\Delta$ . Уся лінія перетину конусів розташована між цими площинами.

З допомогою площин  $\Gamma$  і  $\Delta$  дістаємо лише по дві точки лінії перетину конусів на відміну від інших допоміжних площин, які дозволяють будувати по чотири точки. За положенням основ конусів по відношенню до прямих  $h$  і  $h^1$  можна визначити характер лінії перетину конусів. У данному прикладі жодна з основ конусів не розташовується повністю між лініями  $h$  та  $h^1$ . Це означає, що лінія перетину є однією просторовою замкненою кривою, тобто має місце так звана "врубка". Якщо одна з основ розташована між прямими  $h$  і  $h^1$ , тобто, якщо обидві ці прямі дотикаються до однієї і тієї ж основи та перетинаються з іншою, то лінія перетину розпадається на дві частини, кожна з яких є просторовою кривою. У такому разі має місце повне проникнення. Іншими словами, один конус пронизується другим.

Покажемо, як будуються інші опорні точки. Так, наприклад, точки  $E(E_1, E_2)$  та  $F(F_1, F_2)$  дотику фронтальної проекції лінії перетину до лівої крайньої твірної конуса  $S^2$  будуються за допомогою допоміжної площини  $\Lambda(h^2, S^1S^2)$ . Пряма  $h^2(h_1^2)$  проводиться через точку  $7_1$  (твірна  $7S^2(7_1S_1^2, 7_2S_2^2)$  на фронтальній проекції є крайньою твірною конуса  $S^2$ ).

Пряма  $h^2(h_1^2)$  перетинає основу конуса  $S^2$  у точках  $7(7_1)$  і  $8(8_1)$ , а основу конуса  $S^1$  - у точках  $9(9_1)$  і  $10(10_1)$ . Тобто площина  $\Lambda$  перетинається з конусом  $S^1$  по твірним  $9S^1(9_1S_1^1)$  та  $10S^1(10_1S_1^1)$ , а з конусом  $S^2$  - по твірним  $7S^2(7_1S_1^2)$  і  $8S^2(8_1S_1^2)$ . У перетині цих твірних маємо точки  $E(E_1, E_2)$ ,  $F(F_1, F_2)$ ,  $G(G_1, G_2)$ ,  $H(H_1, H_2)$ . У точках  $E_2$  та  $F_2$  фронтальна проекція лінії перетину дотикається до проекції  $7_2S_2$  крайньої твірної конуса  $S^2$ . Побудови для всіх проміжних допоміжних площин аналогічні побудовам для площини  $\Lambda$ . Через значну насиченість креслення недоцільно розглядати більш детально побудови інших точок лінії перетину. Сподіваємось, що читач зможе самостійно зрозуміти решту побудов інших точок.

Інший приклад застосування площини, що обертається, показано на рис. 11.14, де побудована лінія перетину похилого конуса з похилим циліндром, основи яких розташовані в одній горизонтальній площині.

Через вершину конуса  $S(S_1, S_2)$  проведена пряма, що паралельна твірним циліндра, і знайдена точка  $M(M_1, M_2)$  перетину її з площиною основ. Через точку  $M(M_1)$  проведена пряма  $h^1(h_1^1)$ , яка дотикається в точці  $1(1_1)$  до

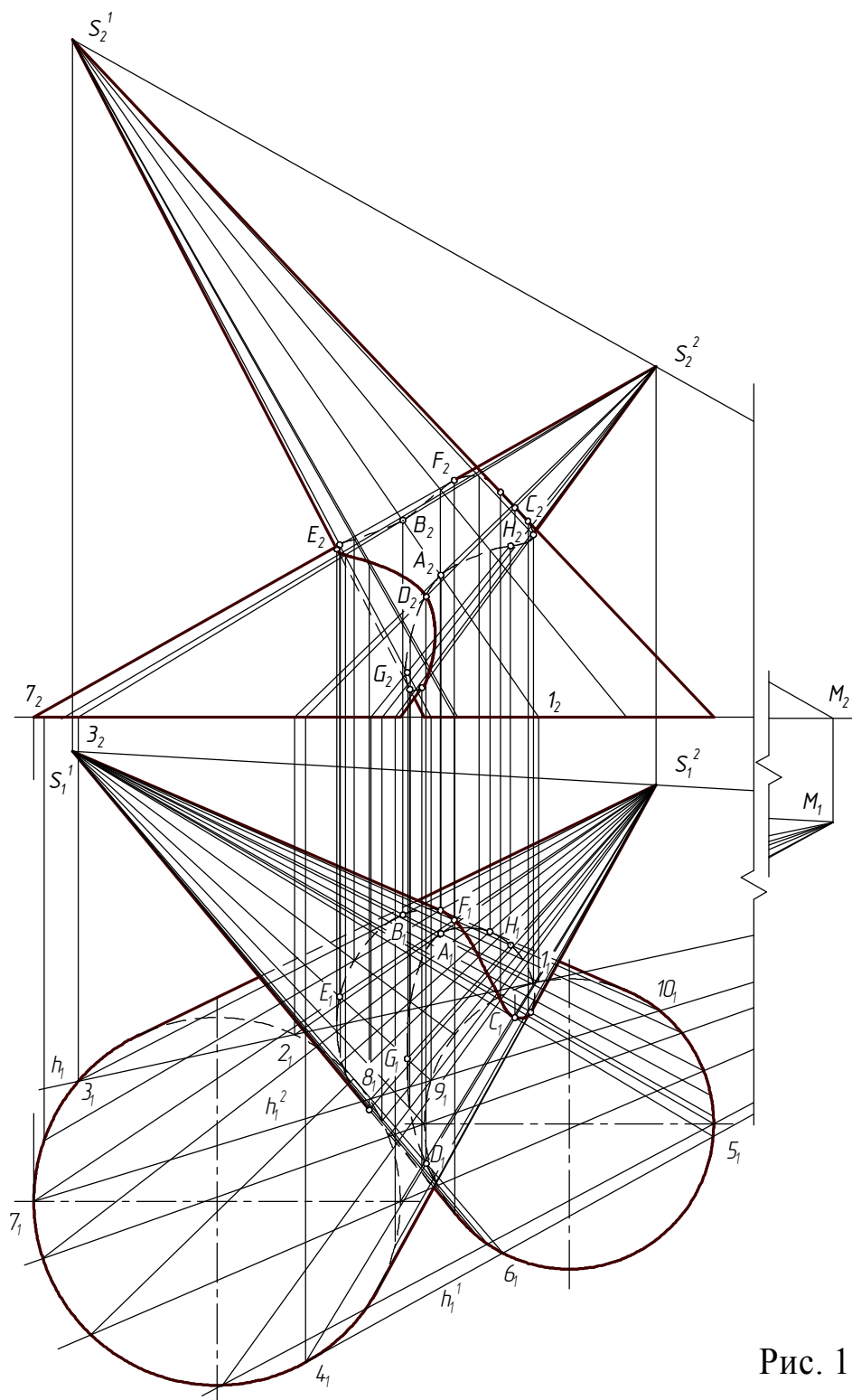


Рис. 11.13

ОСНОВИ  
циліндра і перетинається з основою конуса в точках  $2(2_1)$  та  $3(3_1)$ . Прямі  $h^1$  та  $SM$  визначають граничну допоміжну площину, яка дотикається до поверхні

циліндра по твірній  $1A(1_1A_1)$  і перетинає конус по твірним  $1S(1_1S_1)$  та  $2S(2_1S_1)$ . У перетині цих твірних маємо точки  $A(A_1)$  і  $B(B_1)$ . Саме в точках  $A$  і

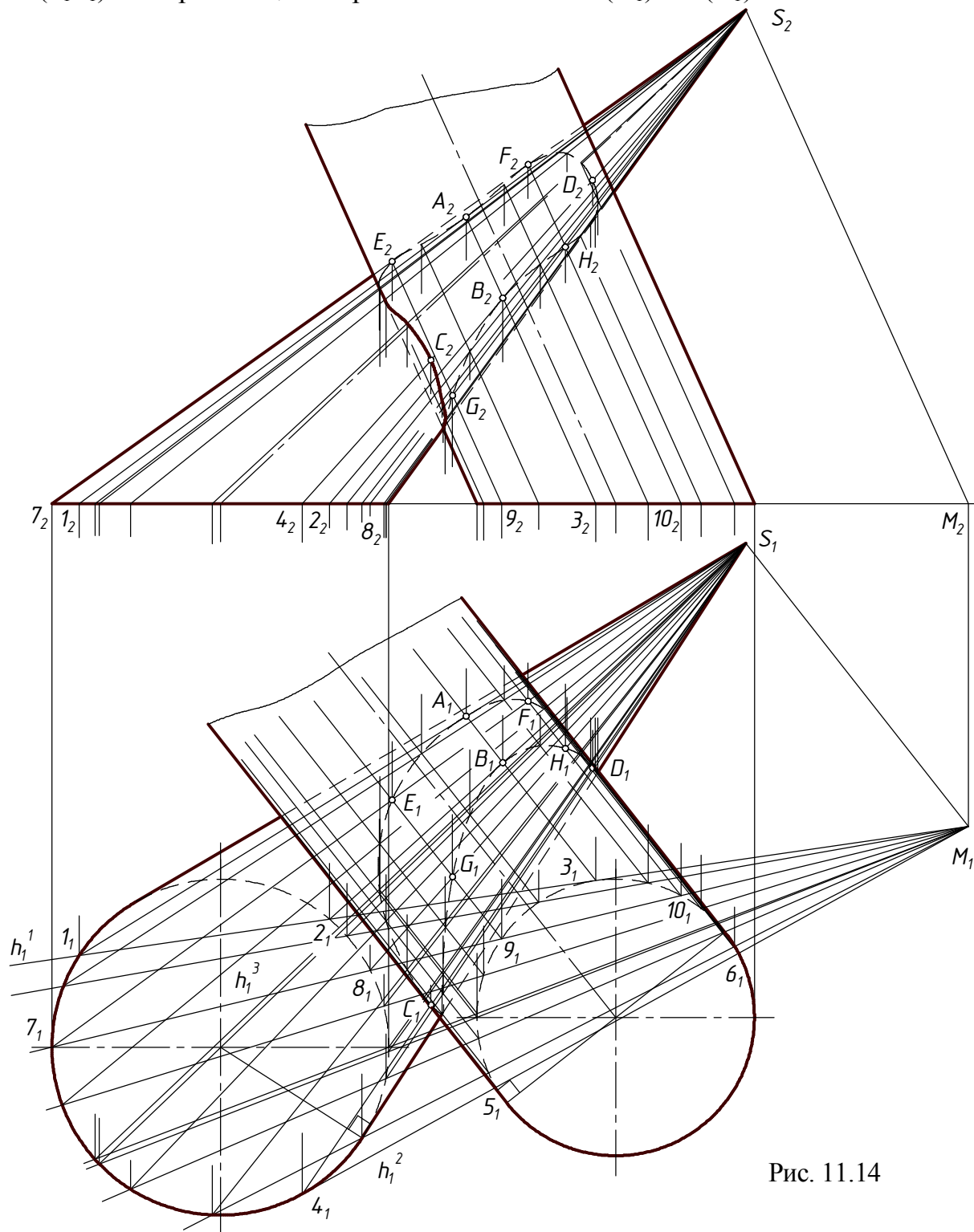


Рис. 11.14

В лінія перетину дотикається до двох твірних конуса  $2S$  і  $3S$ . Фронтальні проєкції цих точок, як і усіх інших, побудовані за лініями зв'язку на відповідних твірних циліндра.



Пряма  $h^2(h^2_1)$ , що проведена через точку  $M(M_1)$  дотично до основи конуса, разом з прямою  $SM$  визначає другу граничну допоміжну площину, яка дотикається до поверхні конуса по його твірній  $4S(4_1S_1)$  і перетинається з циліндром по твірним  $5C(5_1C_1)$  та  $6D(6_1D_1)$ . Точки  $C(C_1)$  і  $D(D_1)$  знайдені у перетині цих твірних. Слід зауважити, що саме в точках  $C$  і  $D$  лінія перетину дотикається до двох твірних циліндра.

Одна із проміжних площин визначається прямими  $SM$  і  $h^3$ . Пряма  $h^3(h^3_1)$  перетинає основу конуса в точках  $7(7_1)$  та  $8(8_1)$ , а циліндра - в точках  $9(9_1)$  і  $10(10_1)$ . Через ці точки проведені твірні конуса і циліндра, у перетині яких утворились точки  $E(E_1, E_2)$ ,  $F(F_1, F_2)$ ,  $G(G_1, G_2)$ ,  $H(H_1, H_2)$ . Доречі, точки  $E_2$  і  $F_2$  є точками дотику фронтальної проекції лінії перетину до контурної твірної конуса.

Побудова лінії перетину двох циліндрів, основи яких знаходяться в одній горизонтальній площині показано на рис. 11.15. Допоміжні площини проводяться паралельно твірним обох циліндрів. Такі площини перетинають їх по прямим твірним. На вільному місці між циліндрами проведена площина  $\Gamma(a, b)$ , що паралельна твірним обох циліндрів (прямі  $a(a_1, a_2)$  та  $b(b_1, b_2)$  паралельні твірним циліндрів  $\Pi(\Pi_1, \Pi_2)$  і  $\Pi^1(\Pi^1_1, \Pi^1_2)$  відповідно). У площині  $\Gamma$  побудована пряма  $h(h_1, h_2)$ , що паралельна площині основ циліндрів. Усі допоміжні площини перетинають площину основ циліндрів по прямим, що паралельні прямій  $h$ . Так проведена пряма  $h^1(h^1_1)$  ( $h^1 \parallel h$ ), що дотикається у точці  $3(3_1)$  до основи циліндра  $\Pi(\Pi_1)$ . Вона перетинає основу циліндра  $\Pi^1$  у точках  $4(4_1)$  і  $5(5_1)$ . Через точки  $3(3_1)$ ,  $4(4_1)$  і  $5(5_1)$  проводимо твірні циліндрів. У перетині цих твірних утворюються точки  $A(A_1, A_2)$  і  $B(B_1, B_2)$ .

Далі проведена пряма  $h^2(h^2_1)$  ( $h^2 \parallel h$ ), дотична у точці  $6(6_1)$  до основи циліндра  $\Pi^1$ . Вона перетинає основу циліндра  $\Pi$  у точках  $7(7_1)$  і  $8(8_1)$ . Через точки  $6(6_1)$ ,  $7(7_1)$  і  $8(8_1)$  проведені твірні циліндрів, у перетині яких утворені точки  $C(C_1, C_2)$  і  $D(D_1, D_2)$ . За допомогою проміжної прямої  $h^3(h^3_1)$  утворені проміжні точки  $E(E_1, E_2)$ ,  $F(F_1, F_2)$ ,  $G(G_1, G_2)$  та  $H(H_1, H_2)$ . Решта побудов виконані аналогічно вже описаним і, сподіваємось, зрозумілі читачеві.

### 11.2.2 Спосіб допоміжних сфер

У певних випадках лінію перетину кривих поверхонь можна побудувати за допомогою допоміжних сфер. Хай ми маємо сферу  $\Phi(\Phi_2)$  (рис. 11.16). Розріжемо її площиною  $\Gamma(\Gamma_2)$ . У перетині дістаємо коло  $a(a_2)$ . Підберемо конус обертання  $\Phi^1(\Phi^1_2)$  такий, у якого діаметр основи дорівнює діаметру кола  $a(a_2)$ , і підставимо його до зрізаної частини сфери. Коло  $a$  можна вважати лінією перетину сфери  $\Phi$  конусом  $\Phi^1$ . Слід звернути увагу на те, що вісь конуса проходить через центр сфери. Розріжемо сферу ще однією площиною  $\Delta(\Delta_2)$  і потім підберемо такий круговий циліндр  $\Phi^2(\Phi^2_2)$ , діаметр основи якого дорівнює діаметру кола  $b(b_2)$ , що утворилось у перетині сфери з

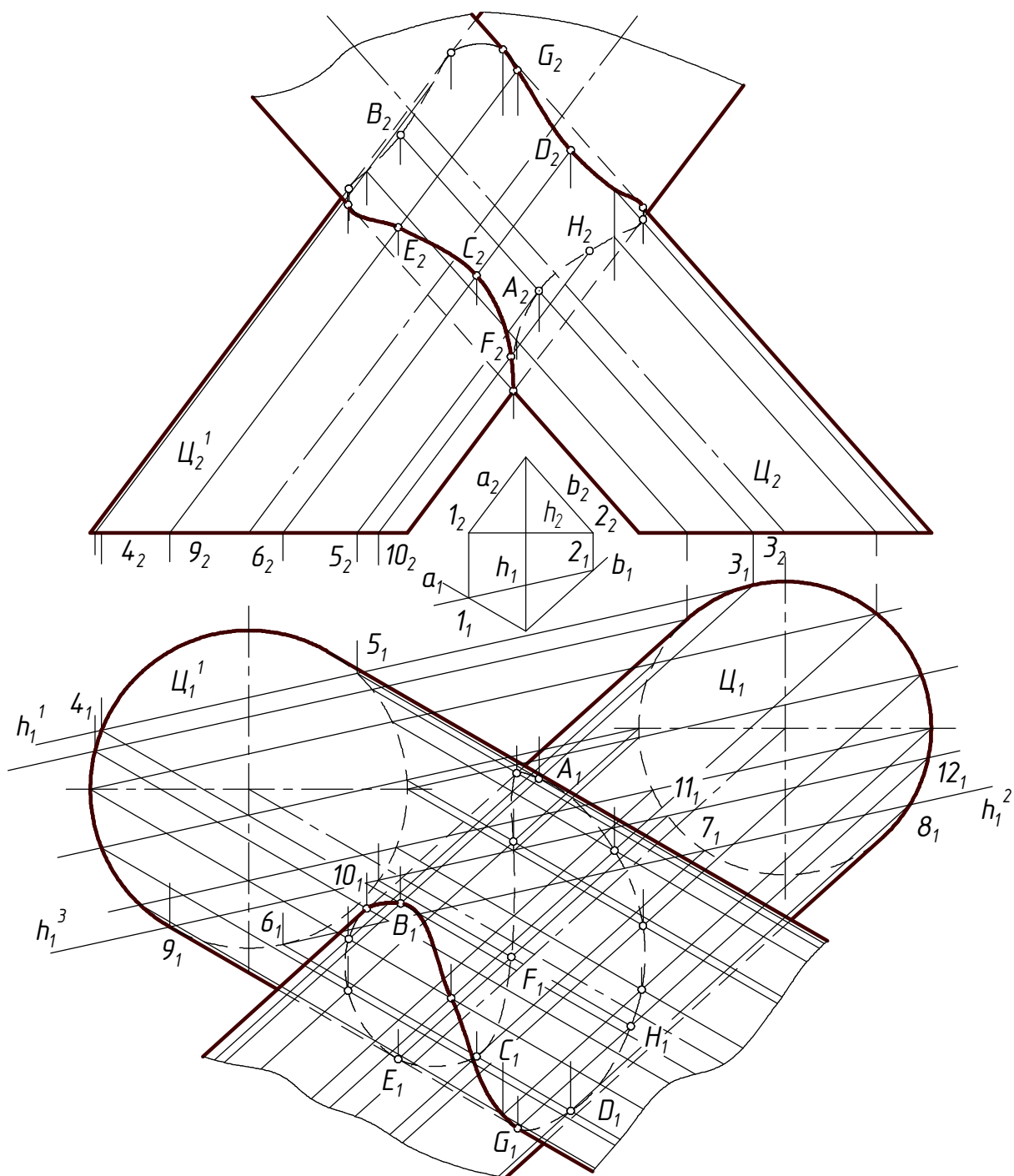


Рис. 11.15

площиною  $\Delta$ . Коло  $b$  є лінією перетину циліндра зі сферою. І знову звернемо увагу на те, що вісь циліндра проходить через центр сфери і, отже, осі конуса та циліндра перетинаються між собою у центрі сфери.

Якщо подовжити поверхню циліндра до повного проникнення сфери, дістанемо ще одне коло  $b'(b_2')$ , по якому циліндр перетинається зі сферою. Але коло  $b'$  перетинається з колом  $a$  в точках  $M(M_2)$  і  $N(N_2)$ . Ці точки розташовані одночасно на поверхнях сфери  $\Phi$ , конуса  $\Phi^1$  та циліндра  $\Phi^2$ . Іншими словами,

точки  $M$  і  $N$  належать до лінії перетину конуса з циліндром. Сфера ж тут відіграє роль поверхні-посередника, за допомогою якої побудовані спільні для циліндра і конуса точки. Із сказаного слід зробити висновок про можливість застосування сфер як поверхонь-посередників.

Для побудови лінії перетину поверхонь допоміжні сфери можна використовувати за наявності умов, якщо:

1) поверхні, що перетинаються, містять у собі сім'ї кругових перерізів;

2) центральні нормалі кругових перерізів заданих поверхонь перетинаються між собою і паралельні якійсь площині (центральна нормаль кругового перерізу – це пряма, що проходить через центр кола перерізу перпендикулярно до його площини);

Слід сказати, що побудова ліній перетину поверхонь за допомогою допоміжних сфер виконується на одній проекції.

Приклад конкретного застосування способу сфер наведено на рис. 11.17, де побудована лінія перетину двох циліндрів (показано тільки фронтальну проекцію частини вертикального і половину горизонтального циліндрів), осі яких перетинаються.

Діаметри допоміжних сфер вибираються у певних межах. Сфера з мінімальним радіусом проводиться так, щоб вона дотикалась до однієї поверхні і перетинала другу. Так, наприклад, проведена сфера  $\Phi(\Phi_2)$ , яка дотикається до поверхні горизонтального циліндра по колу  $a(a_2)$  і перетинається з вертикальним циліндром по колу  $b(b_2)$ . У перетині кіл  $a$  та  $b$  утворились граничні точки  $A(A_2)$  і  $B(B_2)$ , проекції яких збігаються. Радіус максимальної сфери не повинен перевищувати відстань від точки перетину осей заданих поверхонь до найбільш віддаленої точки перетину контурних твірних цих поверхонь.

Проміжна сфера  $\Phi^1(\Phi_2^1)$  перетинає горизонтальний циліндр по двох колах  $c(c_2)$  і  $d(d_2)$ , а вертикальний - по колу  $e(e_2)$ . У перетині цих кіл маємо точки  $C$  та  $D$  ( $C_2 \equiv D_2$ ),  $E$  та  $F$  ( $E_2 \equiv F_2$ ) лінії перетину. Слід зауважити, що проекція лінії перетину циліндрів є гіперболою, а точки  $A_2 \equiv B_2$  – це її вершина.

Загальний випадок застосування допоміжних сфер для побудови лінії перетину конуса з похилим циліндром показано на рис. 11.18. Сфера  $\Phi(\Phi_2)$  з

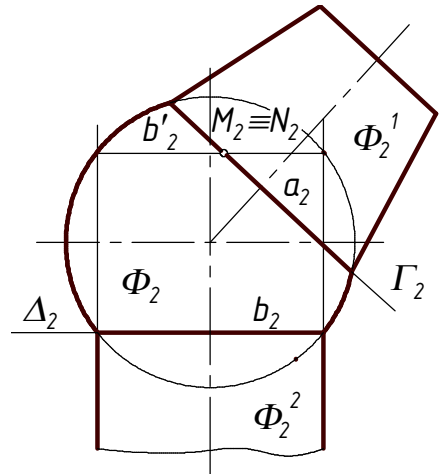


Рис. 11.16

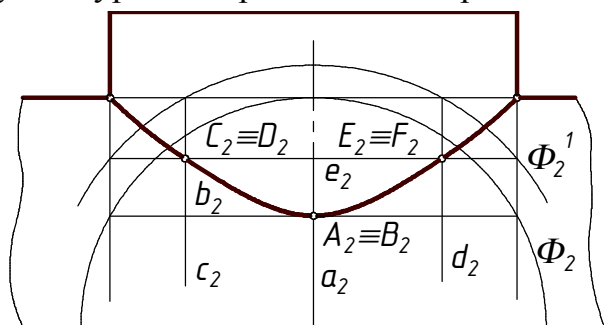


Рис. 11.17

мінімальним радіусом проведена так, щоб вона дотикалась до циліндра і перетиналася з конусом. Ця сфера дотикається до циліндра по колу  $a(a_2)$  і перетинається з конусом по колам  $b(b_2)$  і  $c(c_2)$ . У перетині цих кіл маємо точки А і В ( $A_2 \equiv B_2$ ), С і D ( $C_2 \equiv D_2$ ). Сфера максимального радіуса  $R_{\max}$  проведена через найбільш віддалену від точки перетину осей конуса й циліндра точку  $E(E_2)$  перетину їхніх контурних твірних. Радіуси усіх проміжних сфер змінюються у межах  $R_{\min} < R < R_{\max}$ . Так, проміжна сфера  $\Phi^1(\Phi_2^1)$  перети-

нається з конусом по колам  $d(d_2)$  і  $e(e_2)$ , а з циліндром - по колам  $f(f_2)$  і  $g(g_2)$ . У перетині цих кіл маємо точки І та  $J(I_2 \equiv J_2)$ , К та L ( $K_2 \equiv L_2$ ), М та N ( $M_2 \equiv N_2$ ). Горизонтальні проєкції усіх названих точок побудовані за умови належності їх горизонтальним колам, розташованим на поверхні конуса. Так, точки  $K_1, L_1, M_1, N_1$  побудовані на горизонтальній проєкції  $d_1$  кола  $d$ . Горизонтальні проєкції точок Е, F, G, Н знаходяться на горизонтальній осі симетрії фігури. За допомогою лекала побудовані точки сполучаються плавною кривою з урахуванням їхньої видимості.

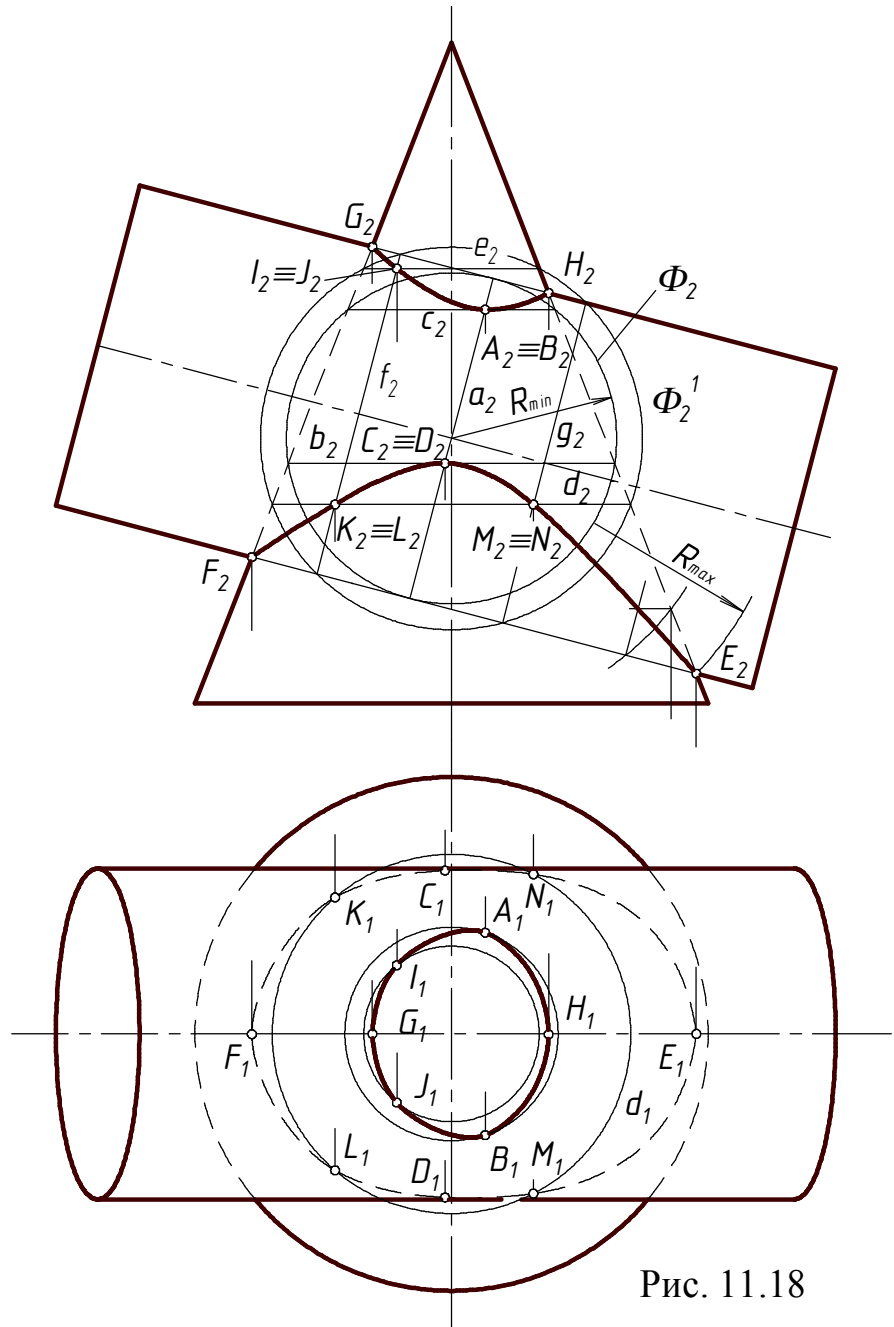


Рис. 11.18

Рис. 11.18



конус, як ми вже знаємо, по колу  $b(b_2)$ . Кола  $a(a_2)$  та  $b(b_2)$  перетинаються між собою (адже вони належать одній сфері) у точках  $A$  і  $B$  ( $A_2 \equiv B_2$ ), які належать лінії перетину конуса з напівкільцем.

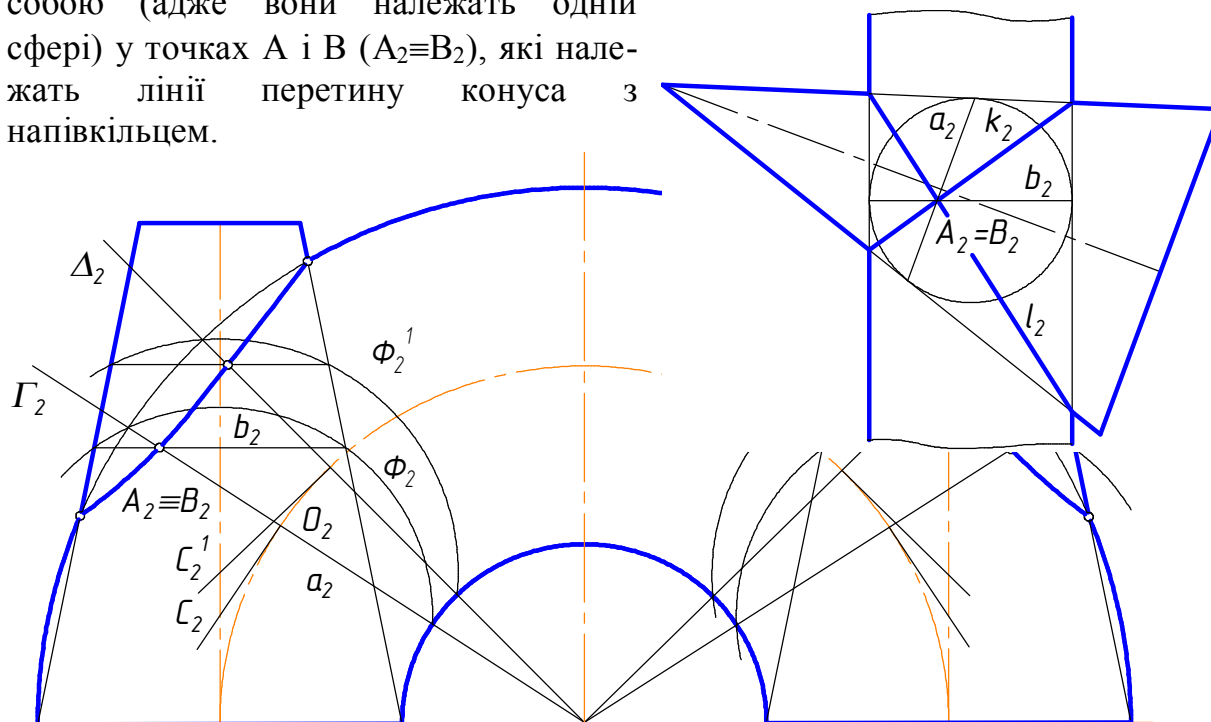


Рис. 11.20

Для побудови іншої пари точок проводимо через центр кільця нову площину  $\Delta(\Delta_2)$  і аналогічно описаним вище побудовам знаходимо на осі конуса центр  $C^1(C_2^1)$  нової сфери  $\Phi^2(\Phi_2^2)$  і т. д. Таким чином, центр кожної допоміжної сфери знаходиться у новій точці. Тому цей спосіб називають способом ексцентричних сфер, або сфер з "миттєвим" центром. На рис. 11.20 справа показані побудови ще для двох сфер.

### 11.3 Деякі особливі випадки перетину поверхонь

У деяких випадках лінія перетину кривих поверхонь може розпадатися на плоскі криві і навіть на прямі лінії. Наприклад, в геометрії відома теорема про подвійний дотик, наслідком якої є теорема Г. Монжа:

*Якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої чи вписані у неї, то вони перетинаються по двох плоских кривих другого порядку. Площини цих кривих проходять через пряму, яка сполучає точки перетину ліній дотику.*

Проілюструємо цю теорему декількома прикладами.

На рис. 11.21 показано конус і циліндр, що описані навколо однієї сфери. Конус дотикається до сфери по колу  $a(a_2)$ , а до циліндра - по колу  $b(b_2)$ . Лінія перетину конуса і циліндра розпалася на два еліпси  $l(l_2)$  та  $k(k_2)$ , пло-

щини яких проходять через точки  $A$  і  $B$  ( $A_2 \equiv B_2$ ) перетину кіл  $a$  і  $b$ . Оскільки осі конуса та циліндра паралельні площині  $\Pi_2$ , то кола  $a$  і  $b$  та еліпси  $k$  і  $l$  спроеціювались на неї у відрізки прямих ліній. На рис. 11.22 показано два стиснутих еліпсоїди, що вписані в одну сферу.

Рис. 11.21

Лінії  $m(m_2)$  та  $n(n_2)$  –

це кола дотику еліпсоїдів до поверхні

сфери. Лінія перетину еліпсоїдів - це два еліпси  $l(l_2)$  та  $k(k_2)$ , які зобразилися двома відрізками прямих.

Практичне застосування названої теореми показано на рис. 11.23, 11.24. Отвори однакових діаметрів просвердлені у тілі деталі (рис. 11.23). Вони перетинаються по еліпсах, що зобразилися відрізками прямих. На рис. 11.24

показано перетин двох циліндрів однакових діаметрів. Вони можуть бути ілюстрацією трубопроводів чи балок будівельних конструкцій, що перетинаються і т. ін. На цьому

Рис. 11.22

рисунку чітко видно, як мають бути підготовлені кромки деталей, що перетинаються, для щільного з'єднання їх у конструкціях.

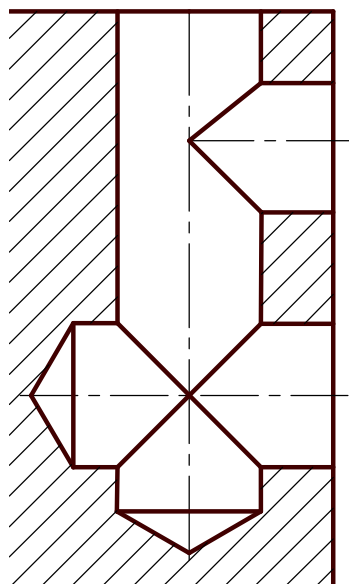
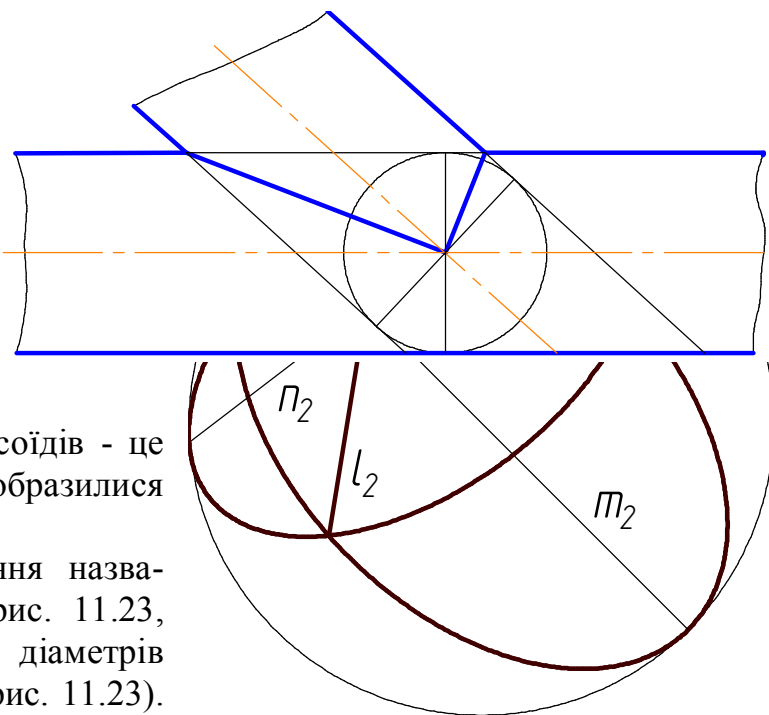


Рис. 11.24

Рис. 11.23

### Запитання для самоперевірки

1. Як будуються точки перетину прямої лінії з поверхнями конуса, циліндра, сфери?
2. Які лінії утворюються у перетині двох кривих поверхонь?
3. Які типові задачі можна навести щодо побудови ліній перетину кривих поверхонь залежно від положення їх щодо площин проекцій?
4. Якими способами будуються лінії перетину кривих поверхонь?
5. Які точки лінії перетину кривих поверхонь називають опорними?
6. Які площини використовуються як допоміжні для побудови ліній перетину кривих поверхонь?
7. За яких умов для побудови проекцій ліній перетину вживаються площини загального положення?
8. За яких умов вживаються сфери як поверхні-посередники?
9. У яких випадках лінії перетину кривих поверхонь розпадаються на плоскі криві?