МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

до лабораторних робіт по курсу

“ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ”

(частина 1)

Донецьк 2010

УДК 681.3.06(071)

Методичні вказівки і завдання до лабораторних робіт по курсу “Теорія випадкових процесів” (частина 1) / укладачі: І.А.Назарова, Л.В.Незамова, -Донецьк: ДонНТУ, 2010. – 78 с.

У посібнику викладені основи сучасної теорії випадкових процесів. Описані моделі процесів з дискретним і безперервним часом, методи їх дослідження й використання для розв'язання прикладних завдань. Розглянуті рішення багатьох типових прикладів, приведені завдання для самостійного рішення.

Методичний посібник призначений для студентів технічних вузів, що спеціалізуються в області прикладної математики, теорії управління й обробки інформації.

Рецензент: Т.В. Михайлова

ЗМІСТ

ВСТУП

У свій час в результаті розширення сфери застосування математики в науці та техниці з'явилась необхідність досліджувати випадкові величини, що змінюються в часі, такі величини отримали назву випадкових функцій**.** Підрозділ математики (а саме математичної статистики), який займається вивченням випадкових процесів, їх властивостей та застосування і складає предмет - Теорія випадкових процесів.

Теорія випадкових процесів широко застосовується, коли йдеться про вивчення економічних, екологічних, соціальних та технічних систем. Базуючись на цій теорії, створюють стохастичні моделі, що описують більшість видів господарської діяльності людини і дають змогу з певною ймовірністю прогнозувати ситуації, які можуть виникати внаслідок цієї діяльності.

У світі, що нас оточує, часто спостерігаються процеси, перебіг яких передбачити неможливо. Ця невизначеність зумовлюється впливом випадкових факторів на хід процесу. Можна впевнитися, що в будь-якому процесі присутній елемент випадковості, який виявляється більшою чи меншою мірою залежно від його фізичної основи.

У більшості випадків кінцевим результатом експерименту є числа або графіки. Ці показники несуть певну інформацію про стан об'єкта. Іноді цю інформацію легко розшифрувати й тим самим отримати відомості, що цікавлять нас, про об'єкт, але досить часто розшифрувати й зрозуміти коштовну інформацію, що міститься в отриманих показниках, важко, а часом і неможливо. Проблемою розшифрування й декодування отриманої інформації, а також її інтерпретацією займаються фізико-математичні науки, і особливу роль тут відіграє математична статистика, і зокрема її розділ - статистика випадкових процесів, до викладу якого ми переходимо в цьому виданні.

1 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ, ЇХ РОЗПОДІЛИ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Випадкова величина – це величина, яка в результаті експеременту може прийняти те або інше значення, невідомо заздалегідь, яке саме. Випадкові величини позначатимемо великими літерами **X**, **Y**, **Z** … а їхні можливі значення – малими літерами **x**, **y**, **z** … латинського алфавіту.

Дискретною величиною називається випадкова величина, що приймає відділені друг від друга значення, які можна перенумерувати.

Неперервною величиною називається випадкова величина, можливі значення якої суцільно заповнюють деякий інтервал.

Згідно з теорією ймовірностей випадкова величина **X** є функція елементарної події: $\mathbf{X= X(\omega)}$, де ω − елементарна подія, яка належить простору Ω $(\omega\in\Omega)$. Множина можливих значень випадкової величини **X** складається з усіх значень, яких набуває функція $\mathbf{X(\omega)}$. Якщо ця множина скінченна або зліченна, то випадкова величина **X** називається **дискретною**, якщо незліченна – **неперервною**.

Для того, щоб описати випадкову величину, необхідно вказати не тільки множину її можливих значень, а й охарактеризувати **ймовірності** всіх можливих подій, пов’язаних із випадковою величиною (наприклад, імовірність того, що вона набуде того чи іншого значення або потрапить у деякий інтервал). Такий повний опис випадкової величини називається її законом розподілу**.** Тобто **законом розподілу** випадкової величини називається всяке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини й відповідними їм імовірностями. Закон розподілу може мати різні форми.

Найбільш загальним способом завдання різних по своїй природі випадкових величин є **функція розподілу** випадкової величини. **Функцією розподілу F(x)** випадкової величини **X** називається імовірність того, що випадкова величина **X** прийме значення, менше чим **x**:

$$F(x) = P(X < x)$$

Функція розподілу є найбільш загальною формою закону розподілу, придатною для характеристики всіх випадкових величин (як дискретних, так і неперервних). Знаючи функцію розподілу **F(x)** випадкової величини **X**, можна обчислити ймовірності будь-яких подій, які з нею пов'язані.

Основні властивості Функція розподілу випадкової величини:

1. Імовірність того, що випадкова величина **X** набуде значення з проміжку [x1,x2) дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку: $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

2. Якщо $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$, тобто $F(x)$ – неспадна функція.

3. Значення функції розподілу належать відрізку [0,1], тобто $0 \le F(x) < 1$.

4. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, тобто $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)=0$ *і* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)=1$.

5. $\lim\limits_{x \to x_0+0} F(x) = F(x_0)$, тобто функція **F(x)** – неперервна зліва.

6. $dF(x)=f(x)dx$ (для неперервної випадкової величини)

1.1 Функція розподілу дискретної випадкової величини

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною. Нехай **X** – дискретна випадкова величина, можливими значеннями якої є числа $x_1, x_2, \dots x_n$. Через $p_k = \{X = x_k\}$ позначимо ймовірність того, що випадкова величина **X** набуває значення x_k, $p_k \ge 0$.

Події $\{X = x_k\}$, $k=1, \dots, n$ утворюють повну групу подій, тому

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Законом розподілу (імовірностей) дискретної випадкової величини називається відповідність між усіма її можливими значеннями та їхніми імовірностями.

Якщо **X** – дискретна випадкова величина, що приймає значення $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ з імовірністю $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, то таблиця1 називається розподілом дискретної випадкової величини (табличний запис розподілу).

Таблиця1.1 Розподіл дискретної випадкової величини

x_k	x_1	x_2	…	x_n
p_k	p_1	p_2	…	p_n

За допомогою табличного запису закону розподілу можна визначити **функцію розподілу F(x)** випадкової величини **X** за формулою, у якій підсумовування проводиться за усіма індексами **k**, для яких $\mathbf{x_k < x}$:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_k < x} p_k$$

Функція розподілу випадкової величини, з таким розподілом, має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x < x_3 \\ \quad .... & \\ 1, & x > x_n \end{cases}$$

У дискретної випадкової величини функція розподілу східчаста (рис.1.1) .

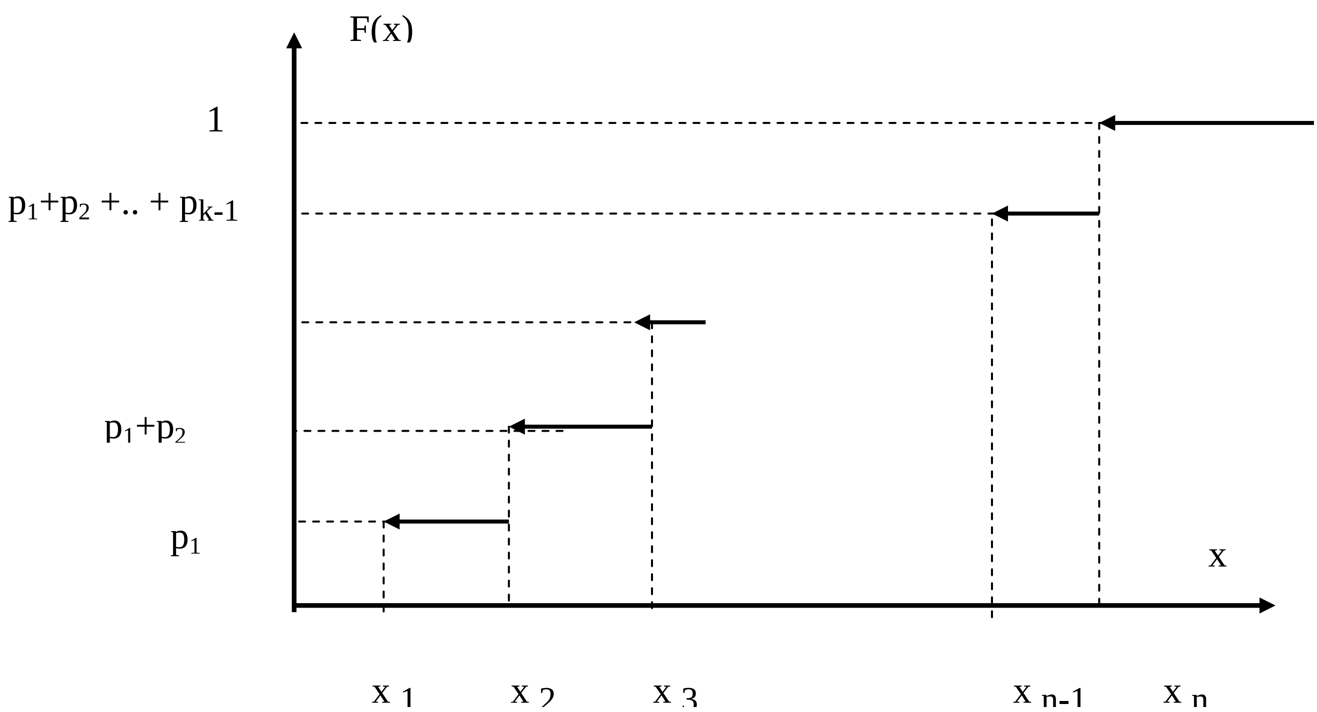

Рис.1.1 – Графік функції розподілу дискретної випадкової величини

1.2 Функція розподілу неперервної випадкової величини

Неперервна випадкова величина – це випадкова величина **X**, можливі значення якої суцільно заповнюють деякий скінченний або нескінченний проміжок на числовій прямій. Оскільки множина можливих значень неперервної випадкової величини незліченна, то для неї непридатна характеристика розподілу у формі переліку її значень та відповідних імовірностей тому, що значення цієї множини неможливо записати як послідовність.

Неперервна випадкова величина приймає можливі значення, що заповнюють суцільно заданий інтервал, причому для будь-якого *x* із цього інтервалу існує границя:

$$\mathbf{p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}}$$

Функція **p(x)** - щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини **X**. **Щільністю розподілу** неперервної випадкової величини называють першу похідну від функції розподілу **p(x) = F'(x)**. Знаючи щільність розподілу, можна знайти функцію розподілу. Випадкову величину **X** називають **неперервною**, якщо існує невід'ємна функція p(x) така, що для всіх x функціярозподілу випадкової величини **X** визначається у вигляді:

$$\mathbf{F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx}$$

Функція розподілу неперервної випадкової величини неперервна (інтеграл – неперервна функція верхньої межі інтегрування).

Графік функції розподілу для неперервної випадкової величини називається (**інтегральною**) **кривою розподілу** і має, наприклад, вид зазначений на рис.1.2.

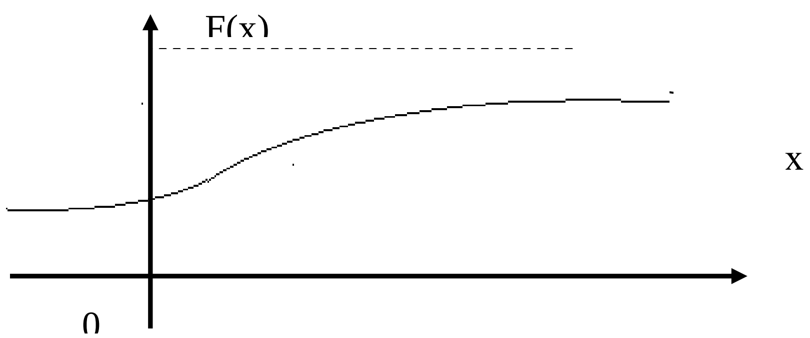

Рис.1.2 – Графік функції розподілу неперервної випадкової величини

1.3 Математичне очікування та його властивості

Найповнішу інформацію про випадкову величину дає її функція розподілу. Проте іноді навіть зручніше користуватися числами, які описують випадкову величину сумарно і називаються **числовими характеристиками** цієї величини. Основні з них **математичне сподівання** та **дисперсія**.

Нехай **X** – дискретна випадкова величина, яка може набувати значень $x_1, x_2, \dots$ відповідно з імовірностями $p1, p2, \dots$

Для **дискретної випадкової величини X** с кінцевим числом значень під математичним очікуванням розуміється величина

$$\mathbf{M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

Нехай X – неперервна випадкова величина з щільністю розподілу ймовірностей **p(x).**

Математичне очікування неперервної випадкової величини **X**

$$\mathbf{M\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx}$$

- Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій величині, тобто якщо, **C=const**, то **M (C)=C**.
- Сталий множник виноситься за знак математичного сподівання, тобто якщо, **C=const** , то **M(C·X)=C·M(X)**.
- Математичне сподівання алгебраїчної суми двох випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин, тобто **M(X±Y)=M(X) ± M(Y)**.
- Якщо випадкові величини **X** і **Y** – незалежні, то **M(X·Y)=M(X)· M(Y)**

1.4 Дисперсія та її властивості

Дисперсія випадкової величини характеризує відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

Дисперсією випадкової величини **X** називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї випадкової величини від її математичного сподівання

$$\mathbf{D(X)=M(X-M(X))^2}$$

З властивостей математичного сподівання випливає, що дисперсію дискретної і нерерервної випадкових величин можна обчислити відповідно за формулами:

$$\mathbf{D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2\cdot p_i}$$ - для дискретної випадкової величини

$$\mathbf{D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(X-M(X))^2\cdot p(x)dx}$$ - для неперервної випадкової величини

- Дисперсія сталої величини дорівнює нулю, тобто якщо, **C=const**, то **D(C) =0.**
- Сталий множник виноситься у квадраті за знак дисперсії, тобто якщо, **C=const** , то $\mathbf{D(C\cdot X)=C^2\cdot D(X)}$.
- Дисперсія алгебраїчної суми двох (або кількох) випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі дисперсій цих величин, тобто **D(X+Y)=D(X) + D(Y).**

1.5 Основні розподіли випадкових величин

<u>Рівномірно розподілена випадкова величина</u>

Неперервна випадкова величина, має рівномірне розподілення на проміжку [a,b], якщо на цьому відрізку щільність розподілу **f(x)** постійний, а за його межами дорівнює 0 (рис.1.3).

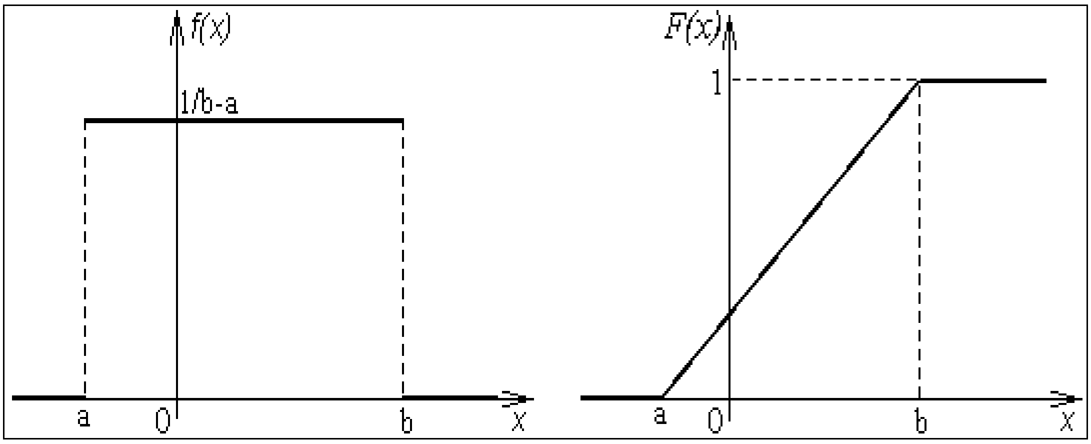

Рис.1.3 – Функції f(x) та F(X) рівномірно розподіленої випадкової величини

Рівномірний розподіл задають функцією розподілу **F(x)** яка є неперервною.

$$\mathbf{F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x - a}{b - a}, & a< x\le b\\ 1, & x> b\end{cases}}$$

Відповідну щільність розподілу ймовірностей можна визначити як похідну функції розподілу:

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}}$$

Математичне сподівання $\mathbf{M(x)=\dfrac{b+a}{2}}$

Дисперсія $\mathbf{D(x)=\dfrac{(b\text{-}a)^2}{12}}$

<u>Експонентний розподіл</u>

Неперервна випадкова величина **X** називається розподіленою за експонентним законом або експонентно розподіленою**,** з параметром λ, якщо щільність розподілу **f(x)** її ймовірностей має вигляд:

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x< 0\end{cases}}$$

Відповідна функція розподілу має вигляд:

$$\mathbf{F(x)=\begin{cases}0, & x< 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}}$$

Математичне сподівання $\mathbf{M(x)=\dfrac{1}{\lambda}}$

Дисперсія $\mathbf{D(x)=\dfrac{1}{\lambda^2}}$

На рис.1.4. представлено щільність розподілу **f(x)** та функція розподілу **F(X)**.

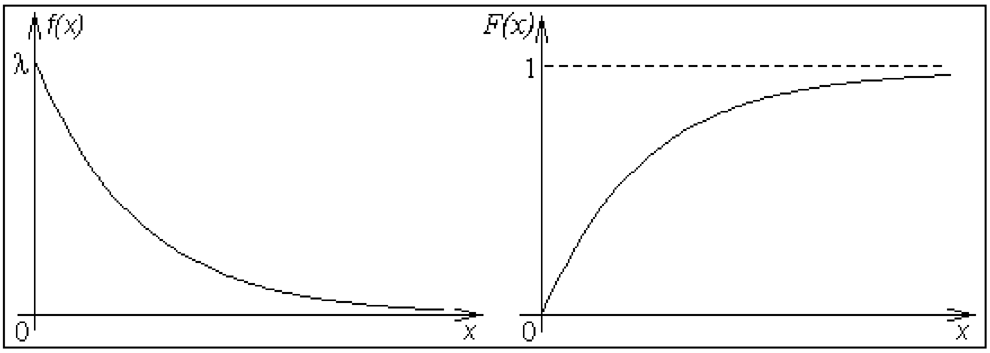

Рис.1.4 - Функції f(x) та F(X) розподілу випадкової величини за експонентним законом

Неперервна випадкова величина X називається розподіленою за нормальним законом, або нормально розподіленою якщо її щільність розподілу має вигляд (рис.1.5):

$$\mathbf{f(x)} = \frac{1}{\delta \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \ \mathbf{e}^{\frac{-(x-m_x)^2}{2 \cdot \delta^2}} \quad , \quad -\ \infty < \mathbf{x} < \infty$$

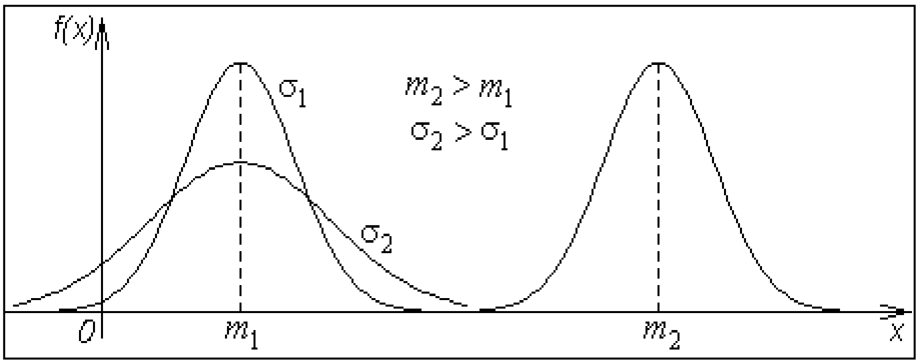

Рис.1.5 - Графики щільністі розподілу за нормальним законом

- Max при **x = $\mathbf{m_x}$** .
- **$\mathbf{m_x}$ +δ, $\mathbf{m_x}$ -δ** - крапка перегину.
- Якщо змінюється **x**, то графік зміщається вправо, паралельно осі Ох.
- Зміна **δ** приводить до зміни кривої*:* при **δ** >**1**, розтягнення кривою

відносно $\mathbf{m_x}$, при $\mathbf{\delta < 1}$ стиснення відносно $\mathbf{m_x}$.

Функцію розподілу випадкової величини за нормальним законом $\mathbf{X \sim N(m_x, \delta)}$ записують у вигляді

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\delta\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\cdot\delta^2}}dx => \left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{(x-m_x)}{\delta} \\ x=t\cdot\delta+m \\ dx=\delta\cdot dt \end{array}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi\left[\frac{x-m_x}{\delta}\right]$$

Φ(x)=F(x) – Функцію розподілу випадкової величини за нормальним законом. Функцію розподілу стандартної нормальної ВВ(випадкової величини) $\mathbf{X \sim N}(0{,}1)$, називається також функцією Лапласа (рис. 1.6).

$$\mathbf{\Phi(-x)=1-\Phi(x)}$$

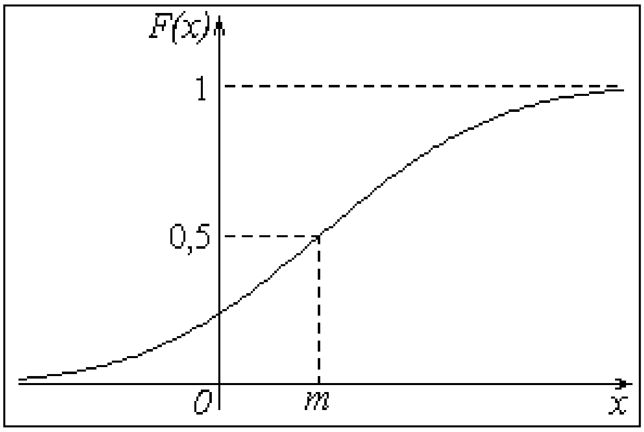

Рис.1.6 - Функція Лапласа

Біномний закон розподілу

Проводиться **n** незалежних випробувань за схемою Бернуллі і **p=P(A)** – імовірність появи події **А** в кожному окремому випробуванні. Необхідно записати закон розподілу дискретної випадкової величини **Х** – кількості появ події **А** в цих **n** випробуваннях.

Випадкова величина **Х** може набути значень $\mathbf{x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\ \dots,\ x_n=n}$ Імовірності можливих значень $\mathbf{x_k}$ випадкової величини **Х** обчислені за біномною формулою:

$$\mathbf{p_k = P\{X = x_k\} = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\quad q = 1 - p}$$

і закон розподілуописаної випадкової величини **X** – біномний.

Таблиця 1.2 Біномний розподіл випадкової дискретної величини *X*

$X = x_k$	0	1	2	…	n
$P = p_k$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$		p^n

Математичне сподівання **M(x)=np** Дисперсія **D(x)=npq=np(1-p)**

<u>Розподіл Пуассона</u>

Розподіл імовірностей дискретної випадкової величини **X**, яка набуває значень $\mathbf{x_k}$**: 0,1,2, …, n** з імовірностями

$$\mathbf{p_k = P\{X = xk\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\ldots}$$

називається законом розподілу Пуассона**,** що залежить від параметра $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$.

Таблиця 1.3 Закон розподілу Пуассона випадкової дискретної величини Х

$X = x_k$	0	1	2	…	n
$P = p_k$	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$		$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

Математичне сподівання **M(x)=λ** Дисперсія **D(x)=λ**

1.6 Завдання до лабораторної роботи

- **U∈N(m, δ)** - випадкова величина **U** розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням **m** і дисперсією $\boldsymbol{\delta}^{2}$.
- **U∈R(a; b)** − випадкова величина *U* розподілена рівномірно на відрізку [a, b].
- ***U∈E(λ)*** **−** випадкова величина **U** розподілена по експонентному закону з параметром **λ.**
- **U∈B(n, p) −** випадкова величина **U** розподілена по біноміальному закону з параметрами **n** и **p**.

- **U∈P(λ) −** випадкова величина U розподілена за законом Пуассона з параметром ***λ***.

Для кожної випадкової величини U і V (таблиця 1.4) маємо свій закон розподілу. Обчислити математичне сподівання і дисперсію для цих величин.

Таблиця 1.4 – Варіанти індивідуальних завдань

№	Закони розподілу випадкових величин U і V
1	U∈N(3;2), V∈E(0.5)
2	U∈R(0;6), V∈B(10;0.5)
3	U∈P(0.2), V∈R(-2;2)
4	U∈N(1;2), V∈P(2)
5	U∈R(-1;3), V∈E(0.4)
6	U∈E(0.25), V∈R(2:4)
7	U∈B(10;0.3), V∈P(3)
8	U∈R(-3;1), V∈N(-1;0.5)
9	U∈E(0.1), V∈B(20;0.2)
10	U∈N(-2;2), V∈E(4)
11	U∈R(-3;3), V∈B(10;0.6)
12	U∈P(4), V∈R(1;3)
13	U∈N(-1;0.7), V∈E(0.5)
14	U∈R(3;6), V∈N(2;3)
15	U∈P(5), V∈R(-3;5)
16	U∈N(-2;1.5), V∈E(0.2)
17	U∈B(10;0.1), V∈N(3;0.3)
18	U∈P(2), V∈R(-2;4)
19	U∈N(-1;2), V∈E(1/3)
20	U∈R(-2;2), V∈B(20;0.4)
21	U∈E(1/4), V∈R(-5;-1)
22	U∈N(5;2), V∈P(3)

23	$U \in R(3;6)$, $V \in B(20;0.5)$
24	$U \in E(2)$, $V \in R(-1;5)$
25	$U \in P(2)$; $V \in N(3;0.3)$

2. ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Теорією випадкових процесів називається математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ у динаміці їх розвитку. При вивченні явищ навколишнього середовища зустрічаємося із процесами, перебіг яких заздалегідь передбачити в точності неможливо. Ця непередбачуваність викликана впливом випадкових факторів, що впливають на хід процесу.

Можна виділити два основні види завдань, вирішення яких вимагає використання теорії випадкових функцій (випадкових процесів).

Пряме завдання (**аналіз**): задані параметри деякого обладнання і його імовірнісні характеристики (математичні очікування, кореляційні функції, закони розподілу) подані на його "вхід" функції (сигналу, процесу); потрібно визначити характеристики на "виході" обладнання (по них судять про якість роботи обладнання).

Зворотне завдання (**синтез**): задані імовірнісні характеристики "вхідної" і "вихідної" функцій; потрібно спроектувати оптимальне обладнання (знайти його параметри), що здійснює перетворення заданої вхідної функції в таку вихідну функцію, яка має задані характеристики.

Випадковою функцією (**ВФ**) називають функцію невипадкового аргументу **t**, яка при кожному фіксованому значенні аргументу є випадковою величиною. Випадкові функції аргументу *t* позначають прописними літерами **X(t)** , **Y(t)** і т.д.

Перерізом випадкової функції називають випадкову величину, відповідну до фіксованого значення аргументу випадкової функції, тобто випадкову функцію можна розглядати як сукупність випадкових величин **{X(t)}**, що залежать від параметра ***t***.

Реалізацією (**траєкторією, вибірковою функцією**) випадкової функції **X(t)** називають невипадкову функцію аргументу **t**, у яку перетворюється **ВФ** у результаті випробування. Таким чином, якщо в експеременті спостерігають випадкову функцію, то в дійсності спостерігають одну з можливих її реалізацій, при повторенні експеременту буде спостерігатися інша реалізація.

Реалізації функції X(t) позначають малими літерами $\mathbf{x_t(t)}$, $\mathbf{x_z(t)}$ … , де індекс вказує номер випробування. Наприклад, якщо **X(t) = Usint**, де **U** - безперервна випадкова величина, яка в першому випробуванні прийняла можливе значення $\mathbf{u_1 = 3}$, а в другому випробуванні $\mathbf{u_2 = 4{,}6}$, то реалізаціями **X(t)** є відповідно невипадкові функції $\mathbf{x_1(t) = 3\ sint}$і $\mathbf{x_2(t) = 4{,}6\ sin\ t}$.

Таким чином, випадкову функцію можна розглядати як сукупність її можливих реалізацій. Нижче приводяться приклади запису випадкових функцій.

Випадковими є функції:

X(t) = sin Ωt, де **Ω —** випадкова величина,

X(t) = U sin t, де **U —** випадкова величина,

X(t) = U sin Ωt, де **Ω** и **U—** випадкові величини.

Кореляційною теорією випадкових функцій називають теорію, засновану на вивченні моментів першого й другого порядку. Ця теорія виявляється достатньою для розв'язання багатьох завдань практики.

На відміну від випадкових величин, для яких моменти є числами й тому їх називають **числовими характеристиками**, моменти випадкової функції є невипадковими функціями (їх називають **характеристиками випадкової функції**).

Нижче приведені наступні характеристики випадкової функції: **математичне очікування** (початковий момент першого порядку), **дисперсія** (центральний момент другого порядку), **кореляційна функція** (кореляційний момент).

2.1 Математичне очікування випадкової функції

При фіксованому значенні **t** переріз **X(t)** є випадковою величиною. Нехай для будь-якого $\mathbf{t \in T}$ існує математичне очікування **M[X(t)]** , тобто вважаємося, що математичне очікування будь-якого перерізу існує. Таким чином, кожне фіксоване значення аргументу визначає переріз - випадкову величину, а кожній випадковій величині відповідає її математичне очікування. Звідси випливає, що кожному фіксованому значенню аргументу *t* відповідає певне математичне очікування, а це означає, що математичне очікування випадкової функції є функція (невипадкова) від аргументу **t**, її позначають через $\mathbf{m_x(t)}$.

Математичне очікування випадкової функції **X(t)** - невипадкова функція, значення якої при кожному фіксованому значенні аргументу **t** дорівнює математичному очікуванню перерізу, що відповідає цьому ж фіксованому значенню аргументу:

$$\mathbf{m_X(t) = M[X(t)]}$$

Властивості математичного очікування ВФ

Нехай $\mathbf{X(t), Y(t)}$ – деякі випадкові функції, $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(t)}$ – невипадкова функція, **C** – константа.

1. Математичного очікування не випадкової функції $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(t)}$ дорівнює цій не випадковій функції:

$$\mathbf{M[\boldsymbol{\varphi}(t)] = \boldsymbol{\varphi}(t)}$$

2. Сталий множник виноситься за знак математичного сподівання:

$$\mathbf{M[C \cdot X(t)] = C \cdot M[X(t)]}$$

3. Не випадкову функцію $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(t)}$ можно виносити за знак математичного сподівання:

$$\mathbf{M[\boldsymbol{\varphi}(t) \cdot X(t)] = \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot M[X(t)]}$$

4. Математичного очікування суми двох випадкових функцій дорівнює сумі їх математичних очікувань:

$$\mathbf{M[X(t) + Y(t)] = M[X(t)] + M[Y(t)]}$$

як наслідок:

$$\mathbf{M[\boldsymbol{\varphi}(t) + X(t)] = \boldsymbol{\varphi}(t) + M[X(t)]}$$

5. Математичний добуток двох випадкових функцій дорівнює добутку їх математичних очікувань, якщо $\mathbf{X(t), Y(t)}$ - некорельовані при кожному $\mathbf{t \in (-\infty, +\infty)}$:

$$\mathbf{M[X(t) \cdot Y(t)] = M[X(t)] \cdot M[Y(t)]}$$

2.2 Дисперсія випадкової функції

Дисперсія ВФ $\mathbf{X(t)}$ - невипадкова функція $\mathbf{D_X(t)}$, яка при будь-якому значенні аргументу **t** дорівнює дисперсії перерізу випадкової функції $\mathbf{X(t)}$, тобто

$$\mathbf{D_X(t) = D[X(t)].}$$

Дисперсія характеризує ступінь розсіювання можливих реалізацій навколо математичного очікування випадкової функції. При фіксованому значенні аргументу дисперсія характеризує ступінь розсіювання можливих значень (ординат) перерізу навколо математичного перерізу.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової функції $\mathbf{X(t)}$ називається корінь квадратний із дисперсії:

$$\boldsymbol{\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)}.}$$

Властивості дисперсії ВФ

Нехай $\mathbf{X(t), Y(t)}$ – деякі випадкові функції, $\boldsymbol{\varphi(t)}$ – невипадкова функція, **C** – константа.

1. Дисперсією випадкової функції $\mathbf{X(t)}$ називають невипадкову невід’ємну функцію $\mathbf{D_X(t)}$:

$$\mathbf{D[X(t)] \ge 0.}$$

2. Дисперсія невипадкової функції $\boldsymbol{\varphi(t)}$ дорівнює нулю:

$$\mathbf{D[\boldsymbol{\varphi}(t)] = 0}.$$

3. Дисперсія суми випадкової функції $\mathbf{X(t)}$ і невипадкової функції $\boldsymbol{\varphi(t)}$ дорівнює дисперсії випадкової функції:

$$\mathbf{D[X(t) + \boldsymbol{\varphi}(t)] = D[X(t)]}.$$

4. Дисперсія добутку випадкової $\mathbf{X(t)}$ і невипадкової функції $\boldsymbol{\varphi(t)}$ дорівнює добутку квадрата невипадкової функції на дисперсію випадкової функції:

$$\mathbf{D[X(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}(t)] = \boldsymbol{\varphi}^2(t) \cdot D[X(t)]}.$$

5. Дисперсія суми двох випадкових функцій дорівнює сумі їх дисперсій, якщо $\mathbf{X(t), Y(t)}$ некорельовані при кожному $\mathbf{t \in (-\infty, +\infty)}$.

$$\mathbf{D[X(t) + Y(t)] = D[X(t)] + D[Y(t)]}.$$

2.3 Кореляційна функція ВФ

Математичне очікування й дисперсія характеризують випадкову функцію не повно. Можна привести приклади двох випадкових функцій, які мають однакові математичні очікування й дисперсії, але поведінка яких різна. Знаючи лише ці дві характеристики, зокрема, нічого не можна сказати про ступінь залежності двох перерізів. Для оцінки цієї залежності вводять нову характеристику - кореляційну функцію. Знаючи кореляційну функцію, можна знайти і дисперсію при цьому знати закон розподілу для відшукання дисперсії немає необхідності.

Для послідовного перехід до подальшого матеріалу, введемо поняття центрованої випадкової функції.

Центрована випадкова функція – - різниця між випадковою функцією і її математичним очікуванням:

$$\overset{\bullet}{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}(\mathbf{t}) - \mathbf{M}[\mathbf{X}(\mathbf{t})].$$

Кореляційна функція випадкової функції $\mathbf{X(t)}$ – невипадкова функція $\mathbf{K_X(t_1,t_2)}$ двох незалежних аргументів $\mathbf{t_1}$ і $\mathbf{t_2}$, значення якої при кожній парі фіксованих значень аргументів дорівнює кореляційну моменту перерізів, які відповідають цим же фіксованим значенням аргументів:

$$\mathbf{K_x(t_1,t_2) = M[\overset{\bullet}{X}(t_1) \cdot \overset{\bullet}{X}(t_2)]}.$$

Нормована кореляційна функція випадкової $\mathbf{X(t)}$ – невипадкова функція двох незалежних змінних $\mathbf{t_1}$ і $\mathbf{t_2}$, значення якої при кожній парі фіксованих значень аргументів дорівнює коефіцієнту кореляції перерізів, які відповідають цим же фіксованим значенням аргументів:

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t_1,t_2}) = \frac{\mathbf{K_X(t_1,t_2)}}{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t_1}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t_2})},$$

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t_1,t_2}) = \frac{\mathbf{K_X(t_1,t_2)}}{\sqrt{\mathbf{K_X(t_1,t_1)}} \cdot \sqrt{\mathbf{K_X(t_2,t_2)}}}.$$

Властивості кореляційної функції ВФ

Нехай $\mathbf{X(t)}$ випадкова функція, $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(t)}$ – невипадкова функція, $\mathbf{U}$ – випадкова величина

1.

$$\mathbf{K_x(t_1,t_2)=M[X(t_1)\cdot X(t_2)]-m_X(t_1)\cdot m_X(t_2).}$$

2. При перестановці аргументів кореляційна функція не змінюється:

$$\mathbf{K_X(t_1,t_2)=K_X(t_2,t_1)}.$$

3. Додаток до випадкової функції $\mathbf{X(t)}$ невипадкової функції $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(t)}$ не змінює її кореляційної функції

$$\mathbf{K_{X+\boldsymbol{\varphi}}(t_1,t_2)=K_X(t_1,t_2)}.$$

4. При множенні випадкової функції $\mathbf{X(t)}$ на невипадковий множник $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(t)}$ її кореляційна функція множиться на добуток $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(t_1)}\cdot\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(t_2)}$

$$\mathbf{K_{\boldsymbol{\varphi}\cdot X}(t_1,t_2)=\boldsymbol{\varphi}(t_1)\cdot\boldsymbol{\varphi}(t_2)\cdot K_X(t_1,t_2)}.$$

5.

$$\mathbf{K_U(t_1,t_2)=D[U].}$$

6. При рівних між собою значеннях аргументів $\mathbf{t_1=t_2=t}$, кореляційна функція випадкової функції дорівнює дисперсії цієї функції

$$\mathbf{K_x(t,t)=D[X(t)].}$$

7. Абсолютна величина кореляційної функції не перевищує добутку середньо квадратичних відхилень відповідних перерізів

$$\mathbf{|K_X(t_1,t_2)|\le\boldsymbol{\sigma}_X(t_1)\cdot\boldsymbol{\sigma}_X(t_2)}.$$

8. Нормована кореляційна функція має ті ж властивості, що й кореляційна функція, причому абсолютна величина нормованої кореляційної функції не перевищує одиниці:

$$\mathbf{|\boldsymbol{\rho}_X(t_1,t_2)|\le 1,\ \boldsymbol{\rho}_X(t,t)=1.}$$

Імовірнісний зміст нормованої кореляційної функції полягає в тому, що чим ближче модуль цієї функції до 1, тим лінійний зв'язок між перерізами сильніше, і навпаки, чим ближче модуль цієї функції до 0, тем лінійний зв'язок між перерізами слабкіше.

2.4 Взаємна кореляційна функція ВФ

Взаємна кореляційна функція двох випадкових функцій $\mathbf{X(t)}$ і $\mathbf{Y(t)}$ – невипадкова функція $\mathbf{R_{X,Y}(t_1,t_2)}$ двох незалежних аргументів $\mathbf{t_1}$ і $\mathbf{t_2}$, значення якої при кожній парі фіксованих значень аргументів дорівнює дорівнює кореляційному моменту перерізів обох функцій, які відповідають цим же фіксованим значенням аргументів:

$$\mathbf{R_{X,Y}(t_1,t_2)=M[\dot{X}(t_1)\cdot\dot{Y}(t_2)]}.$$

Нормована взаємна кореляційна функція двох випадкових функцій $\mathbf{X(t)}$ і $\mathbf{Y(t)}$ – невипадкова функція двох незалежних аргументів $\mathbf{t_1}$ і $\mathbf{t_2}$:

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X,Y}}\mathbf{(t_1,t_2)=\frac{R_{X,Y}(t_1,t_2)}{\sqrt{K_X(t_1,t_1)}\cdot\sqrt{K_Y(t_2,t_2)}}=\frac{R_{X,Y}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)\cdot D_Y(t_2)}}}=$$

$$\mathbf{=\frac{R_{X,Y}(t_1,t_2)}{\boldsymbol{\sigma}_X(t_1)\cdot\boldsymbol{\sigma}_Y(t_2)}}.$$

Корельованими називають дві випадкові функції, якщо їх взаємна кореляційна функція не дорівнює нулю**.**

Некорельованими називають дві випадкові функції, якщо їх взаємна кореляційна функція дорівнює нулю**.**

Властивості взаємної кореляційної функції ВФ

Нехай $\mathbf{X(t),Y(t)}$ – деякі випадкові функції, $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(t)},\boldsymbol{\psi}\mathbf{(t)}$ – невипадкові функції.

1.

$$\mathbf{R_{X,Y}(t_1,t_2)=M[X(t_1)\cdot Y(t_2)]-m_X(t_1)\cdot m_Y(t_2)}$$

2. При одночасній перестановці індексів і аргументів взаємна кореляційна функція не змінюється:

$$\mathbf{R_{X,Y}(t_1,t_2)=R_{Y,X}(t_2,t_1)}.$$

3. Додаток до випадкових функцій $\mathbf{X(t),Y(t)}$ невипадкових доданків, відповідно $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(t)},\boldsymbol{\psi}\mathbf{(t)}$ не змінює їхню взаємну кореляційну функцію

$$\mathbf{R_{X+\varphi,Y+\psi}(t_1,t_2)=R_{X,Y}(t_1,t_2)}.$$

4. При множенні випадкових функцій $\mathbf{X(t)}$ і $\mathbf{Y(t)}$ на невипадкові множники, відповідно $\boldsymbol{\varphi(t),\psi(t)}$, взаємна кореляційна функція множиться на добуток $\boldsymbol{\varphi(t)\cdot\psi(t)}$:

$$\mathbf{R}_{\varphi\cdot X,\psi\cdot Y}(t_1,t_2)=\varphi(t_1)\cdot\psi(t_2)\cdot\mathbf{R}_{X,Y}(t_1,t_2).$$

5. Абсолютная величина взаємної кореляційної функції не перевищує добутку середньо квадратичних відхилень відповідних перерізів

$$\left|\mathbf{R}_{X,Y}(t_1,t_2)\right|\le\sigma_X(t_1)\cdot\sigma_Y(t_2)$$

6. Абсолютна величина нормованої взаємної кореляційної функції не перевищує одиниці:

$$\left|\rho_{X,Y}(t_1,t_2)\right|\le 1.$$

Теорема.

Якщо $\mathbf{Z(t)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{X_i(t)}$, то

$$\mathbf{K}_Z(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{K}_{X_i}(t_1,t_2)+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\mathbf{R}_{X_iX_j}(t_1,t_2)$$

Наслідок. Якщо $\mathbf{Z(t)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{X_i(t)}$ і випадкові функції $\mathbf{X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t)}$ попарно некорельовані, то

$$\mathbf{K}_Z(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{K}_{X_i}(t_1,t_2).$$

Для двох випадкових процесів $\mathbf{X(t),Y(t)}$ теорема й наслідок мають такий вигляд.

$$\mathbf{K}_{X+Y}(t_1,t_2)=\mathbf{K}_X(t_1,t_2)+\mathbf{K}_Y(t_1,t_2)+\mathbf{K}_{X,Y}(t_1,t_2)+\mathbf{K}_{X,Y}(t_2,t_1).$$

Кореляційна функція суми двох корельованих випадкових функцій дорівнює сумі кореляційних функцій доданків і взаємної кореляційної функції, що додається двічі (з рівним порядком проходження аргументів), тобто, якщо $\mathbf{Z(t)=X(t)+Y(t)}$.

Якщо випадкові функції $\mathbf{X(t),Y(t)}$ некорельовані, то

$$\mathbf{K}_{X+Y}(t_1,t_2)=\mathbf{K}_X(t_1,t_2)+\mathbf{K}_Y(t_1,t_2).$$

2.5 Рішення типових завдань

Завдання 1.

Знайти математичне очікування, кореляційну функцію й дисперсію випадкової функції: $\mathbf{X(t) = U \cdot sint + V \cdot cost}$, де $\mathbf{U}$ і $\mathbf{V}$ – некорельовані випадкові величини, причому $\mathbf{M[U] = 1}$, $\mathbf{M[V] = 8}$, $\mathbf{D[U] = D[V] = 4}$.

Рішення.

Математичне очікування ВФ $\mathbf{X(t)}$:

$$\mathbf{M[\ U \cdot sint + V \cdot cost\ ] = M[U \cdot sint] + M[V \cdot cost] =}$$
$$\mathbf{= sint \cdot M[U] + cost \cdot M[V] = 1 \cdot sint + 8 \cdot cost = sint + 8 \cdot cost}.$$

Дисперсія випадкової функції $\mathbf{X(t)}$:

$$\mathbf{D[U \cdot sint + V \cdot cost] = D[U \cdot sint] + D[V \cdot cost] =}$$
$$\mathbf{= sin^2 t \cdot D[U] + cos^2 t \cdot D[V] = 4 \cdot sin^2 t + 4 \cdot cos^2 t.}$$

<u>**Перший спосіб обчислення кореляційної функції.**</u>

Центровані величини:

$$\mathbf{\overset{\bullet}{X}(t_1) = U \cdot sint_1 + V \cdot cost_1 - sint_1 - 8 \cdot cost_1},$$
$$\mathbf{\overset{\bullet}{X}(t_2) = U \cdot sint_2 + V \cdot cost_2 - sint_2 - 8 \cdot cost_2}.$$

Кореляційна функція:

$$\mathbf{K(t_1, t_2) = M[\big(U \cdot sint_1 + V \cdot cost_1 - sint_1 - 8 \cdot cost_1\big) \times}$$
$$\mathbf{\times \big(U \cdot sint_2 + V \cdot cost_2 - sint_2 - 8 \cdot cost_2\big)] =}$$
$$\mathbf{= M[\big((U-1) \cdot sint_1 + (V-8) \cdot cost_1\big) \times \big((U-1) \cdot sint_2 + (V-8) \cdot cost_2\big)] =}$$
$$\mathbf{= M[(U-1)^2 \cdot sint_1 \cdot sint_2 + (V-8)^2 \cdot cost_1 \cdot cost_2 +}$$
$$\mathbf{+ (U-1) \cdot (V-8) \cdot sint_1 \cdot cost_2 + (U-1) \cdot (V-8) \cdot cost_1 \cdot sint_2] =}$$
$$\mathbf{= 4 \cdot sint_1 \cdot sint_2 + 4 \cdot cost_1 \cdot cost_2 +}$$
$$\mathbf{+ M[(U \cdot V - 8 \cdot U - 1 \cdot V + 8) \cdot (sint_1 \cdot cost_2 + cost_1 \cdot sint_2] =}$$
$$\mathbf{= 4 \cdot sint_1 \cdot sint_2 + 4 \cdot cost_1 \cdot cost_2 +}$$
$$\mathbf{+ (M[U \cdot V] - 8 \cdot M[U] - 1 \cdot M[V] + 8) \cdot (sint_1 \cdot cost_2 + cost_1 \cdot sint_2) =}$$

$$= 4 \cdot \sin t_1 \cdot \sin t_2 + 4 \cdot \cos t_1 \cdot \cos t_2 +$$
$$+ (M[U] \cdot M[V] - 8 - 8 + 8) \cdot (\sin t_1 \cdot \cos t_2 + \cos t_1 \cdot \sin t_2) =$$
$$= 4 \cdot \sin t_1 \cdot \sin t_2 + 4 \cdot \cos t_1 \cdot \cos t_2 - (8 - 8 - 8 + 8) \cdot (\sin t_1 \cdot \cos t_2 + \cos t_1 \cdot \sin t_2) =$$
$$= 4 \cdot \sin t_1 \cdot \sin t_2 + 4 \cdot \cos t_1 \cdot \cos t_2 .$$

<u>Другий спосіб.</u>

Випадкову функцію $X(t)$ можна представити як суму двох випадкових функцій:

$X(t) = X_1(t) + X_2(t) = U \cdot \sin t + V \cdot \cos t$.

$M[X_1(t)] = M[U \cdot \sin t] = \sin t \cdot M[U] = \sin t$,

$M[X_2(t)] = M[V \cdot \cos t] = \cos t \cdot M[V] = 8\cos t$.

Тоді, $M[X(t)] = M[X_1(t)] + M[X_2(t)] = \sin t + 8\cos t$.

По теоремі з пункту 2.4:

$$K_X(t_1,t_2) = K_{X_1}(t_1,t_2) + K_{X_2}(t_1,t_2) + R_{X_1X_2}(t_1,t_2) + R_{X_1X_2}(t_2,t_1) =$$
$$= K_{U\cdot\sin t}(t_1,t_2) + K_{V\cdot\cos t}(t_1,t_2) + R_{U\cdot\sin t, V\cos t}(t_1,t_2) + R_{U\cdot\sin t, V\cos t}(t_2,t_1).$$

Визначимо $K_{U\cdot\sin t}(t_1,t_2)$. По властивостях 4 і 5 пункту 2.3:

$K_{U\cdot\sin t}(t_1,t_2) = \sin t_1 \cdot \sin t_2 \cdot D[U] = 4 \cdot \sin t_1 \cdot \sin t_2$.

Відповідно, $K_{V\cdot\cos t}(t_1,t_2) = \cos t_1 \cdot \cos t_2 \cdot D[V] = 4 \cdot \cos t_1 \cdot \cos t_2$

$$R_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = M[X_1(t_1) \cdot X_2(t_2)] - m_{X_1}(t_1) \cdot m_{X_2}(t_2) = M[X_1(t_1) \cdot X_2(t_2)] -$$
$$- \sin t_1 \cdot 8 \cdot \cos t_2 = M[X_1(t_1)] \cdot M[X_2(t_2)] - 8 \cdot \sin t_1 \cdot \cos t_2 =$$
$$= \sin t_1 \cdot M[U] \cdot \cos t_2 \cdot M[V] - 8 \cdot \sin t_1 \cdot \cos t_2 =$$
$$= 8 \cdot \sin t_1 \cdot \cos t_2 - 8 \cdot \sin t_1 \cdot \cos t_2 = 0.$$

$$R_{X_1,X_2}(t_2,t_1) = M[X_1(t_2) \cdot X_2(t_1)] - m_{X_1}(t_2) \cdot m_{X_2}(t_1) = M[X_1(t_2) \cdot X_2(t_1)] -$$
$$- \sin t_2 \cdot 8 \cdot \cos t_1 = M[X_1(t_2)] \cdot M[X_2(t_1)] - 8 \cdot \sin t_2 \cdot \cos t_1 =$$
$$= \sin t_2 \cdot M[U] \cdot \cos t_1 \cdot M[V] - 8 \cdot \sin t_2 \cdot \cos t_1 =$$
$$= 8 \cdot \sin t_2 \cdot \cos t_1 - 8 \cdot \sin t_2 \cdot \cos t_1 = 0.$$

Тоді, по теоремі про кореляційну функцію суми некорельованих ВФ, маємо:

$$K(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) = K_{X_1}(t_1,t_2) + K_{X_2}(t_1,t_2) = K_{U\cdot\sin(t)}(t) + K_{V\cdot\cos(t)} =$$
$$= 4 \cdot \sin t_1 \cdot \sin t_2 + 4 \cdot \cos t_1 \cdot \cos t_2 .$$

Завдання 2.

Випадкова функція $\mathbf{Y(t)}$ має вигляд:

$$\mathbf{Y(t) = X \cdot e^{-t}, t > 0,}$$

де $\mathbf{X}$ – ВВ, розподілена за нормальним законом з параметрами $\mathbf{m}$ і $\boldsymbol{\sigma}$.

Знайти числові характеристики ВФ $\mathbf{Y(t)}$, математичне очікування, дисперсію, кореляційну й нормовану кореляційну функції**.**

Рішення.

Математичне очікування ВФ $\mathbf{Y(t)}$:

$$\mathbf{M[Y(t)] = M[X \cdot e^{-t}] = e^{-t} \cdot M[X] = m \cdot e^{-t}}.$$

Дисперсія ВФ $\mathbf{Y(t)}$:

$$\mathbf{D[Y(t)] = D[X \cdot e^{-t}] = \left(e^{-t}\right)^2 \cdot D[X] = \sigma^2 \cdot e^{-2t}}.$$

$$\mathbf{\overset{\bullet}{Y}(t) = Y(t) - m_Y(t) = X \cdot e^{-t} - m \cdot e^{-t} = \overset{\bullet}{X} \cdot e^{-t}}.$$

$$\mathbf{K_Y(t_1, t_2) = M[\overset{\bullet}{Y}(t_1) \cdot \overset{\bullet}{Y}(t_2)] = M[\overset{\bullet}{X} e^{-t_1} \overset{\bullet}{X} e^{-t_2}] = \sigma^2 \cdot e^{-(t_1 + t_2)}}.$$

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}\mathbf{(t_1, t_2) = \frac{\sigma^2 \cdot e^{-(t_1+t_2)}}{\sigma \cdot e^{-t_1} \sigma \cdot e^{-t_2}} = 1}.$$

Завдання 3.

Знайти математичне очікування, кореляційну функцію й дисперсію випадкової функції: $\mathbf{X(t) = U \cdot sh(t) - 3e^{-3t} \cdot V + t^2}$, де $\mathbf{U, V}$ – некорельовані випадкові величини, причому $\mathbf{U \in R(-3,3), V \in P(1,2)}$.

Рішення.

Знайдемо характеристики ВВ **U** і **V**:

$$\mathbf{M[U] = \frac{-3+3}{2} = 0;\ D[U] = \frac{(3+3)^2}{12} = 3; M[V] = D[V] = 1{,}2.}$$

Математичне очікування ВФ:

$$\mathbf{M[X(t)] = M[U \cdot sh(t)] + M[-3e^{-3t} \cdot V] + M[t^2] =}$$

$$\mathbf{= sh(t) \cdot M[U] - 3e^{-3t} \cdot M[V] + t^2 = sh(t) \cdot 0 - 3{,}6e^{-3t} + t^2 = -3{,}6e^{-3t} + t^2.}$$

Кореляційна функція для ВФ **X(t):**

$$K_X(t_1, t_2) = K_{U \cdot sh(t) - 3e^{-3t} \cdot V}(t_1, t_2),$$

тому що додаток до ВФ невипадкового доданка не змінює кореляційну функцію. Величини $U \cdot sh(t)$ і $-3e^{-3t} \cdot V$ некорельовані через некорельованість ВВ **U** і **V.** Отже, кореляційна функція суми дорівнює сумі кореляційних функцій доданків:

$$K_X(t_1, t_2) = K_{U \cdot sh(t)}(t_1, t_2) + K_{-3e^{-3t} \cdot V}(t_1, t_2),$$

$$K_{U \cdot sh(t)}(t_1, t_2) = sh(t_1)sh(t_2) \cdot D[U] = 3sh(t_1)sh(t_2),$$

$$K_{-3e^{-3t} \cdot V}(t_1, t_2) = -3e^{-3t_1} \cdot -3e^{-3t_2} \cdot D[V] = 10{,}8 \cdot e^{-3(t_1 + t_2)}.$$

Кореляційна функція й дисперсія ВФ:

$$K_X(t_1, t_2) = 3sh(t_1)sh(t_2) + 10{,}8 \cdot e^{-3(t_1 + t_2)}.$$

$$D_x(t) = K_X(t, t) = 3sh^2(t) + 10{,}8 \cdot e^{-6t}.$$

Завдання 4.

Знайти математичне очікування, кореляційну функцію, дисперсію й нормовану кореляційну функцію випадкової функції: $Z(t) = \sin 4t + e^{-2t} \cdot X(t) - e^{-t} \cdot Y(t)$, де $X(t), Y(t)$ - центровані випадкові функції і $K_X(t_1, t_2) = 4\sin t_1 \cdot \sin t_1$, $K_Y(t_1, t_2) = 81\sin t_1 \cdot \sin t_1$, $K_{X,Y}(t_1, t_2) = 18\sin t_1 \cdot \sin t_1$.

Рішення.

ВФ $X(t)$, $Y(t)$ – центровані ВФ, отже, їх математичні очікування дорівнюють нулю: $m_Z(t) = \sin 4t + e^{-2t} \cdot m_X(t) - e^{-t} \cdot m_Y(t)$, $m_Z(t) = \sin 4t$.

Додаток невипадкової функції $\sin 4t$ до випадкової функції $e^{-2t} \cdot X(t) - e^{-t} \cdot Y(t)$, не змінює його кореляційної функції.

Кореляційна функція суми двох корельованих ВФ дорівнює:

$$K_Z(t_1, t_2) = K_{e^{-2t} \cdot X}(t_1, t_2) + K_{e^{-t} \cdot Y}(t_1, t_2) +$$
$$+ R_{e^{-2t} \cdot X, -e^{-t} \cdot Y}(t_1, t_2) + R_{e^{-2t} \cdot X, -e^{-t} \cdot Y}(t_2, t_1).$$

$$K_{e^{-2t}\cdot X}(t_1,t_2)=e^{-2t_1}\cdot e^{-2t_2}\cdot K_X(t_1,t_2)=4\sin t_1\cdot \sin t_2\cdot e^{-2(t_1+t_2)}.$$

$$K_{e^{-t}\cdot Y}(t_1,t_2)=e^{-t_1}\cdot e^{-t_2}\cdot K_Y(t_1,t_2)=81\sin t_1\cdot \sin t_2\cdot e^{-(t_1+t_2)}.$$

Взаємні кореляційні функції:

$$R_{e^{-2t}\cdot X,-e^{-t}\cdot Y}(t_1,t_2)=e^{-2t_1}\cdot(-e^{-t_2})\cdot K_{X,Y}(t_1,t_2)=-18\sin t_1\cdot \sin t_2\cdot e^{-2t_1-t_2}.$$

$$R_{e^{-2t}\cdot X,-e^{-t}\cdot Y}(t_2,t_1)=e^{-2t_2}\cdot(-e^{-t_1})\cdot K_{X,Y}(t_1,t_2)=-18\sin t_1\cdot \sin t_2\cdot e^{-2t_2-t_1}.$$

$$K_Z(t_1,t_2)=4\sin t_1\cdot \sin t_2\cdot e^{-2(t_1+t_2)}+81\cdot \sin t_1\cdot \sin t_2\cdot e^{-(t_1+t_2)}-$$
$$-18\sin t_1\cdot \sin t_2\cdot e^{-2t_1-t_2}-18\sin t_1\cdot \sin t_2\cdot{}^{-2t_2-t_1}=$$
$$=\sin t_1\cdot \sin t_2\cdot e^{-(t_1+t_2)}\cdot(4e^{-(t_1+t_2)}+81-18e^{-t_1}-18e^{-t_2}).$$

Дисперсія ВФ:

$$D_Z(t)=\sin^2 t\cdot e^{-2t}\cdot(4e^{-2t}+81-36e^{-t})=\sin^2 t\cdot e^{-2t}(2e^{-t}-9)^2.$$

По визначенню нормована кореляційна функція рівна:

$$\rho_Z(t_1,t_2)=\frac{K_Z(t_1,t_2)}{\sigma_Z(t_1)\cdot\sigma_Z(t_2)}.$$

$$\sigma_Z(t)=\sqrt{D_Z(t)}=\sqrt{\sin^2 t\cdot e^{-2t}\cdot(2e^{-t}-9)^2}=e^{-t}\cdot\left|\sin t\cdot(2e^{-t}-9)\right|.$$

$$\rho_Z(t_1,t_2)=\frac{\sin t_1\cdot \sin t_2\cdot e^{-t_1}\cdot e^{-t_2}\cdot(4e^{-t_1}\cdot e^{-t_2}+81-18e^{-t_1}-18e^{-t_2})}{e^{-t_1}\cdot\left|\sin t_1(2e^{-t_1}-9)\right|\cdot e^{-t_2}\cdot\left|\sin t_2(2e^{-t_2}-9)\right|}=$$

$$=\frac{\sin t_1\cdot \sin t_2\cdot e^{-t_1}\cdot e^{-t_2}\cdot(2e^{-t_1}-9)\cdot(2e^{-t_2}-9)}{e^{-t_1}\cdot e^{-t_2}\cdot\left|\sin t_1\cdot \sin t_2\cdot(2e^{-t_1}-9)\cdot(2e^{-t_2}-9)\right|}=\pm 1$$

2.6 Завдання до лабораторної роботи №2

Завдання 1.

Знайти математичне очікування $m_X(t)$, кореляційну функцію $K_X(t_1,t_2)$, дисперсію $D_X(t)$ випадкового процесу $X(t)$, де **U,V**- некорельовані випадкові величини. Математичне очікування і дисперсію некорельованих випадкових величини **U,V** взяти з лабораторної роботи №1.

Таблиця 2.1 – Варіанти індивідуальних завдань

№	Випадкова функція X(t)
1	$X(t) = t^2U + V\cos t - \sin t$
2	$X(t) = tU - 3e^{-3t}V + \cos t$
3	$X(t) = e^tU - V\text{ch}t + 3$
4	$X(t) = U\sin t - Vt + t^5$
5	$X(t) = t^3U - V\cos t - 2$
6	$X(t) = 3U\text{sh}t - e^{3t}V + \cos t$
7	$X(t) = 3 + U\sin 2t - 4tV$
8	$X(t) = U\cos 3t - V\sin t - t$
9	$X(t) = t^2U - V\text{ch}t + t^2$
10	$X(t) = e^tU - V\sin t + t$
11	$X(t) = e^{-3t}U - Vt + 2t$
12	$X(t) = 3U\sin t - Ve^t - e^t$
13	$X(t) = t^2 - e^{-2t}U - Vt$
14	$X(t) = tU - V\sin 2t + 4t^2$
15	$X(t) = U\cos 3t - Vt^2 + 3$
16	$X(t) = 5t + 3t^2U - Ve^{2t}$
17	$X(t) = 5 + U\sin t - Vt^2$
18	$X(t) = t^2U - V\text{ch}t + t$
19	$X(t) = t + U\text{sh}2t - 2tV$
20	$X(t) = tU - V\sin t + \cos t$
21	$X(t) = e^{-t} + U\cos t - Vt$
22	$X(t) = -t - U\text{ch}t + V\cos t$
23	$X(t) = t^2U - Vt - e^{3t}$
24	$X(t) = 3\sin t + 2U\text{sh}t - Ve^t$
25	$X(t) = U\cos 2t - Vt - 4t$

Завдання 2.

Знайти кореляційну функцію $\mathbf{K_Z(t_1,t_2)}$, дисперсію $\mathbf{D_X(t)}$, якщо $\mathbf{X(t)}$, $\mathbf{Y(t)}$ - некорельовані випадкові процеси і дані кореляційні функції $\mathbf{K_X(t_1,t_2)}$, $\mathbf{K_Y(t_1,t_2)}$.

Таблиця 2.2 – Варіанти індивідуальних завдань

№	Випадкова функція Z(t)	Кореляційні функції $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$
1	$Z(t) = X(t)\sin t – Y(t)(t^2+1)+e^t$	$K_x(t_1,t_2) = 1/(1+\|t_2-t_1\|)$, $K_y(t_1,t_2) = t_1t_2+1$
2	$Z(t) = X(t)e^t-Y(t)\cos t+e^{2t}$	$K_x(t_1,t_2) = K_y(t_1,t_2) = 1/(1+(t_2-t_1)^2)$
3	$Z(t) = X(t)t-Y(t)\cos t+\sin t$	$K_x(t_1,t_2) = 1/(1+\|t_2-t_1\|)$, $K_y(t_1,t_2) = \cos(t_2-t_1)$
4	$Z(t) = X(t)\sin t-t^2Y(t)+e^t$	$K_x(t_1,t_2) = \cos(t_2-t_1)$, $K_y(t_1,t_2) = 1/(t_1^2t_2^2)$
5	$Z(t) = X(t)\cos3t-t+3)Y(t)+\sin t$	$K_x(t_1,t_2) = K_y(t_1,t_2) = \exp(-\|t_2-t_1\|)$
6	$Z(t) = X(t)e^{-3t}-Y(t)\sin t-t$	$K_x(t_1,t_2) = 1+\cos(t_2-t_1)$, $K_y(t_1,t_2) = \sin t_2\sin t_1$
7	$Z(t) = X(t)t+Y(t)e^{2t}-\mathrm{sh}t$	$K_x(t_1,t_2) = K_y(t_1,t_2) = \exp(-2\|t_2-t_1\|)$
8	$Z(t) = X(t)\cos t-(3t^2+1)Y(t)+\sin t$	$K_x(t_1,t_2) = t_1^2t_2^2$, $K_y(t_1,t_2) = \cos(t_2-t_1)$
9	$Z(t) = X(t)\mathrm{ch}t-3tY(t)+e^t$	$K_x(t_1,t_2) = 2+\cos(t_2-t_1)$, $K_y(t_1,t_2) = t_1t_2+1$
10	$Z(t) = t^4X(t)-Y(t)\mathrm{ch}t+\mathrm{ch}t$	$K_x(t_1,t_2) = 2+t_1t_2$, $K_y(t_1,t_2) = \exp(-4\|t_2-t_1\|)$
11	$Z(t) = X(t)\mathrm{sh}t-Y(t)t+t$	$K_x(t_1,t_2) = \cos t_1\cos t_2$, $K_y(t_1,t_2) = \cos(t_2-t_1)$
12	$Z(t) = X(t)\sin t-e^tY(t)+e^t$	$K_x(t_1,t_2) = \cos2(t_1-t_2)$, $K_y(t_1,t_2) = 2+t_1^2t_2^2$
13	$Z(t) = 2tX(t)-Y(t)\sin t+e^t$	$K_x(t_1,t_2) = \exp(-t_1-t_2)$, $K_y(t_1,t_2) = \cos(t_2-t_1)$
14	$Z(t) = e^tX(t)-2Y(t)\cos t-\sin t$	$K_x(t_1,t_2) = 2t_2t_1+1$, $K_y(t_1,t_2) = \cos3(t_2-t_1)$
15	$Z(t) = X(t)\cos t-t^3Y(t)+\mathrm{sh}t$	$K_x(t_1,t_2) = 1+t_1t_2$, $K_y(t_1,t_2) = \exp(-2(t_2-t_1)^2)$
16	$Z(t) = X(t)\mathrm{ch}t-tY(t)-t$	$K_x(t_1,t_2) = 9\cos4(t_2-t_1)$, $K_y(t_1,t_2) = 1/((t_2-t_1)^2+1)$
17	$Z(t) = X(t)\sin t-Y(t)\cos t+t$	$K_x(t_1,t_2) = 9t_1t_2$, $K_y(t_1,t_2) = \cos2(t_2-t_1)$
18	$Z(t) = 4t^2X(t)-Y(t)e^t-t$	$K_x(t_1,t_2) = \sin2t_2\sin2t_1$, $K_y(t_1,t_2) = 4\exp(-(t_2-t_1)^2)$
19	$Z(t) = e^{-t}X(t)-2tY(t)+\mathrm{sh}t$	$K_x(t_1,t_2) = 2+t_1t_2$, $K_y(t_1,t_2) = 4/(1+2(t_2-t_1)^2)$
20	$Z(t) = X(t)\cos t-t^2Y(t)+t$	$K_x(t_1,t_2) = 1+t_1^2t_2^2$, $K_y(t_1,t_2) = \cos4(t_2-t_1)$
21	$Z(t) = X(t)\sin t-e^tY(t)+e^t$	$K_x(t_1,t_2) = \cos t_1\cos t_2$, $K_y(t_1,t_2) = 1/(1+2(t_2-t_1)^2)$
22	$Z(t) = 2t^2X(t)-Y(t)\mathrm{ch}t+e^{-t}$	$K_x(t_1,t_2) = 1/\exp(\|t_2-t_1\|)$, $K_y(t_1,t_2) = 1+3t_2t_1$
23	$Z(t) = X(t)\sin4t-2tY(t)-e^t$	$K_x(t_1,t_2) = 4\exp(-2(t_2-t_1)^2)$, $K_y(t_1,t_2) = \cos(t_2-t_1)$
24	$Z(t) = e^{-t}X(t)-Y(t)\cos t+\mathrm{sh}t$	$K_x(t_1,t_2) = 4+t_1t_2$, $K_y(t_1,t_2) = 4\exp(-2(t_2-t_1)^2)$
25	$Z(t) = 2(t+1)X(t)-Y(t)\sin t+\cos t$	$K_x(t_1,t_2) = \exp(-t_1-t_2)$, $K_y(t_1,t_2) = t_2t_1$

Завдання 3.

$Z(t)=t^2+g(t)X(t)-h(t)Y(t)$, де **$g(t)$,$h(t)$** – неслучайные функции, **$X(t)$,$Y(t)$** - центровані випадкові процеси з кореляційними функціями **$К_X=К_X(t_1,t_2)$**, **$К_Y=К_Y(t_1,t_2)$** і взаємною кореляційною функцією **$К_{XY}=К_{XY}(t_1,t_2)$**.

Знайти математичне очікування $m_Z(t)$, кореляційну функцію **$К_Z(t_1,t_2)$**, дисперсію **$D_Z(t)$,** нормированную корреляционную функцию **$\rho_Z(t_1,t_2)$** случайного

Таблиця 2.3 – Варіанти індивідуальних завдань

№	g(t)	h(t)	$К_X$, $К_Y$, $К_{XY}$
1	t^2	e^t	$K_x = \exp(-t_1-t_2)$, $K_y = 16\exp(-t_1-t_2)$, $K_{xy} = 4\exp(-t_1-t_2)$
2	e^{-2t}	sin4t	$K_x = 4\cos(t_1-t_2)$, $K_y = 36\cos(t_1-t_2)$, $K_{xy} = 12\cos(t_1-t_2)$
3	t	e^{-t}	$K_x = 4(1+t_1t_2)$, $K_y = 9(1+t_1t_2)$, $K_{xy} = 6(1+t_1t_2)$
4	sinωt	t	$K_x = 9\cos t_1\cos t_2$, $K_y = 25\cos t_1\cos t_2$, $K_{xy} = 15\cos t_1\cos t_2$
5	cosωt	sinωt	$K_x = 9t_1t_2$, $K_y = 36t_1t_2$, $K_{xy} = 18t_1t_2$
6	t^2,	cos4t,	$K_x = 25(2+\lvert t_2-t_1\rvert)^{-1}$, $K_y = (2+\lvert t_2-t_1\rvert)^{-1}$, $K_{xy} = 5(2+\lvert t_2-t_1\rvert)^{-1}$
7	e^{-3t}	3t,	$K_x = 4\exp(-\lvert t_2-t_1\rvert)$, $K_y = 9\exp(-\lvert t_2-t_1\rvert)$, $K_{xy} = 6\exp(-\lvert t_2-t_1\rvert)$
8	sin6t	e^t	$K_x = 4t_1t_2$, $K_y = 49t_1t_2$, $K_{xy} = 14t_1t_2$
9	t^3	sin2t,	$K_x = 4\sin t_1\sin t_2$, $K_y = 16\sin t_1\sin t_2$, $K_{xy} = 8\sin t_1\sin t_2$
10	e^{-2t}	cos4t,	$K_x = (t_1t_2)^2$, $K_y = 16(t_1t_2)^2$, $K_{xy} = 4(t_1t_2)^2$
11	cos2t	sin2t,	$K_x = 4(t_1t_2+1)$, $K_y = 9(t_1t_2+1)$, $K_{xy} = 6(t_1t_2+1)$
12	e^{-4t}	t	$K_x = 49\cos2(t_1-t_2)$, $K_y = \cos2(t_1-t_2)$, $K_{xy} = 7\cos2(t_1-t_2)$
13	t	sin2t	$K_x = 4(t_1t_2)^3$, $K_y = 25(t_1t_2)^3$, $K_{xy} = 10(t_1t_2)^3$
14	t	t^2	$K_x = 4/(1+\lvert t_2-t_1\rvert)$, $K_y = 1/(1+\lvert t_2-t_1\rvert)$, $K_{xy} = 2/(1+\lvert t_2-t_1\rvert)$
15	-2t	$= e^{-4t}$	$K_x = 16\cos(t_1-t_2)$, $K_y = 25\cos(t_1-t_2)$, $K_{xy} = 20\cos(t_1-t_2)$
16	2t	sin3t	$K_x =(3+t_1)(3+t_2)$, $K_y =64(3+t_1)(3+t_2)$, $K_{xy} =8(3+t_1)(3+t_2)$
17	e^t	t^4	$K_x = 4\cos3(t_1-t_2)$, $K_y = 9\cos3(t_1-t_2)$, $K_{xy} = 6\cos3(t_1-t_2)$
18	sin3t	t	$K_x = 9\mathrm{ch}t_1\mathrm{ch}t_2$, $K_y = 49\mathrm{ch}t_1\mathrm{ch}t_2$, $K_{xy} = 21\mathrm{ch}t_1\mathrm{ch}t_2$
19	e^{-2t}	t^2	$K_x = 16\cos(t_1-t_2)$, $K_y = \cos(t_1-t_2)$, $K_{xy} = 4\cos(t_1-t_2)$
20	cht	e^{-2t}	$K_x = 4\mathrm{sh}t_1\mathrm{sh}t_2$, $K_y = 16\mathrm{sh}t_1\mathrm{sh}t_2$, $K_{xy} = 8\mathrm{sh}t_1\mathrm{sh}t_2$
21	sh5t	ch5t	$K_x = \exp(t_1+t_2)$, $K_y = 9\exp(t_1+t_2)$, $K_{xy} = 3\exp(t_1+t_2)$
22	e^t	t^2	$K_x = 25\sin t_1\sin t_2$, $K_y = 4\sin t_1\sin t_2$, $K_{xy} = 10\sin t_1\sin t_2$
23	e^{-t}	t	$K_x = 16\cos t_1\cos t_2$, $K_y = \cos t_1\cos t_2$, $K_{xy} = 4\cos t_1\cos t_2$
24	sin10t	cos10t	$K_x = 4(1+t_1t_2)$, $K_y = 1+t_1t_2$, $K_{xy} = 2(1+t_1t_2)$
25	t^3	e^{2t}	$K_x = 9t_1t_2$, $K_y = 25t_1t_2$, $K_{xy} = 15t_1t_2$

3. ПОХІДНА ТА ІНТЕГРАЛ ВІД ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ

3.1 Похідна випадкової функції

Послідовність випадкових величин $\mathbf{X_1, X_2, \dots, X_n}$ сходиться в середне квадратичному до випадкової величини X, якщо математичне очікування квадрата різниці $\mathbf{X_n - X}$ прагне до нуля при **n**->∞: $\mathbf{M[(X_n - X)^2]=0}$. Випадкову величину X називають “границею в середне квадратичному” послідовності випадкових величин $\mathbf{X_1, X_2, \dots, X_n}$ і пишуть: $\mathbf{\lim X_n}$.

Випадкову функцію **X(t)** називають дифференціьованою, якщо існує такая функція $\mathbf{X'(t)}$ (її називають похідною), что

$$\mathbf{\lim M\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-X'(t)\right]=0}$$

Таким чином, похідною випадкової функції **X'(t)** називають середне квадратичну границю відношення прирісту функції к прирісту аргумента Δt при $\Delta t \to 0$:

$$\mathbf{X'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}}$$

Характеристики похідної випадкового процесу

Нехай **X(t)** випадковий процес, **X '(t)** – його похідна.

1. Математичне очікування похідної від випадкової функції **X(t)** дорівнює похідній від її математичного очікування:

$$\mathbf{m_x'(t) = (m_y(t))'}.$$

2. Кореляційна функція похідної від випадкової функції **X(t)** дорівнює другій змішаній частинній похідній від її кореляційної функції:

$$\mathbf{K_{X'}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}K_X(t_1,t_2)}$$

3. Взаємна кореляційна функція випадкової функції **X(t)** і її похідної дорівнює приватной (“частной”) похідній від кореляційної функції по відповідному аргументу [якщо індекс **x** записаний на першому (другому) місці, те диференціюють по першому (другому) аргументу]:

$$\mathbf{K}_{X,X'}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)=\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}_2}\mathbf{K}_X(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2) \qquad \mathbf{K}_{X',X}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)=\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}_1}\mathbf{K}_X(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)$$

3.2 Інтеграл випадкової функції

Інтегралом від випадкової функції **X(t)** по відрізкові [0, t] називають границею в середнє квадратичному інтегральної суми при прагненні до нуля частккового інтервалу Δs_i максимальної довжини (змінна інтегрування позначена через s, щоб відрізнити її від границі інтегрування **t**):

$$\mathbf{Y(t)}=\lim_{\Delta s_i\to 0}\sum \mathbf{X}(\mathbf{s}_i)\Delta\mathbf{s}_i=\int_0^t \mathbf{X(s)ds}$$

<u>Характеристики інтеграла від випадкового процесу</u>

Нехай **X(t)** - випадковий процес, $\mathbf{Z(t)}=\int_0^t \mathbf{X(s)ds}$

1. Математичне очікування інтеграла від випадкової функції дорівнює інтегралу від її математичного очікування:

$$\mathbf{m}_z(\mathbf{t})=\int_0^t \mathbf{m}_x(\mathbf{s})\mathbf{ds}$$

2. Кореляційна функція інтеграла від випадкової функції дорівнює подвійному інтегралу від її кореляційної функції::

$$\mathbf{K}_Z(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)=\int_0^{t_1}\mathbf{ds}_1\int_0^{t_2}\mathbf{K}_X(\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2)\mathbf{ds}_2$$

3. Взаємна кореляційна функція випадкової функції **X(t)** і інтеграла $\mathbf{Z(t)}=\int_0^t \mathbf{X(s)ds}$ дорівнює інтегралу від кореляційної функції випадкової функції **X(t)**:

$$\mathbf{K}_{X,Z}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)=\int_0^{t_2}\mathbf{K}_X(\mathbf{t}_1,\mathbf{s})\mathbf{ds} \quad \mathbf{K}_{Z,X}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)=\int_0^{t_1}\mathbf{K}_X(\mathbf{s},\mathbf{t}_2)\mathbf{ds}$$

3.3 Рішення типових завдань

Завдання 1.

$X(t) = ch2t - U\,sh2t$, випадкова величина $U \in E(0.4)$, $Y(t) = X'(t)$. Знайти математичне очікування $m_Y(t)$, кореляційну функцію $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсію $D_Y(t)$, нормовану кореляційну функцію $\rho_Y(t_1,t_2)$ випадкового процесу $Y(t)$. Знайти взаємну кореляційну функцію $K_{X,Y}(t_1,t_2)$ і нормовану взаємну кореляційну функцію $\rho_{X,Y}(t_1, t_2)$.

Рішення.

Математичне очікування та дисперсія випадкової величини **U**

$$M[U] = 1/\lambda = 1/0.4 = 2.5,\ D[U] = 1/\lambda^2 = 1/0.4^2 = 6.25.$$

Математичне очікування випадкового процесу **X(t)**

$$m_X(t) = ch2t - sh2t \cdot M[U] = ch2t - 2.5sh2t.$$

Корреляционна функція випадкового процесу **X(t)**

$$K_X(t_1,t_2) = K_{-sh2tU}(t_1,t_2) = (-sh2t_1)(-sh2t_2)D[U] = 6.25sh2t_1sh2t_2.$$

Дисперсія випадкового процесу **X(t)**

$$D_X(t) = K_X(t,t) = 6.25sh^2 2t.$$

Математичне очікування, корреляционна функція та дисперсія

$$m_Y(t) = (m_X(t))' = (ch2t - 2.5sh2t)' = 2sh2t - 5ch2t.$$

$$K_Y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}(6.25sh2t_1sh2t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2}(12.5ch2t_1sh2t_2) = 25ch2t_1ch2t_2.$$

$$D_Y(t) = K_Y(t,t) = 25ch^2 2t.$$

Нормована кореляційна функція

$$\rho_Y(t_1, t_2) = \frac{K_Y(t_1, t_2)}{\sigma_Y(t_1)\sigma_Y(t_2)} = \frac{25ch2t_1ch2t_2}{\sqrt{25ch^2 2t_1}\sqrt{25ch^2 2t_2}} = \frac{25ch2t_1ch2t_2}{25|ch2t_1ch2t_2|} = 1.$$

Взаємна корреляційна функція

$$K_{X,Y}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2}K_X(t_1,t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2}(6.25sh2t_1sh2t_2) = 12.5sh2t_1ch2t_2.$$

Нормована взаємна кореляційна функція

$$\rho_{X,Y}(t_1, t_2) = \frac{K_{X,Y}(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)} = \frac{12.5sh2t_1ch2t_2}{\sqrt{6.25sh^2 2t_1}\sqrt{25ch^2 2t_2}} = \frac{sh2t_1ch2t_2}{|sh2t_1|ch2t_2} = \begin{cases} 1, \text{если } t_1 > 0 \\ -1, \text{если } t_1 < 0. \end{cases}$$

Завдання 2.

X(t)=(t2+1)U, U∈N(–3,5), $Z(t)=\int_0^t X(s)ds.$ Знайти математичне очікування $m_Z(t)$, кореляційну функцію $K_Z(t1,t2)$, дисперсію $D_Z(t)$, взаємні кореляційні функції $K_{Z,X}(t_1,t_2)$, $K_{X,Z}(t_1,t_2)$.

Рішення.

Математичне очікування та дисперсія випадкової величини **U**:

$$M[U]=m=-3,\ D[U]=\sigma^2=5^2=25.$$

Математичне очікування випадкового процесу **X(t)**

$$m_X(t)=(t^2+1)M[U]=-3(t^2+1).$$

Корреляционна функція випадкового процесу **X(t)**

$$K_X(t_1,t_2)=K_{(t^2+1)U}(t_1,t_2)=(t_1^2+1)(t_2^2+1)D[U]=25(t_1^2+1)(t_2^2+1).$$

Математичне очікування випадкового процесу **Z(t)**:

$$m_Z(t)=\int_0^t(-3)(s^2+1)ds=-\left(s^3+3s\right)\Big|_0^t=-(t^3+3t).$$

Корреляционна функція випадкового процесу **Z(t)** :

$$K_Z(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}ds_1\int_0^{t_2}25(s_1^2+1)(s_2^2+1)ds_2=25\int_0^{t_1}(s_1^2+1)ds_1\int_0^{t_2}(s_2^2+1)ds_2=$$

$$=25\left(\frac{s_1^3}{3}+s_1\right)\Bigg|_0^{t_1}\left(\frac{s_2^3}{3}+s_2\right)\Bigg|_0^{t_2}=25\left(\frac{t_1^3}{3}+t_1\right)\left(\frac{t_2^3}{3}+t_2\right).$$

Дисперсія випадкового процесу **Z(t)**:

$$D_Z(t)=K_Z(t,t)=25\left(\frac{t^3}{3}+t\right)^2.$$

Взаємні кореляційні функції:

$$K_{X,Z}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}25(t_1^2+1)(s^2+1)ds=25(t_1^2+1)\left(\frac{t_2^3}{3}+t_2\right),$$

$$K_{Z,X}(t_1,t_2)=K_{X,Z}(t_2,t_1)=25(t_2^2+1)\left(\frac{t_1^3}{3}+t_1\right).$$

3.4 Завдання до лабораторної роботи №3

Завдання 1.

Знайти математичне очікування $m_Y(t)$, кореляційну функцію $\mathbf{K_Y(t_1,t_2)}$, дисперсію $\mathbf{D_Y(t)}$, нормовану кореляційну функцію $\boldsymbol{\rho_Y(t_1,t_2)}$, випадкового процесу $\mathbf{Y(t)=X'(t)}$. Знайти $\mathbf{K_Y(t_1,t_2)}$ і $\boldsymbol{\rho_{XY}(t_1,t_2)}$, **U** - випадкова величина.

Таблиця 3.1 – Варіанти індивідуальних завдань

№	Випадкова функція X(t)	Закон розподілу випадкової величини U
1	$X(t) = t^2 – U e^{-3t}$	$U \in N(2;0.7)$
2	$X(t) = –U t^2 – \sin t$	$U \in B(10;0.5)$
3	$X(t) = U t – 4t^2$	$U \in R(3;6)$
4	$X(t) = U t^3 – \sin t$	$U \in P(4)$
5	$X(t) = U \cos 3t – 3$	$U \in P(5)$
6	$X(t) = –U e^{-2t} – t$	$U \in P(2)$
7	$X(t) = 3t^2 + U e^{-2t}$	$U \in E(0.2)$
8	$X(t) = U \sin t + t$	$U \in N(1;2)$
9	$X(t) = 5t^2 – U \sin t$	$U \in B(10;0.1)$
10	$X(t) = –U t^3 – \cos t$	$U \in R(-1;3)$
11	$X(t) = U t^2 + \operatorname{ch} t$	$U \in R(-2;2)$
12	$X(t) = U e^{-3t} + \cos t$	$U \in E(0.25)$
13	$X(t) = t – U \operatorname{sh} 2t$	$U \in N(-1;2)$
14	$X(t) = 3t – U \sin 2t$	$U \in B(10;0.3)$
15	$X(t) = U \cos t + t$	$U \in B(20;0.4)$
16	$X(t) = U \cos 3t – t$	$U \in R(-3;1)$
17	$X(t) = –U \operatorname{sh} t + e^{-t}$	$U \in E(1/4)$
18	$X(t) = –U t^2 – t^2$	$U \in E(0.1)$
19	$X(t) = U \operatorname{ch} 2t + \cos t$	$U \in P(3)$
20	$X(t) = U e^t + \sin t$	$U \in N(4;2)$
21	$X(t) = U t^2 – e^{3t}$	$U \in R(3;6)$
22	$X(t) = –U e^{-3t} – 2t$	$U \in B(10;0.6)$
23	$X(t) = 3 \sin t – U e^{-4t}$	$U \in E(2)$
24	$X(t) = 3U \sin t – e^t$	$U \in P(2.5)$
25	$X(t) = U \cos 2t – t$	$U \in N(3;0.8)$

Завдання 2.

$X(t)=f(t)+U\cdot g(t)+V\cdot h(t)$, где **$f(t)$**, **$g(t)$**, **$h(t)$** – невипадкові функції, U,V – некорреловані випадкові величини. Знайти математичне очікування **$m_Y(t)$**, кореляційну функцію **$K_Y(t_1,t_2)$**, дисперсію **$D_Y(t)$** випадкового процесу **$Y(t)=t\cdot X(t)-2X'(t)$**.

Таблиця 3.2 – Варіанти індивідуальних завдань

№	f(t) g(t) h(t)	Закони розподілу випадкових величин U і V
1	$f(t)=e^{-2t}$, $g(t)=t^2$, $h(t)=\cos 4t$	$U \in N(2,9)$, $V \in E(0.2)$
2	$f(t) = \cos t$, $g(t) = e^{-2t}$, $h(t) = \sin 2t$	$U \in E(0.2)$, $V \in R(-1;3)$
3	$f(t) = \sin 2t$, $g(t) = t$, $h(t) = e^{-t}$	$U \in B(10;0.3)$, $V \in N(-1;2)$
4	$f(t) = t^2$, $g(t) = e^{-3t}$, $h(t) = \sin 3t$	$U \in P(2)$, $V \in R(0;4)$
5	$f(t) = t^3$, $g(t) = \cos t$, $h(t) = \sin t$	$U \in P(3)$, $V \in N(-1;3)$
6	$f(t) = \sin 2t$, $g(t) = t$, $h(t) = \cos 4t$	$U \in R(-2;2)$, $V \in B(20;0.1)$
7	$f(t) = \cos 4t$, $g(t) = e^{-3t}$, $h(t) = 3t$	$U \in P(3)$, $V \in E(0.25)$
8	$f(t) = t^2 + 2$, $g(t) = \sin 5t$, $h(t) = \cos 5t$	$U \in R(1;5)$, $V \in B(20;0.4)$
9	$f(t) = 2t$, $g(t) = t^3$, $h(t) = \cos 2t$	$U \in N(0;4)$, $V \in P(1)$
10	$f(t) = -2t^2$, $g(t) = e^{-2t}$, $h(t) = \cos 2t$	$U \in R(-1;3)$ $V \in P(2)$
11	$f(t) = t^3 + 3$, $g(t) = \cos 2t$, $h(t) = \sin 2t$	$U \in N(-3;4)$, $V \in B(10;0.4)$
12	$f(t) = t^2 – 2$, $g(t) = e^{-4t}$, $h(t) = \cos 4t$	$U \in R(3;7)$, $V \in P(4)$
13	$f(t) = 2t + 1$, $g(t) = e^{-3t}$, $h(t) = \sin 3t$	$U \in P(2)$, $V \in B(10;0.3)$
14	$f(t) = e^{2t}$, $g(t) = \cos 4t$, $h(t) = t^2$	$U \in N(10;4)$, $V \in R(-3,3)$
15	$f(t) = \cos 4t$, $g(t) = 2t$, $h(t) = e^{-4t}$	$U \in E(0.5)$, $V \in B(10;0.2)$
16	$f(t) = 1 + e^{-2t}$, $g(t) = 2t$, $h(t) = \sin 5t$	$U \in R(-1;5)$, $V \in P(0.8)$
17	$f(t) = \sin 2t$, $g(t) = e^t$, $h(t) = t^2$	$U \in P(5)$, $V \in N(-5;3)$
18	$f(t) = \cos 3t$, $g(t) = \sin 3t$, $h(t) = \mathrm{ch} 3t$	$U \in R(-2;4)$, $V \in B(20;0.4)$
19	$f(t) = t^2$, $g(t) = e^{-2t}$, $h(t) = \sin 2t$	$U \in P(3)$, $V \in N(-3;2)$
20	$f(t) = \mathrm{sh} t$, $g(t) = \mathrm{ch} 2t$, $h(t) = e^{-2t}$	$U \in N(0;4)$, $V \in R(1;7)$
21	$f(t) = t^3$, $g(t) = \mathrm{ch} 6t$, $h(t) = \mathrm{sh} 6t$	$U \in P(4)$, $V \in N(-2;5)$
22	$f(t) = \sin 2t$, $g(t) = t$, $h(t) = t^2$	$U \in R(-1;1)$, $V \in B(10;0.6)$
23	$f(t) = \cos 2t$, $g(t) = e^{-t}$, $h(t) = t$	$U \in P(2)$, $V \in E(0.5)$
24	$f(t) = t$, $g(t) = \sin 2\omega t$, $h(t) = \cos 2\omega t$	$U \in R(0;4)$, $V \in B(10;0.7)$
25	$f(t) = \sin 2t$, $g(t) = t^3$, $h(t) = \cos 2t$	$U \in N(10;4)$, $V \in P(4)$

Завдання 3.

X(t) =f(t)·U, **f(t)** – невипадкова функція, **U** - випадкова величина. $\mathbf{Z(t) = \int_0^t X(s)ds}$. Знайти математичне очікування m_Z**(t)**, кореляційну функцію $\mathbf{K_Z(t_1,t_2)}$, дисперсію $\mathbf{D_Z(t)}$**,** взаємні кореляційні функції.

Таблиця 3.3 – Варіанти індивідуальних завдань

№	Нвипадкова функція f(t)	Закон розподілу випадкової величини U
1	$f(t) = \cos 6t$	$U \in E(0.2)$
2	$f(t) = 1/(1 + t)^2$	$U \in E(0.5)$
3	$f(t) = \sin 3t$	$U \in B(10;0.3)$
4	$f(t) = 1 + e^{-2t}$	$U \in B(20;0.4)$
5	$f(t) = e^{-3t}$	$U \in P(2)$
6	$f(t) = e^{-3t}$	$U \in P(5)$
7	$f(t) = \sin 2t$	$U \in N(-1;3)$
8	$f(t) = 1/(2t + 1)$	$U \in R(-2;4)$
9	$f(t) = \mathrm{sh} 2t$	$U \in R(-2;2)$
10	$f(t) = 1/(1 + t^2)$	$U \in N(-3;2)$
11	$f(t) = \cos 4t$	$U \in P(3)$
12	$f(t) = (1 + t)^2$	$U \in B(20;0.2)$
13	$f(t) = t^2 + t$	$U \in E(0.4)$
14	$f(t) = \mathrm{ch} 5t$	$U \in E(0.25)$
15	$f(t) = t^2 + t$	$U \in E(0.4)$
16	$f(t) = (1 - t)^3$	$U \in R(-1;1)$
17	$f(t) = -2t^2$	$U \in R(-1;3)$
18	$f(t) = e^{-t}$	$U \in P(6)$
19	$f(t) = 4t^3 + 2t$	$U \in B(10;0.4)$
20	$f(t) = 3(1 + t)^2$	$U \in B(10;0.7)$
21	$f(t) = e^{-4t}$	$U \in R(3;7)$
22	$f(t) = 1/(2t - 3)$	$U \in N(10;4)$
23	$f(t) = \mathrm{sh} 5t$	$U \in P(4)$
24	$f(t) = 1 – e^{-5t}$	$U \in E(0.75)$
25	$f(t) = \mathrm{ch} 3t$	$U \in N(10;4)$

Завдання 4.

X(t) – випадковий процес, $\mathbf{Z(t)=\int_0^t X(s)ds}$. Знайти кореляційну функцію $\mathbf{K_Y(t_1,t_2)}$, дисперсію $\mathbf{D_Y(t)}$, нормовану кореляційну функцію $\boldsymbol{\rho_Y(t_1,t_2)}$, випадкового процесу **Y(t)=X(t)+Z(t)**. **U -** випадкова величина.

Таблиця 3.4 – Варіанти індивідуальних завдань

№	Нвипадкова функція f(t)	Закон розподілу випадкової величини U
1	$X(t) = U\ ch3t$	$U \in P(2)$
2	$X(t) = U\sin 2\omega t$	$U \in E(0.2)$
3	$X(t) = U / (1 + t)^2$	$U \in N(10;4)$
4	$X(t) = U e^{-3t}$	$U \in B(10;0.3)$
5	$X(t) = U (1 - e^t)$	$U \in E(0.5)$
6	$X(t) = U \sin\omega t$	$U \in N(0;4)$
7	$X(t) = U \sin 3t$	$U \in B(20;0.4)$
8	$X(t) = U\ sh2t$	$U \in N(-1;3)$
9	$X(t) = U / (2t + 1)$	$U \in P(5)$
10	$X(t) = U \cos 4t$	$U \in R(-2;2)$
11	$X(t) = U / (1 + t^2)$	$U \in R(-2;4)$
12	$X(t) = U (t^2 + t)$	$U \in P(3)$
13	$X(t) = U (1 + t)^2$	$U \in N(-3;2)$
14	$X(t) = U (t^3 - 1)$	$U \in E(0.4)$
15	$X(t) = U\ ch\omega t$	$U \in E(0.25)$
16	$X(t) = -2U t^2$	$U \in N(10;4)$
17	$X(t) = U (1 - t)^3$	$U \in B(20;0.2)$
18	$X(t) = U (4t^3 + 2t)$	$U \in R(-1;3)$
19	$X(t) = U e^{-2t}$	$U \in R(-1;1)$
20	$X(t) = U e^{-4t}$	$U \in B(10;0.4)$
21	$X(t) = U (1 + t)^2$	$U \in P(6)$
22	$X(t) = U\ sh2t$	$U \in R(3;7)$
23	$X(t) = U / (2t - 3)$	$U \in B(10;0.7)$
24	$X(t) = U\ ch3t$	$U \in P(4)$
25	$X(t) = U \cos\omega t$	$U \in N(10;4)$

4. СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

На практиці зустрічаємося з випадковими процесами, що протікають однородно в часі, тобто настає стаціонарний режим функціонування системи. У якості прикладів таких стаціонарних випадкових процесів можна привести наступні: коливання напруги, що подається в якості силового живлення ПЭВМ, тиск газу в газопроводі та інші. Тобто у стаціонарного випадкового процесу $\mathbf{X(t)}$ імовірнісні характеристики не повинні залежати від часу.

Припустимо, маємо одномірну щільність розподілу стаціонарного випадкового процесу $\mathbf{f(t,x)}$ і будемо вважати, що перерізи випадкового процесу є безперервною випадковою величиною. Ця щільність не залежить від того, де взятий переріз $\mathbf{t}$, то можна записати рівність $\mathbf{f(t1,x) = f(t2,x) = \ldots = f(x)}$.

Знаючи одномірну щільність стаціонарного випадкового процесу $\mathbf{X(t)}$, можна знайти його математичне очікування й дисперсію:

$$\mathbf{M[(X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(t,x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = m_x}$$

$$\mathbf{D[(X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 f(t,x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 f(x)dx = D_x = const.}$$

Таким чином, математичне очікування й дисперсія стаціонарного випадкового процесу є постійними величинами, що не залежать від часу.

На рис.4.1 представлена стаціонарна випадкова функція $\mathbf{X(t)}$, узята в моменти часу **t1** і **t2**.

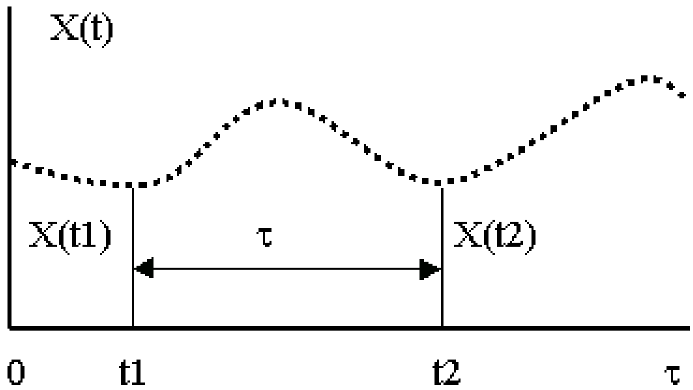

Рис. 4.1 - Стаціонарна випадкова функція X(t)

Двовимірна щільність розподілу стаціонарного випадкового процесу **X(t)~f2(t1,t2,x1,x2)** буде залежати не від аргументів **t1** і **t2**, а тільки від аргументу **τ** проміжку між перерізами (рис. 4.1), тобто **f2(t1,t2,x1,x2)=f2(t2-t1,x1,x2)**. Позначимо **t2-t1**=**τ**, тоді **f2(t1,t2,x1,x2) = f2(τ,x1,x2)**.

Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу **X(t)**:

$$K_X(t1,t2) = \int\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f_2(t_1, t_2, x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f_2(\tau, x_1, x_2) dx_1 dx_2 = k_X(\tau)$$

Випадковий процес **X(t)** називається **стаціонарним** (у широкому сенсі), якщо його математичне очікування постійно, а кореляційна функція залежить тільки від $\tau = t_2 - t_1$.

Таким чином,

$$m_X(t) = m_X = const,$$

$$K_X(t_1, t_2) = k_X(\tau), \text{ де } \tau = t_2 - t_1.$$

Два стаціонарних випадковий процеса **X(t)** і **Y(t)** називаються **стаціонарно пов'язаними**, якщо взаємно кореляційна функція залежить тільки від різниці аргументів $\tau = t_2 - t_1$.

$$K_{X,Y}(t_1, t_2) = k_{X,Y}(\tau)$$

Нормованою кореляційною функцією стаціонарної випадкової функції називають невипадкову функцію аргументу **τ**.

$$\rho_x(\tau) = \frac{k_X(\tau)}{D_X} = \frac{k_X(\tau)}{k_X(0)}$$

<u>Основні властивості стаціонарних випадкових процесів</u>

1. Дисперсія стаціонарної випадкової функції постійна при всіх значеннях аргументу **t** і дорівнює значенню її кореляційної функції в початку координат (**τ=0**):

$$D_X(t) = k_X(0) = D_X = const.$$

2. Абсолютна величина кореляційної функції стаціонарної випадкової функції не перевищує її значення на початку координат:

$$|k_X(\tau)| \le D_X.$$

3. Кореляційна функція стаціонарної випадкової функції є парна функція:

$$k_X(-\tau) = k_X(\tau).$$

4. Нормована кореляційна функція в початку координат дорівнює 1:

$$\rho_X(0) = 1.$$

4.1 Характеристики похідної стаціонарного випадкового процесу

Кореляційна функція похідної $X'(t) = \dot{x}$ диференційованої стаціонарної випадкової функції $X(t)$ дорівнює другий похідній від її її кореляційної функції, узятої зі знаком мінус:

$$k_{X'}(\tau) = -\,(k_{X'}(\tau))''.$$

Математичне очікування похідної є постійна величина. Враховуючи, що математичне очікування стаціонарної функції $m_X=const$ і що операції знаходження математичного очікування і диференціювання можна міняти місцями, одержимо:

$$M\,[X'(t)] = \{M\,[X(t)]\}' = (m_X)' = 0.$$

Взаємна кореляційна функція диференційованої стаціонарної випадкової функції $X(t)$ і її похідної $X'(t) = \dot{x}$ дорівнює перший похідній від кореляційної функції $k_X(\tau)$, узятої зі своїм (протилежним) знаком, якщо індекс стоїть на другому (першому) місці:

$$k_{X,X'}(\tau) = (k_X(\tau))' \qquad k_{X',X}(\tau) = -(k_X(\tau))'.$$

4.2 Характеристики інтеграла від стаціонарного випадкового процесу

Кореляційну функцію та дисперсію інтеграла $Z(t) = \int_0^t X(s)ds$ від стаціонарної випадкової функції знаходять відповідно по формулах:

$$K_Z(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}(t_1-\tau)k_X(\tau)d\tau+\int_0^{t_2}(t_2-\tau)k_X(\tau)d\tau-\int_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)k_X(\tau)d\tau.$$

$$D_Z(t)=2\int_0^{t}(t-\tau)k_X(\tau)d\tau.$$

Взаємна кореляційна функція стаціонарної випадкової функції **X(t)** і інтеграла $Z(t)=\int_0^t X(s)ds$ дорівнює інтегралу від кореляційної функції стаціонарної випадкової функції **X(t)** відповідно:

$$K_{X,Z}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}k_X(t_1-\tau)d\tau \qquad K_{Z,X}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}k_X(t_2-\tau)d\tau.$$

Розглянемо функцію $I(t)=\int_0^t(t-\tau)k_X d\tau$, з вище викладеного маємо, що кореляційна функція може бути обчислена по формулі:

$$K_Z(t_1,\ t_2)=I(t_1)+I(t_2)-I(t_2-t_1).$$

4.3 Ергодична властивість стаціонарного випадкового процесу

Стаціонарні випадкові процеси можуть мати або не мати эргодичну властивість. Це клас функцій, оцінка характеристик яких шляхом усереднення множини реалізацій рівносильне усередненню за часом тільки однієї реалізації достатньо великої тривалості.

Стаціонарний випадковий процес **X(t)** називається **ергодичним відносно до математичного очікування m_X**, якщо для будь-якої його реалізації:

$$m_X=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(s)ds.$$

Стаціонарний випадковий процес **X(t)** називається **ергодичним відносно до кореляційної функції $k_X(\tau)$**, якщо для будь-якої його реалізації **x(t)**:

$$k_X(\tau)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(x(t)-m_X)(x(t+\tau)-m_X)dt$$

4.4 Рішення типових завдань

Завдання 1.

Довести, що випадковий процес є стаціонарним у широкому значенні.

$$\mathbf{X(t) = (U + 2)\cos 7t - V\sin 7t}, \text{ де } \mathbf{U \in N(-2, \sqrt{3}),\ \ V \in R(-3, 3)}$$

Рішення.

Математичне очікування та дисперсія випадкових величин:

$$\mathbf{M[U] = -2,\ M[V] = 0,\ \ D[U] = 3,\ D[V] = 3.}$$

Математичне очікування випадкового процесу $\mathbf{X(t)}$:

$$\mathbf{m_X(t) = M[U + 2]\cos 7t - M[V]\sin 7t = (M[U] + 2)\cos 7t = 0 = const.}$$

Кореляційна функцію випадкового процесу $\mathbf{X(t)}$:

$$\mathbf{K_X(t_1, t_2) = \cos 7t_1 \cos 7t_2 D[U] + \sin 7t_1 \sin 7t_2 D[V] = 3\cos 7(t_2 - t_1) = 3\cos 7\tau.}$$

Таким чином, $\mathbf{m_X(t) = const}$, а кореляційна функція залежить тільки від $\mathbf{t_2 - t_1}$, отже, випадковий процес $\mathbf{X(t)}$ є стаціонарним у широкому значенні.

Завдання 2.

Дана кореляційна функція $\mathbf{k_X(\tau) = \exp(-3|\tau|)(1 + \sin 3|\tau|)}$ стаціонарного випадкового процесу $\mathbf{X(t)}$. Знайти кореляційну функцію, дисперсію похідної $\mathbf{X'(t)}$, взаємну кореляційну функцію $\mathbf{k_{X,X'}(\tau)}$.

Рішення.

Нехай $\boldsymbol{\tau \geq 0}$. Тоді $\mathbf{k_X(\tau) = \exp(-3\tau)(1 + \sin 3\tau)}$.

$$\mathbf{k_{X'}(\tau) = -(k_X(\tau))'' = -((e^{-3\tau})'(1 + \sin 3\tau) + (1 + \sin 3\tau)' e^{-3\tau})' =}$$

$$\mathbf{= (3e^{-3\tau}(1 + \sin 3\tau) - 3\cos 3\tau\, e^{-3\tau})' = (3e^{-3\tau}(1 + \sin 3\tau - \cos 3\tau))' =}$$

$$\mathbf{= -9e^{-3\tau}(1 + \sin 3\tau - \cos 3\tau) + 9e^{-3\tau}(\cos 3\tau + \sin 3\tau) = 9e^{-3\tau}(2\cos 3\tau - 1).}$$

Так як функція $\mathbf{k_{X'}(\tau)}$ – парна, то отримана функцію на інтервалі $\mathbf{(-\infty;\ 0)}$, може бути записана у вигляді $\mathbf{k_{X'}(\tau) = 9e^{-3|\tau|}(2\cos 3|\tau| - 1)}$.

Тому при $\boldsymbol{\tau \in (-\infty;\ \infty)}$ маємо $\mathbf{k_{X'}(\tau) = 9e^{-3|\tau|}(2\cos 3\tau - 1)}$.

Дисперсія $\mathbf{D_{X'} = k_{X'}(0) = 9.}$

Взаємна кореляційна функція

$$\mathbf{k_{X,X'}(\tau) = (k_X(\tau))' = 3e^{-3\tau}(-1 - \sin 3\tau + \cos 3\tau), \quad при\ \tau \ge 0,}$$

$$\mathbf{k_{X,X'}(\tau) = 3e^{3\tau}(1 - \sin 3\tau - \cos 3\tau), \ при\ \tau < 0}$$

Завдання 3.

Дана кореляційна функція $\mathbf{k_X(\tau)=72/(1+9\tau^2)}$ стаціонарного випадкового процесу $\mathbf{X(t)}$. Знайти кореляційну функцію $\mathbf{K_Z(t_1, t_2)}$, дисперсію $\mathbf{D_Z(t)}$ випадкового процесу $\mathbf{Z(t) = \int_0^t X(s)ds}$, взаємну кореляційну функцію $\mathbf{K_{X,Z}(t_1, t_2)}$.

Рішення.

Позначимо $\mathbf{I(t) = \int_0^t (t-\tau)k_X(\tau)d\tau}$ і обчислимо функцію із завдання по формулі

$$\mathbf{I(t) = \int_0^t \frac{72(t-\tau)}{1+9\tau^2}d\tau = 72t\int_0^t \frac{d\tau}{1+9\tau^2} - 72\int_0^t \frac{\tau d\tau}{1+9\tau^2} = 72t\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,3t - 4\int_0^t \frac{d(1+9\tau^2)}{1+9\tau^2} =}$$

$$\mathbf{= 24t\,\mathrm{arctg}\,3t - 4\ln(1+9t^2).}$$

Кореляційна функцію $\mathrm{K_Z(t_1, t_2)}$ записана в загальному виді $\mathbf{K_Z(t_1, t_2) = I(t_1) + I(t_2) - I(t_2 - t_1)}$.

Кореляційна функцію $\mathrm{K_Z(t_1, t_2)}$ для завдання може бути записана, як

$$\mathbf{K_Z(t_1,t_2) = 24t_1\,\mathrm{arctg}\,3t_1 - 4\ln(1+9t_1^2) + 24t_2\,\mathrm{arctg}\,3t_2 - 4\ln(1+9t_2^2) -}$$

$$\mathbf{- 24(t_2 - t_1)\mathrm{arctg}\,3(t_2 - t_1) + 4\ln(1+9(t_2-t_1)^2) =}$$

$$\mathbf{= 24(t_1\,\mathrm{arctg}\,3t_1 + t_2\,\mathrm{arctg}\,3t_2 - (t_2 - t_1)\mathrm{arctg}\,3(t_2 - t_1)) + 4\ln\frac{1+9(t_2-t_1)^2}{(1+9t_1^2)(1+9t_2^2)}.}$$

Дисперсія

$$\mathbf{D_Z(t) = 2I(t) = 48t\,\mathrm{arctg}\,3t - 8\ln(1+9t^2).}$$

Взаємна кореляційна функція

$$\mathbf{K_{X,Z}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} k_X(t_1 - \tau)d\tau = \int_0^{t_2} \frac{72d\tau}{1+9(t_1-\tau)^2} = 24(\mathrm{arctg}\,3t_1 + \mathrm{arctg}\,3(t_2 - t_1)).}$$

4.5 Завдання до лабораторної роботи №4

Завдання 1.

Довести, що випадковий процес **X(t)** є стаціонарним у широкому сенсі.

Таблиця 4.1 – Варіанти індивідуальних завдань

№	Випадкова функція X(t)	Закони розподілу випадкових величин
1	$X(t) = (U-2)\cos 3t - V\sin 3t$	$U\in R(0;4)$, $V\in N(0;2/3)$
2	$X(t) = (U+2)\cos 2t - V\sin 2t$	$U\in N(-2;2)$ $V\in R(-2;2)$
3	$X(t) = U\cos 5t-(V-5)\sin 5t$	$U\in R(-4;4)$, $V\in N(5;4/3)$
4	$X(t)=(U-4)\cos 8t - V\sin 8t$	$U\in P(4)$, $V\in N(0;2)$
5	$X(t)= (U-1)\cos 20t- V\sin 20t$	$U\in E(1)$, $V\in N(0;1)$
6	$X(t) = (U-2)\cos 11t-(V-8)\sin 11t$	$U\in B(10;0.2)$, $V\in B(10;0.8)$
7	$X(t) = (U-l)\cos 6t-(V-4/3)\sin 6t$	$U\in B(10;0.2)$, $V\in B(10;0.8)$
8	$Z(t) = X(t)\sin t-e^{t}Y(t)+e^{t}$	$U\in R(-1;3)$, $V\in E(0.4)$
9	$Z(t) = 2t^{2}X(t)-Y(t)\mathrm{ch}t+e^{-t}$	$U\in E(0.25)$, $V\in R(2:4)$
10	$Z(t) = X(t)\sin 4t-2tY(t)-e^{t}$	$U\in B(10;0.3)$, $V\in P(3)$
11	$Z(t) = e^{-t}X(t)-Y(t)\cos t+\mathrm{sh}t$	$U\in N(-2;2)$, $V\in E(4)$
12	$Z(t) = X(t)\mathrm{ch}t-3tY(t)+e^{t}$	$U\in R(-3;3)$, $V\in B(10;0.6)$
13	$Z(t) = t^{4}X(t)-Y(t)\mathrm{ch}t+\mathrm{ch}t$	$U\in P(4)$, $V\in R(1;3)$
14	$Z(t) = X(t)\mathrm{sh}t-Y(t)t+t$	$U\in P(2)$; $V\in N(3;0.3)$
15	$Z(t) = 2(t+1)X(t)-Y(t)\sin t+\cos t$	$U\in N(-1;2)$, $V\in E(1/3)$
16	$Z(t) = X(t)e^{-3t}-Y(t)\sin t-t$	$U\in R(-2;2)$, $V\in B(20;0.4)$
17	$Z(t) = X(t)t+Y(t)e^{2t}-\mathrm{sh}t$	$U\in E(1/4)$, $V\in R(-5;-1)$
18	$Z(t) = X(t)\cos t-(3t^{2}+1)Y(t)+\sin t$	$U\in N(3;2)$, $V\in E(0.5)$
19	$Z(t) = X(t)\mathrm{ch}t-3tY(t)+e^{t}$	$U\in R(0;6)$, $V\in B(10;0.5)$
20	$Z(t) = t^{4}X(t)-Y(t)\mathrm{ch}t+\mathrm{ch}t$	$U\in P(0.2)$, $V\in R(-2;2)$
21	$Z(t) = X(t)\mathrm{sh}t-Y(t)t+t$	$U\in N(-1;0.7)$, $V\in E(0.5)$
22	$Z(t) = X(t)\sin t-Y(t)(t^{2}+1)+e^{t}$	$U\in R(3;6)$, $V\in N(2;3)$
23	$Z(t) = X(t)e^{t}-Y(t)\cos t+e^{2t}$	$U\in B(1;0.3)$, $V\in P(1)$
24	$Z(t) = X(t)t-Y(t)\cos t+\sin t$	$U\in R(4;1)$, $V\in N(1;0.5)$
25	$Z(t) = X(t)\sin t-t^{2}Y(t)+e^{t}$	$U\in E(0.2)$, $V\in B(2;0.1)$

Завдання 2.

$k_X(\tau)$ - кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу **$X(t)$**. Знайти кореляційну функцію, дисперсію похідної **$X'(t)$,** взаємну кореляційну функцію **$k_{X,X'}(\tau)$**.

Таблиця 4.2 – Варіанти індивідуальних завдань

№	Кореляційна функція $k_X(\tau)$
1	$k_x(\tau)=5(1-\sin 3\tau^2)\exp(-2\tau)$
2	$k_x(\tau)=10(1+2\sin\|\tau\|)\exp(-2\|\tau\|)$
3	$k_x(\tau)=5/(1+2\tau+3\tau^4)$
4	$k_x(\tau)=5+6\cos\tau\cos 3\tau$
5	$k_x(\tau)=4(1+\sin\tau^2)\exp(-2\tau^2)$
6	$k_x(\tau)=1+8\exp(-9\tau^2)$
7	$k_x(\tau)=(1+\sin\|\tau\|)\exp(-\|\tau\|)$
8	$k_x(\tau)=4\cos 2\tau\cos 6\tau$
9	$k_x(\tau)=3(l-3\sin^2\tau)\exp(-\tau^2)$
10	$k_x(\tau)=(l+\|\sin 3\tau\|)\exp(-2\|\tau\|)$
11	$k_x(\tau)=10/(l+8\tau^2+\tau^4)$
12	$k_x(\tau)=(1+2\sin\|\tau\|)\exp(-2\tau)$
13	$k_x(\tau)=8\cos 4\tau/(2+6\tau^2)$
14	$k_x(\tau)=1/(10+5\tau^2)$
15	$k_x(\tau)=5(1-\sin 3\tau^2)\exp(-2\tau^2)$
16	$k_x(\tau)=5\cos 2\tau/(l+10\tau^2)$
17	$k_x(\tau)=10(l+2\|\sin\tau\|)\exp(-2\|\tau\|)$
18	$k_x(\tau)=10+2\cos\tau\cos 3\tau$
19	$k_x(\tau)=2(1-2\tau^2)\exp\tau^2$
20	$k_x(\tau)=1+6\cos\tau\cos 3\tau$
21	$k_x(\tau)=5(1+\|\tau\|)\exp(-\|\tau\|)$
22	$k_x(\tau)=5/(1+10\tau^2)$
23	$k_x(\tau)=(1+\sin\tau)\exp(-3\tau)$
24	$k_x(\tau)=6(1+\tau 2)\exp(-4\tau^2)$
25	$k_x(\tau)=6\exp(-36\tau^2)$

Завдання 3.

$\mathbf{Z(t) = \int_0^t X(s)ds}$ Знайти кореляційну функцію $\mathbf{K_Z(t_1, t_2)}$, дисперсію $\mathbf{D_Z(t)}$ випадкового процесу **Z(t)**, взаємну кореляційну функцію $\mathbf{K_{X,Z}(t_1, t_2)}$. У завданнях, де функція містить |τ|, розглянути тільки $0 \le t2 \le t1$.

Таблиця 4.3 – Варіанти індивідуальних завдань

№	Кореляційна функція $k_X(\tau)$
1	$k_x(\tau) = 8\cos 4\tau$
2	$k_x(\tau) = 10/(1 + 4\tau^2)$
3	$k_x(\tau) = 2 + 8\cos 2\tau$
4	$k_x(\tau) = \cos(\tau/2)/4$
5	$k_x(\tau) = 32/(1 + 4\tau^2)$
6	$k_x(\tau) = 2(1+\tau)\exp(-\|\tau\|)$
7	$k_x(\tau) = 12\exp(-5\|\tau\|)$
8	$k_x(\tau) = 32\cos^2 2\tau$
9	$k_x(\tau) = 81/(1 + 3\|\tau\|)$
10	$k_x(\tau) = 10(1 + 4\exp(-\|\tau\|)$
11	$k_x(\tau) = 6\exp(-6\|\tau\|)$
12	$k_x(\tau) = 64\cos^2 4\tau$
13	$k_x(\tau) = 1 + 16/(1 + 4\|\tau\|)$
14	$k_x(\tau) = 1 + 8\exp(-2\|\tau\|)$
15	$k_x(x) = 64/(1 + 4\|\tau\|)$
16	$k_x(\tau) = 64(1 - 4\tau)\exp(-4\|\tau\|)$
17	$k_x(\tau) = 64\cos^2\tau$
18	$k_x(\tau) = 20\exp(-10\tau)$
19	$k_x(\tau) = 2/(1 + 10\tau^2)$
20	$k_x(\tau) = 54(1 + 3\|\tau\|)\exp(-3\|\tau\|)$
21	$k_x(\tau) = 1 + 27/(4 + 3\|\tau\|)$
22	$k_x(\tau) = 8(1 - 2\tau)\exp(-2\|\tau\|)$
23	$k_x(\tau) = 2(1 + 4\exp(-4\|\tau\|))$
24	$k_x(\tau) = 5(1 + 5\|\tau\|)\exp(-5\|\tau\|)$
25	$k_x(\tau) = 20\exp(-2\|\tau\|)$

5. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

5.1 Визначення характеристик ВФ із експерименту

Нехай над ВФ **X(t)** зроблене **n** незалежних випробувань і в результаті отримане **n** реалізацій ВФ (рис.5.1).

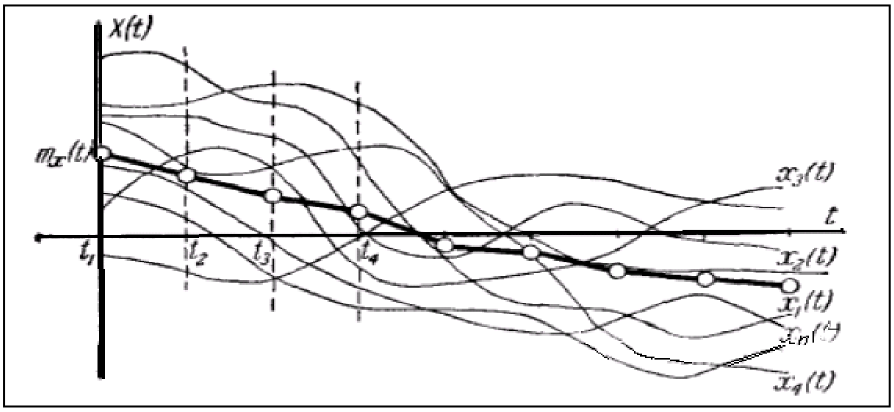

Рис.5.1 – Результати незалежних випробувань

Потрібно знайти оцінки числових характеристик ВФ: математичного очікування, дисперсії, кореляційної функції.

Для цього розглянемо **m** перерізів випадкової функції для наступних моментів часу $\mathbf{t_1, t_2, \ldots, t_m}$. Значення $\mathbf{t_1, t_2, \ldots, t_m}$, як правило, вибирають рівновіддаленими и таким образом, чтобы по ним можно было відновити вид кривых реализаций. Кожному значенню часу відповідає **n** значень ВФ, по числу реалізацій.

Зареєстровані значення **X(t)** заносять у таблицю: кожний рядок відповідає деякій реалізації ВФ , а стовпець – певному моменту часу.

Таблиця 5.1 Зареєстровані значення випадкової функції

	t_1	t_2	…	t_k	…	t_s	…	t_m
$x_1(t)$	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$	…	$x_1(t_k)$	…	$x_1(t_s)$	…	$x_1(t_m)$
$x_2(t)$	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$	…	$x_2(t_k)$	…	$x_2(t_s)$	…	$x_2(t_m)$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$x_i(t)$	$x_i(t_1)$	$x_i(t_2)$	…	$x_i(t_k)$	…	$x_i(t_s)$	…	$x_i(t_m)$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$x_n(t)$	$x_n(t_1)$	$x_n(t_2)$	…	$x_n(t_k)$	…	$x_n(t_s)$	…	$x_n(t_m)$

У таблиці $\mathbf{x_i(t_k)}$ – це значення, відповідне **i**-той реалізації в момент часу $\mathbf{t_1}$.

Отриманий матеріал можна розглядати, як n випробувань над системою з **m** випадкових величин: $\mathbf{x(t_1)}$, $\mathbf{x(t_2)}$, … , $\mathbf{x(t_m)}$.

Тоді, оцінки числових характеристик мають вигляд:

1) математичного очікування

$$\tilde{m}_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(t_k)}{n}$$

2) дисперсії

$$\tilde{D}_{x(t_k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k))^2}{n-1}$$

3) кореляційного моменту

$$\tilde{K}_{x(t_k, t_1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k)) \cdot (x_i(t_1) \tilde{m}_x(t_1))}{n-1}.$$

Другий варіант розрахункових формул:

$$\tilde{D}_{x(t_k, t_1)} = \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} [x_i(t_k)]^2 - [\tilde{m}_x(t_k)]^2 \right] \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$\tilde{K}_{x(t_k, t_1)} = \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i(t_k) \cdot x_i(t_1) - \tilde{m}_x(t_k) \cdot \tilde{m}_x(t_1) \right] \cdot \frac{n}{n-1}.$$

Функцію $\tilde{m}_x(t)$ можна побудувати, отримавши ряд значень:

$$\tilde{m}_x(t_1), \tilde{m}_x(t_2), \ldots, \tilde{m}_x(t_m).$$

Аналогічно будується дисперсія $\tilde{D}_x(t)$ і кореляційна функція (з урахуванням того, що це функція від 2 аргументів).

У випадку потреби всі ці функції апроксимуються відповідними алітичними виразами.

5.2 Рішення типових завдань

Завдання1.

1. Знайти $\mathbf{m_x(t)}$, $\mathbf{K_x(t,t`)}$, $\mathbf{D_x(t)}$, $\mathbf{r_x(t,t`)}$ випадкової функції **X(t)** по п'ятьом реалізаціям.

2. Вважаючи приблизно **X(t)** стаціонарною, знайти її характеристики.

3.Вважаючи функцію ергодичною знайти $\mathbf{m_x(t)}$, $\mathbf{K_x(t,t`)}$, $\mathbf{D_x(t)}$, $\mathbf{r_x(t,t`)}$ по першій реалізації.

Рішення.

Вхідні значення випадкової функції **X(t)** для п'яти реалізацій представлено в таблиці 5.2 .

Таблиця 5.2 - Значення випадкової функції **X(t)**

X	74	60	69	61	68	62	67	64	66
X	57	70	61	68	62	67	63	66	64
X	73	61	69	62	68	62	67	64	66
X	60	70	61	68	62	67	63	66	65
X	70	61	68	62	67	63	67	64	65

У вихідній таблиці представлені значення $\mathbf{X(t_i)}$, де $\mathbf{t_i}$ =0, .. , 9.

Мат. очікування і дисперсію для кожного моменту часу $\mathbf{t_i}$ розрахуємо по відповідним формулам:

$$\mathbf{m_x(t_j) = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i(t_j)}{5}};$$

$$\mathbf{D_x(t_j) = \frac{\sum_{i=1}^{5} (x_i(t_j) - m_x(t_j))^2}{4}}.$$

Стандартне відхилення знайдемо по формулі:

$$\mathbf{\sigma_x = \sqrt{D_x(t_j)}}.$$

В табл.5.3 представлені характеристики випадкової функції **X(t)**.

Таблиця 5.3 - Значення випадкової функції **X(t)**

Mx(t)	66,8	64,4	65,6	64,2	65,4	64,2	65,4	64,8	65,2
Dx(t)	60,7	26,3	17,8	12,2	9,8	6,7	4,8	1,2	0,7
Sx(t)	7,791	5,128	4,219	3,493	3,130	2,588	2,191	1,095	0,837

Для обчислення коваріації використовуємо формулу:

$$\mathbf{K_x(t_k, t_l) = \frac{\sum_{i=1}^{5}\left[(x_i(t_k) - m_x(t_k)) * (x_i(t_l) - m_x(t_l))\right]}{4}}$$

Оскільки коваріаційна матриця $\mathbf{K_x(t_i,t_j)}$ симетрична щодо головної діагоналі, достатньо обчислити її верхню трикутну підматрицю й симетрично відобразити її вниз.

Для обчислення кореляції використовуємо формулу:

$$\mathbf{r_x(t_i, t_j) = \frac{K_x(t_i, t_j)}{\sqrt{D_x(t_i) \cdot D_x(t_j)}}}$$

У результаті отримаємо коваріаційну (табл.5.4) і кореляційну (табл.5.5) матриці:

Таблиця 5.4 – Коваріаційна матриця $\mathbf{K_x(t_i,t_i)}$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	60,7	-39,15	32,4	-26,7	24,1	-19,95	16,6	-8,3	5,8
1		26,3	-21,55	17,9	-15,95	13,15	-11,2	5,6	-3,35
2			17,8	-14,65	13,2	-10,9	9,2	-4,6	2,85
3				12,2	-10,85	8,95	-7,6	3,8	-2,3
4					9,8	-8,1	6,8	-3,4	2,15
5						6,7	-5,6	2,8	-1,8
6							4,8	-2,4	1,4
7								1,2	-0,7
8									0,7
9									

Таблиця 5.5 – Кореляційна матриця $r_x(t_i,t_i)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	-0,9798	0,9857	-0,9812	0,9881	-0,9893	0,9725	-0,9725	0,8898
1		1	-0,996	0,9993	-0,9935	0,99063	-0,9968	0,9968	-0,781
2			1	-0,9941	0,9994	-0,9981	0,9953	-0,9953	0,8074
3				1	-0,9923	0,9899	-0,9931	0,9931	-0,787
4					1	-0,9996	0,9915	-0,9915	0,8209
5							-0,9875	0,9875	-0,831
6							1	-1,000	0,7638
7								1	-0,764
8									1

Вважаючи приблизно $X(t)$ стаціонарною, знайдемо її характеристики.

$$m_x = \frac{m_x(0) + m_x(1) + \ldots + m_x(9)}{10} = 58.6 \qquad D_x = \frac{D_x(0) + D_x(1) + \ldots + D_x(9)}{10} = 2,6$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = 3,74$$

Графік функції $r_x(t_i,\ t_i)$ показаний на рис.5.2 $r_x(t)$

Рис.5.2 - Графік функції

Вважаючи функцію ергодичною можна знайти характеристики $X(t)$ по першій реалізації.

Математичне очікування й дисперсію для кожного моменту часу t_i розрахуємо відповідно до формул:

$$m_{x_1} = \frac{\sum_{j=1}^{10} x_1(t_j)}{10}; \qquad D_{x_1} = \frac{\sum_{j=1}^{10} (x_1(t_j) - m_{x(t_j)})^2}{9}$$

Стандартне відхилення знайдемо по формулі:

$$\sigma_x = \sqrt{D_{x_1}}.$$

Для обчислення коваріації використовуємо формулу:

$$K_x(t_i, t_{i+1}) = \frac{\sum_{i=1}^{10-1} \left[(x_1(t_i) - m_{x_1}) \cdot (x_1(t_{i+1}) - m_{x_1}) \right]}{n-1}$$

Оскільки коваріаційна матриця $K_x(t_i,t_j)$ симетрична щодо головної діагоналі, достатньо обчислити її верхню трикутну підматрицю й симетрично відобразити її вниз.

Для обчислення кореляції використовуємо формулу:

$$r_x(t_i, t_j) = \frac{K_x(t_i, t_j)}{\sqrt{D_x(t_i) \cdot D_x(t_j)}}$$

5.3 Завдання до лабораторної роботи №5

1. Знайти $m_X(t), D_X(t), K_X(t,t'), r_X(t,t')$ випадкової функції $X(t)$ по п'ятьом реалізаціям.

2. Апроксимувати $m_X(t)$ деякою функцією (вид апроксимації mod (№/5)+1, №- номер по журналу):

1) лінійна;
2) логарифмічна;
3) поліноміальна;
4) степенева;
5) експонентна;

3. Розрахувати математичне очікування її похідної і інтеграла.

4. Вважаючи приблизно $X(t)$ стаціонарною, знайти її характеристики.

5. Вважаючи функцію $X(t)$ ергодичною, знайти її характеристики $m_X(t), D_X(t), K_X(t,t'), r_X(t,t')$ по першій реалізації.

Варіант 1

X	17.0	21.2	19.0	21.6	21.2	20.6	18.7	19.6	21.2	19.8
X	23.2	20.7	19.2	21.2	19.8	20.6	18.8	20.2	21.8	17.9
X	19.4	22.2	18.9	21.9	24.4	18.4	24.1	23.5	17.7	20.3
X	19.0	23.2	19.2	18.1	20.2	19.1	18.9	18.7	22.2	16.4
X	18.0	21.2	21.0	18.6	16.6	21.5	19.4	22.1	21.5	22.7

Варіант 2

X	9.17	45.58	16.26	39.61	18.94	36.46	24.622	30.93	25.43
X	9.18	45.59	16.27	39.60	18.93	36.45	24.621	30.92	25.42
X	48.58	13.67	39.97	18.28	37.61	23.33	32.58	25.40	28.81
X	11.72	42.33	16.93	39.05	19.56	36.10	24.66	30.46	26.03
X	46.67	16.24	39.63	18.66	37.59	23.76	32.42	25.40	28.33

Варіант 3

X	231	264	238	244	253	257	274	244	245	260
X	248	253	245	241	255	241	258	259	255	255
X	242	253	248	243	254	251	236	236	258	257
X	240	229	246	251	255	251	255	260	269	267
X	257	235	261	246	240	251	265	261	252	259

Варіант 4

X	200	200	199	204	196	199	203	197	196	203
X	199	203	201	196	207	198	198	198	198	205
X	204	196	197	203	197	203	197	197	201	204
X	201	201	203	203	197	201	201	199	200	198
X	200	209	197	193	197	200	198	204	200	200

Варіант 5

X	1.8	1.3	1.6	1.4	1.6	1.4	1.5	1.5	1.5
X	1.3	1.6	1.4	1.6	1.4	1.6	1.5	1.5	1.5
X	1.7	1.4	1.6	1.4	1.6	1.4	1.5	1.5	1.5
X	1.3	1.6	1.4	1.6	1.4	1.6	1.5	1.5	1.5
X	1.6	1.4	1.6	1.4	1.6	1.5	1.5	1.5	1.5

Варіант 6

X	33.3	34.3	35.6	39.3	33.3	34.4	34.9	35.5	33.4	36.8
X	33.4	34.4	35.0	37.2	36.8	35.8	34.0	33.2	33.9	33.4
X	34.7	34.1	37.7	34.2	37.5	33.7	36.0	35.2	32.8	33.3
X	34.5	36.2	35.7	34.9	35.7	35.2	34.5	35.3	36.4	33.6
X	35.1	35.3	35.4	34.0	35.0	33.9	31.9	33.7	31.9	37.3

Варіант 7

X	21.6	19.5	16.5	22.6	18.0	21.3	19.2	17.8	21.9	20.6
X	22.8	19.3	17.8	21.6	14.2	16.5	19.8	20.7	17.0	19.8
X	22.1	19.5	18.4	19.5	19.5	22.6	23.1	23.0	21.6	19.0
X	19.0	20.9	23.4	21.6	20.1	19.3	22.4	18.8	16.2	20.9
X	16.2	21.2	17.6	20.0	21.0	21.0	23.3	17.3	20.3	18.4

Варіант 8

X	28	31	29	31	29	31	29	30	30
X	33	29	31	29	31	29	30	30	30
X	28	31	29	31	29	31	29	30	30
X	31	29	31	29	31	29	30	30	30
X	28	31	29	31	29	31	29	30	30

Варіант 9

X	231	264	238	244	253	257	274	244	245	248
X	253	245	241	255	241	258	259	255	242	253
X	248	243	254	251	236	236	258	240	229	246
X	251	255	251	255	260	269	257	235	261	246
X	240	251	265	261	252	260	255	257	267	259

Варіант 10

X	49	49	52	50	52	50	52	52	49
X	49	52	53	51	48	50	49	50	51
X	48	51	50	49	51	51	51	50	49
X	49	49	51	49	49	48	51	52	51
X	49	54	51	52	49	51	50	53	49

Варіант 11

X	2554.8	2441.8	2540.1	2467.1	2533.8	2480.5	2521.4	2485.5	2508.8
X	2425.9	2548.4	2461.1	2536.4	2475.9	2523.3	2482.9	2510.5	2490.3
X	2551.4	2454.5	2537.6	2468.0	2532.5	2480.6	2515.7	2486.5	2502.1
X	2434.5	2547.5	2463.2	2535.7	2477.0	2522.6	2484.3	2509.1	2490.4
X	2551.0	2458.8	2537.1	2471.8	2529.7	2481.5	2510.8	2487.0	2498.7
X	2552	2450	2530	2470	2528	2481.5	2510.8	2487.0	2498.7

Варіант 12

X	31	25	30	26	29	27	29	27	28	28
X	25	30	26	29	27	29	27	28	27	28
X	31	25	30	26	29	27	29	27	28	28
X	25	30	26	29	27	29	27	28	28	28
X	31	26	29	27	29	27	29	27	28	28

Варіант 13

X	74	60	69	61	68	62	67	64	66
X	57	70	61	68	62	67	63	66	64
X	73	61	69	62	68	62	67	64	66
X	60	70	61	68	62	67	63	66	65
X	70	61	68	62	67	63	67	64	65

Варіант 14

X	21	15	20	15	19	15	19	16	18	17
X	14	20	15	20	15	19	16	18	16	17
X	21	15	20	15	19	16	19	16	17	17
X	15	20	15	19	15	19	16	18	17	17
X	20	15	20	15	19	16	18	16	17	17

Варіант 15

X	248	58	186	77	171	88	151	113	138	125
X	40	194	68	175	85	154	106	148	121	133
X	237	59	180	82	158	91	151	114	136	126
X	41	188	70	175	85	152	130	144	122	128
X	205	62	178	84	157	94	151	115	135	128

Варіант 16

X	155	129	142	130	139	132	137	133	136	135
X	125	143	128	140	131	138	132	136	134	136
X	149	127	141	130	139	132	137	134	136	135
X	126	143	130	140	132	137	133	136	135	135
X	144	128	141	131	138	132	136	134	136	136

Варіант 17

X	35.6	37.6	31.8	35.6	28.7	34.3	35.0	36.4	34.1	34.5
X	34.7	35.1	36.0	32.3	35.2	33.5	34.0	36.4	34.1	34.9
X	34.4	32.1	36.5	35.6	34.4	37.6	35.4	37.3	35.8	35.8
X	37.0	34.8	35.2	34.0	36.1	35.0	32.8	32.7	35.0	36.7
X	36.0	35.4	32.8	36.7	33.5	34.4	35.6	34.3	35.7	40.0

Варіант 18

X	172	99	148	104	144	ПО	134	116	129	125
X	91	154	104	144	107	137	113	130	124	126
X	159	101	146	105	142	112	133	121	129	125
X	96	150	104	144	107	136	115	130	124	125
X	159	102	144	105	142	112	132	123	129	126

Варіант 19

X	26	21	25	21	24	22	24	23	23	23
X	21	25	21	24	22	24	22	24	23	23
X	25	21	25	22	24	22	24	23	23	23
X	21	25	21	24	22	24	22	23	23	23
X	25	21	25	22	24	22	24	23	23	23

Варіант 20

X	35.6	37.6	31.8	35.6	28.7	34.3	35.0	36.4	34.1	34.5
X	34.7	35.1	36.0	32.3	35.2	33.5	34.0	36.4	34.1	34.9
X	34.4	32.1	36.5	35.6	34.4	37.6	35.4	37.3	35.8	35.8
X	37.0	34.8	35.2	34.0	36.1	35.0	32.8	32.7	35.0	36.7
X	36.0	35.4	32.8	36.7	33.5	34.4	35.6	34.3	35.7	40.0

Варіант 21

X	33.3	34.3	35.6	39.3	33.3	34.4	34.9	35.5	33.4	36.8
X	33.4	34.4	35.0	37.2	36.8	35.8	34.0	33.2	33.9	33.4
X	34.7	34.1	37.7	34.2	37.5	33.7	36.0	35.2	32.8	33.3
X	34.5	36.2	35.7	34.9	35.7	35.2	34.5	35.3	36.4	33.6
X	35.1	35.3	35.4	34.0	35.0	33,9	31.9	33.7	31.9	37.3

Варіант 22

X	387	61	334	131	292	176	276	205	255	227
X	24	337	116	306	166	280	193	266	220	246
X	377	85	328	133	291	177	268	205	249	231
X	53	335	123	304	166	277	203	260	224	234
X	370	95	324	143	281	191	267	218	248	235

Варіант 23

X	2530	2529	2528	2506	2505	2525	2506	2502	2505
X	2519	2521	2496	2522	2525	2530	2505	2562	2518
X	2527	2517	2517	2478	2530	2506	2525	2512	2562
X	2497	2509	2510	2529	2506	2505	2530	2525	2523
X	2534	2506	2531	2505	2510	2510	2506	2529	2507

Варіант 24

X	2490	2486	2530	2529	2528	2531	2488	2524	2525
X	2505	2546	2519	2521	2496	2541	2508	2504	2515
X	2531	2529	2527	2517	2517	2551	2527	2525	2520
X	2503	2530	2497	2509	2510	2508	2532	2513	2528
X	2494	2504	2534	2506	2531	2532	2510	2557	2524

Варіант 25

X	149.7	151.4	150.1	152.3	150.1	151.1	149.7	153.1	150.3	149.4
X	150.2	149.5	152.1	148.5	148.6	150.8	149.1	148.7	149.0	147.5
X	150.5	147.6	147.4	149.2	148.9	148.4	151.9	148.4	149.6	150.0
X	150.7	150.4	151.5	148.9	148.6	145.6	150.4	150.9	148.0	150.9
X	150.1	150.9	149.3	150.8	149.5	149.3	151.8	148.3	149.5	150.2

6. СПЕКТРАЛЬНЕ РОЗКЛАДАННЯ СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Спектральним розкладанням стаціонарної випадкової функції називають представлення цієї функції у вигляді гармонійних коливань різних частот з випадковими амплітудами й випадковими фазами.

При описі цієї теми розглядають два питання: дискретний спектр стаціонарної випадкової функції й безперервний спектр стаціонарної випадкової функції.

6.1 Дискретний спектр стаціонарної випадкової функції

Розглянемо випадок, коли частоти - довільні числа й кількість їх кінцева. Випадкова функція $\dot{X}(t)$ може бути представлена у вигляді

$$\dot{X}(t) = \sum_{k=1}^{n} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t)$$

де U_k, V_k – некорельовані випадкові величини з математичними очікуваннями, рівними нулю, і дисперсіями однаковими для кожної пари випадкових величин з тим самим індексом **k**:

$$D[U_k] = D[V_k] = D_k$$

Визначимо дисперсію випадкової функції, заданої спектральним розкладанням. По теоремі про дисперсію лінійної функції некоррельованих випадкових величин:

$$D[\dot{X}(t)] = \sum_{k=1}^{n} (\cos^2 \omega_k t + \sin^2 \omega_k t) D_k = \sum_{k=1}^{n} D_k$$

Таким чином, **дисперсія стаціонарної випадкової функції дорівнює сумі дисперсій усіх гармонік її спектрального розкладання**.

Дискретним спектром стаціонарної випадкової функції називається сукупність дисперсій усіх складових її гармонік.

Якщо кожній ω_k можна поставити у відповідність D_k, те спектр можна зобразити графічно. На горизонтальній осі розташовують ω_k, а в якості ординати (спектральних ліній) розміщують дисперсії D_i. Цей дисперсійний спектр називають лінійчатим (рис.6.1).

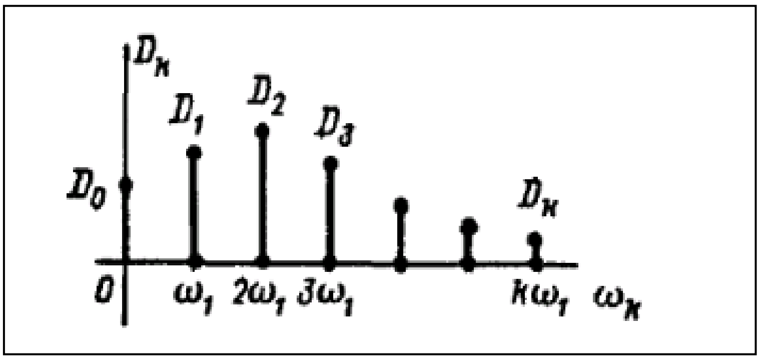

Рис.6.1 – Лінійчатий спектр

6.2 Безперервний спектр стаціонарної випадкової функції

Розглянемо стаціонарні випадкові функції з безперервним спектром. Тобто побудуємо спектральне розкладання стаціонарної випадкової функції $\mathbf{X(t)}$ при $\mathbf{T\text{->}\infty}$.

При $\mathbf{T\text{->}\infty}$ $\boldsymbol{\omega_1=2\pi/2T\text{->}0}$, тому відстані між частотами ω_k, на яких будується спектр, будуть при $\mathbf{T\text{->}\infty}$ необмежено зменшуватися. При цьому дискретний спектр буде наближатися до безперервного, у якому кожному як завгодно малому інтервалу $\boldsymbol{\Delta\omega}$ буде відповідати елементарна дисперсія $\boldsymbol{\Delta D_\omega}$ (рис.6.2).

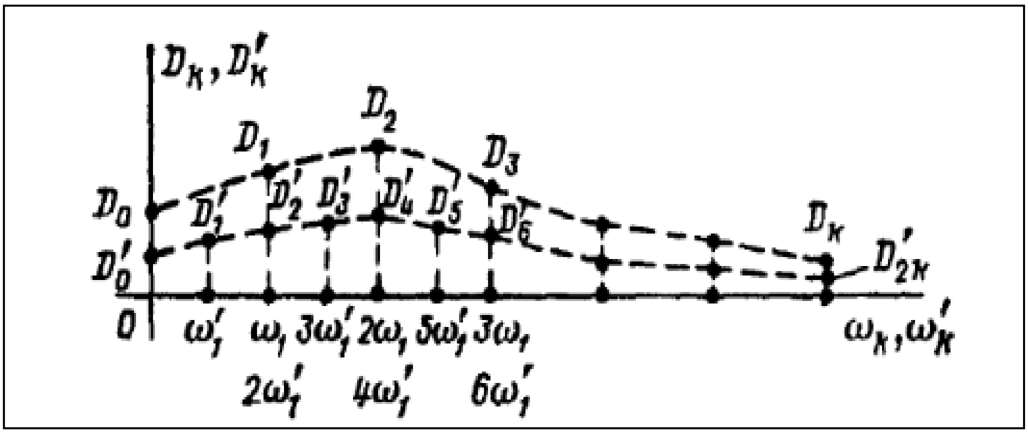

Рис.6.2 - Безперервний спектр

Ця крива зображує щільність розподілу дисперсій по частотах безперервного спектра, а сама функція називається спектральною щільністю дисперсії**,** або, спектральною щільністю стаціонарної випадкової функції **X(t)**.

Таким чином, площа, обмежена кривою $\mathbf{S_k(\omega)_k}$, як і раніше повинна дорівнювати дисперсії $\mathbf{D_x}$ випадкової функції **X(t)**:

$$\mathbf{D_X = \int_0^{\infty} S_X(\omega)\, d\omega}$$

У такий спосіб, ми ввели в розгляд нову додаткову характеристику стаціонарного ВП – спектральну щільність, що описує частотний склад стаціонарного ВП. Ця характеристика не є самостійною, вона повністю визначається кореляційною функцією даного процесу.

Таким чином, кореляційна функція й спектральна щільність стаціонарного ВП зв'язані між собою косинус-перетворенням Фур'є. Отже, спектральна щільність виражається через кореляційну функцію стаціонарного ВП у такий спосіб:

$$\mathbf{S_X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau}$$

Кореляційна функція $\mathbf{k_X(\tau)}$ виражається через спектральну щільність за допомогою зворотного перетворення Фур'є

$$\mathbf{k_X(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}$$

<u>Властивості спектральної щільності стаціонарного ВП</u>

1. Вона є невід’ємною функцією частоти **ω**:

$$\mathbf{S_x(\omega) \geq 0}.$$

2. Функція являється парною:

$$\mathbf{S_x(-\omega) = S_x(\omega).}$$

3. Інтеграл від спектральної щільності в межах від **0** до **∞** дорівнює дисперсії стаціонарного ВП:

$$\mathbf{D_X = \int_0^{+\infty} S_X(\omega) d\omega}.$$

Через парність функцій $\mathbf{k_X(\tau)}$ і $\mathbf{S_X(\omega)}$ кореляційну функцію й спектральну щільність можна представити у вигляді:

$$\mathbf{S_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} k_X(\tau)\cos\omega\tau d\tau}$$

$$\mathbf{k_X(\tau) = \int_0^{+\infty} S_X(\omega)\cos\omega\tau d\omega}$$

6.3 Рішення типових завдань

Завдання 1.

$\mathbf{k_X(\tau)}$ - кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу **X(t)**. Знайти його спектральну щільність.

Приклад 1.

$$\mathbf{k_X(\tau) = 64\frac{\sin^2 4\tau}{\tau^2}}$$

Приклад 2.

$$\mathbf{k_X(\tau) = 12\exp(-4|\tau|\cdot(1+4|\tau|)}$$

Рішення.

Приклад 1.

$$\mathbf{S_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} k_X(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{64\sin^2 4\tau\cos\omega\tau\, d\tau}{\tau^2} d\tau}$$

По формулі 15 додатку А при $\mathbf{a=4}$, $\mathbf{m=\omega}$ маємо

$$\mathbf{S_x(\omega) = \begin{cases} \frac{128}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left(4-\frac{\omega}{2}\right), \text{ при } |\omega|<8 \\ 0 \qquad\qquad , \text{при } |\omega|\geq 8 \end{cases} = \begin{cases} 32\left(8-|\omega|\right), \text{ при } |\omega|<8 \\ 0 \qquad\qquad , \text{ при } |\omega|\geq 8 \end{cases}}$$

Приклад 2.

$$\mathbf{S_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} k_X(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} 12e^{-4\tau}(1+4\tau)\cos\omega\tau\, d\tau =}$$

$$=\frac{24}{\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-4\tau}\cos\omega\tau d\tau+4\int_0^{\infty}\tau e^{-4\tau}\cos\omega\tau d\tau\right)$$

Перший з цих інтегралів обчислюємо по формулі 19, а другий по формулі 20, додатку А:

$$S_x(\omega)=\frac{24}{\pi}\left(\frac{4}{16+\omega^2}+4\frac{16-\omega^2}{(16+\omega^2)^2}\right)=\frac{3072}{\pi(16+\omega^2)^2}$$

Завдання 2.

Знайти кореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу **X(t)**, якщо його спектральна щільність:

Приклад 1.

$$S_x(\omega)=\begin{cases}1-\frac{\omega^2}{16}, & |\omega|\le 4\\ 0, & |\omega|>4\end{cases}$$

Приклад 2.

$$S_x(\omega)=\frac{10}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{4+(3-\omega)^2}+\frac{1}{4+(3+\omega)^2}\right)$$

Рішення.

Приклад 1.

$$k_x(\tau)=\int_0^{\infty}S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega=\int_0^{4}\left(1-\frac{\omega^2}{16}\right)\cos\omega\tau d\omega=$$

$$=\int_0^4\cos\omega\tau d\omega-\frac{1}{16}\int_0^4\omega^2\cos\omega\tau d\omega$$

Для находження інтегралу $\int_0^4\omega^2\cos\,\omega\tau\,d\omega$ візьмемо формулу 25 з додатку А

$$\kappa_x(\tau)=\frac{1}{\tau}\sin 4\tau-\frac{1}{16\tau^3}(2\omega\tau\cos\omega\tau+(\omega^2\tau^2-2)\sin\omega\tau)\Big|_0^4=$$

$$=\frac{1}{\tau}\sin4\tau-\frac{\cos4\tau}{2\tau^2}-\frac{\sin4\tau}{\tau}+\frac{\sin4\tau}{8\tau^3}=\frac{1}{2\tau^2}\left(\frac{\sin4\tau}{4\tau}-\cos4\tau\right)$$, якщо $\tau\neq0$

При $\tau = 0$ одержимо $k_x(0) = \int\limits_0^4 (1 - \frac{\omega^2}{16})d\omega = \frac{8}{3}$

Приклад 2.

$$k_x(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega = \frac{5}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{4+(3-\omega^2)} + \frac{1}{4+(3+\omega^2)}\right)e^{i\omega\tau}d\omega =$$

$$= \frac{5}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\tau}d\omega}{4+(3-\omega)^2} + \frac{5}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\tau}d\omega}{4+(3+\omega)^2}$$

При $\tau \geq 0$ ці інтеграли вирахуємо за допомогою відрахувань по формулі 4 додатку В. Спочатку знайдемо полюси підінтегральних функцій з позитивно уявною часткою:

$$4 + (3-\omega)^2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 3 + 2i, 4 + (3+\omega)^2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = -3 + 2i$$

Маємо

$$k_x(\tau) = 2\pi\, i\,\frac{5}{\pi}\left(\underset{3+2i}{\mathrm{Res}}\,\frac{e^{i\omega\tau}}{4+(3-\omega)^2} + \underset{-3+2i}{\mathrm{Res}}\,\frac{e^{i\omega\tau}}{4+(3+\omega)^2}\right)$$

Вичети порахуємо по формулі 1 додатка 2

$$k_x(\tau) = 10i\left(\left.\frac{e^{i\omega\tau}}{-2(3-\omega)}\right|_{\omega=3+2i} + \left.\frac{e^{i\omega\tau}}{2(3+\omega)}\right|_{\omega=-3+2i}\right) =$$

$$= 10i\left(\frac{e^{3i\tau}\cdot e^{-2\tau}}{4i} + \frac{e^{-3i\tau}\cdot e^{-2\tau}}{4i}\right) =$$

$$= 5e^{-2\tau}\,\frac{e^{3i\tau}+e^{-3i\tau}}{2} = 5e^{-2\tau}\cos 3\tau, \tau \geq 0$$

Із-за парності функції $k_x(\tau)$ при всіх $\tau \in \mathbf{R}$ отримаємо

$$k_x(\tau) = 5e^{-2|\tau|}\cos 3\tau$$

6.4 Завдання до лабораторної роботи №6

Завдання 1.

$k_X(\tau)$ – кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу **X(t)**. Знайти його спектральну щільність.

Таблиця 6.1 – Варіанти індивідуальних завдань

№	$k_X(\tau)$ – кореляційна функція
1	$k_x(\tau)=(\cos\tau+\sin\|\tau\|)\ \exp(—\tau)$
2	$k_x(\tau)=4(l+2\|\tau\|)\exp(-2\|\tau\|)$
3	$k_x(\tau)=16\ \cos 2\tau\ \exp(-\|\tau\|)$
4	$k_x(\tau)=5(\sin 2\tau)/\tau$
5	$k_x(\tau)=81\exp(-9\tau)$
6	$k_x(\tau)=64\exp(-4\|\tau\|)$
7	$k_x(\tau)=(\tau^2\sin\tau/\tau)$
8	$k_x(\tau)=16\exp(-4\tau^2)$
9	$k_x(\tau)=20/(1+25\tau^2)$
10	$k_x(\tau)=\sin^2 2\tau/\tau^2$
11	$k_x(\tau)=(\tau^2\sin\tau/\tau)$
12	$k_x(\tau)=16\exp(-4\tau^2)$
13	$k_x(\tau)=4\exp(-2\|\tau\|)$
14	$k_x(\tau)=32\exp(-16\tau-1)$
15	$k_x(\tau)=9/(1+9\tau^2)$
16	$k_x(\tau)=2\exp(-\|\tau\|)(l+\|\tau\|)$
17	$k_x(\tau)=3(\cos 2\tau\ \sin\tau)$
18	$k_x(\tau)=4\exp(-\tau^2)$
19	$k_x(\tau)=3(\sin 4\tau)/(4\tau)$
20	$k_x(\tau)=8/(8+2\tau^2)$
21	$k_x(\tau)=27\exp(-\|\tau\|)\cos 3\tau$
22	$k_x(\tau)=(1-\tau^2)/10$
23	$k_x(\tau)=\cos\tau+\sin 3\tau$
24	$k_x(\tau)=\exp(\tau)/(l+\tau)$
25	$k_x(\tau)=\sin 3\tau/2\tau$

Завдання 2.

$S_X(\omega)$ – спектральна щільність стаціонарного випадкового процесу $X(t)$. Знайти його кореляційну функцію.

Таблиця 6.2 – Варіанти індивідуальних завдань

№	$S_X(\omega)$ – спектральна щільність	
1	$S_x(\omega)=1-\omega^2/9$, при $\lvert\omega\rvert \le 3$	$S_x(\omega)=0$, при $\lvert\omega\rvert > 3$
2	$S_x(\omega)=20/(25+\omega^2)$	
3	$S_x(\omega)=9/\pi\cdot[1/(9+\omega^2)+1/(9-\omega^2)]$	
4	$S_x(\omega)=4\exp(-\omega^2)$	
5	$S_x(\omega)=8$, при $1<\lvert\omega\rvert<3$	$S_x(\omega)=0$, в інших випадках
6	$S_x(\omega)=8/\pi\cdot[1/(4-\omega^2)+1/(4+\omega^2)]$	
7	$S_x(\omega)=\exp(-\lvert\omega\rvert/2)$	
8	$S_x(\omega)= 27\exp(-\omega^2/36)$	
9	$S_x(\omega)=2(\sin 4\omega)/(4\omega)$	
10	$S_x(\omega)=12/(\pi(9+\omega^2))$	
11	$S_x(\omega)=4/(\pi(1+\omega^2))$	
12	$S_x(\omega)=10$, при $\lvert\omega\rvert \le 2$	$S_x(\omega)=0$, при $\lvert\omega\rvert > 2$
13	$S_x(\omega)=10(\sin^2\omega)/\omega^2$	
14	$S_x(\omega)=8$, при $\lvert\omega\rvert > 2$	$S_x(\omega)=1-\omega^2/4$, при $\lvert\omega\rvert \le 2$
15	$S_x(\omega)=2\exp(-\lvert\omega\rvert/9)$	
16	$S_x(\omega)=2/\pi\cdot[1/(2-\omega^2)+1/(2+\omega^2)]$	
17	$S_x(\omega)=10/(\pi(4+\omega^2))$	
18	$S_x(\omega)=18$, при $2<\lvert\omega\rvert<5$	$S_x(\omega)=0$, в інших випадках
19	$S_x(\omega)=4/\pi\cdot[1/(1-\omega^2)+1/(1+\omega^2)]$	
20	$S_x(\omega)=32/(\pi\,(4+\omega^2)^2)$	
21	$S_x(\omega)=6(1-\cos 2\omega)/(\pi\omega^2)$	
22	$S_x(\omega)=10(\sin 2\omega)/\omega$	
23	$S_x(\omega)= \exp(-\omega^2/4)$	
24	$S_x(\omega)=2\exp(-\lvert\omega\rvert/4)$	
25	$S_x(\omega)=20$, при $\lvert\omega\rvert \le 5$	$S_x(\omega)=0$, при $\lvert\omega\rvert > 5$

7. ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ

Перетворення стаціонарного ВП стаціонарною лінійною системою, описуваною лінійним диференційним рівнянням з постійними коефіцієнтами має вигляд:

$$(a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + a_0)Y(t) = (b_m \frac{d^m}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + ... + b_0)X(t)$$

Застосуємо до рівняння перетворення Лапласа й позначимо зображення реалізації вхідного процесу $x(t) \sim \chi(p)$, а зображення реалізації вихідного сигналу $y(t) \sim \varphi(t)$. Тому, що вимушені коливання стійкої системи в усталеному режимі відбуваються у системі через достатньо довготривалий час після початку впливу вхідного сигналу, то початкові умови вже не будуть мати впливу. Це рівняння для зображень реалізацій ВП $X(t)$ и $Y(t)$ буде мати вигляд:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ...+ a_0)Y(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ...+ b_0)X(t).$$

Позначимо

$$A_n(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_0, \quad B_m(p) = b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + ... + b_0.$$

Початкове лінійне диференційне рівняння можна записати:

$$\varphi(t) = \frac{B_m(p)}{An(p)} \cdot \chi(p)$$

Введемо ще одне позначення $\Phi(p)$ і назвемо його **передаточною функцією стаціонарної лінійної динамічної системи**.

$$\Phi(p) = \frac{B_m(p)}{An(p)}$$

Тоді

$$\varphi(t) = \Phi(p) \cdot \chi(p)$$

Тобто, зображення вихідного сигналу $\varphi(p)$ на виході стаціонарної лінійної системи в усталеному режимі, дорівнює добутку передаточної функції цієї системи на зображення вхідного впливу $\chi(p)$. Символічно це можна зобразити у вигляді схеми (рис. 7.1).

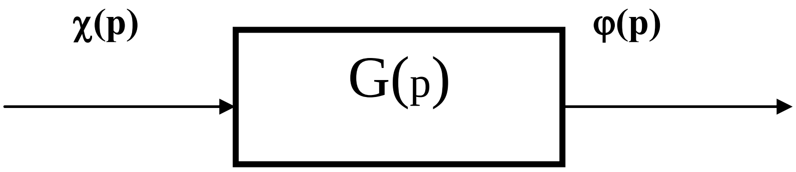

Рис.7.1 – Стаціонарна лінійна система

Стаціонарний ВП являє собою спектральне розкладання, тобто суму гармонійних коливань з випадковою амплітудою і невипадковою частотою. Допустимо, на систему впливає гармонійне коливання $\mathbf{e^{i\omega t}}$. Вихідний сигнал у сталому режимі теж буде представляти гармонійне коливання тієї ж частоти **ω**.

З огляду на вищевикладене, буде дійсна рівність:

$$\Phi(i\varpi)=\frac{B_m(i\varpi)}{An(i\varpi)}$$

Функція **Φ(iω)** називається амплітудно-фазовою частотною характеристикою, (де i — мнима одиниця, a **ω** — кругова частота). **Φ(iω)** дорівнює передатної функції **G(p)** цієї системи, у якій в якості аргумента узятий добуток **iω**. Частотна характеристика стаціонарної лінійної системи визначає ступінь посилення (чи ослаблення) амплітуди гармонійного коливання $\mathbf{e^{i\omega t}}$ на виході цієї системи.

Функція $|\Phi(i\omega)|^2$ називається амплітудно-частотною характеристикою стаціонарної лінійної динамічної системи.

Дисперсія комплексної випадкової величини:

$$D_Y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(i\omega)|^2\,S_X(\omega)d\omega=\int_0^{+\infty}|\Phi(i\omega)|^2\,S_X(\omega)d\omega$$

Спектральна щільність S_Y(**ω**) буде дорівнювати спектральній щільності S_X(**ω**), помноженої на квадрат модуля частотної характеристики $|\Phi(i\omega)|^2$:

$$S_Y(\omega)=|\Phi(i\omega)|^2\,S_X(\omega)$$

Кореляційна функци зв'язана зі спектральної щільність співвідношенням:

$$k_Y(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(i\omega)|^2\,S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=\int_0^{+\infty}|\Phi(i\omega)|^2\,S_X(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$

7.1 Рішення типових завдань

Завдання 1.

На вхід стаціонарної лінійної динамічної системи, описуваної диференційним рівнянням $\mathbf{y'' + 8y' + 15y = 5x' + 10x}$ подається стаціонарний випадковий процес $\mathbf{X(t)}$ з математичним очікуванням $\mathbf{m_x = 5}$ та спектральною щільністю $\mathbf{S_x(\omega) = \sin 7\omega/\omega}$. Знайти математичне очікування та дисперсію випадкового процесу $\mathbf{Y(t)}$ на виході системи у сталому режимі.

Рішення.

Математичне очікування

$$\mathbf{m_y = \frac{b_0}{a_0} \cdot m_x = \frac{10}{15} \cdot 5 = \frac{10}{3}}$$

Дисперсія

$$\mathbf{D_y = \int_0^{+\infty} |\Phi(i\omega)|^2 S_x(\omega)\, d\omega}$$

Передатна функція

$$\mathbf{\Phi(p) = \frac{5p+10}{p^2+8p+15} = \frac{5p+10}{(p+3)(p+5)}}$$

Амплітудно-частотна характеристика системи

$$\mathbf{|\Phi(i\omega)|^2 = \Phi(i\omega)\Phi(-i\omega) = \frac{5i\omega+10}{(i\omega+3)\cdot(i\omega+5)} \cdot \frac{-5i\omega+10}{(-i\omega+3)\cdot(-i\omega+5)} = \frac{25\omega^2+100}{(\omega+9)(\omega^2+25)}}$$

Підставивши цей арифметичний вираз у формулу дисперсії, отримаємо

$$\mathbf{D_y = \int_0^{+\infty} \frac{25\omega^2+100}{(\omega^2+9)(\omega^2+25)} \cdot \frac{\sin 7\omega}{\omega}\, d\omega}$$

Для обчислення цього інтеграла розкладемо амплітудно-частотну характеристику на суму простих дробів.

$$\mathbf{\frac{25\omega^2+100}{(\omega^2+9)(\omega^2+25)} = \frac{A}{\omega^2+9} + \frac{B}{\omega^2+25} = \frac{A\omega^2+25A+B\omega^2+9B}{(\omega^2+9)(\omega^2+25)} \Rightarrow}$$

$$\mathbf{A\omega^2 + 25A + B\omega^2 + 9B = 25\omega^2 + 100 \Rightarrow \begin{cases} A + B = 25 \\ 25A + 9B = 100 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{125}{16} \quad B = \frac{525}{16}}$$

Таким чином, $\dfrac{25\omega^2+100}{(\omega^2+9)(\omega^2+25)} = -\dfrac{125}{16}\dfrac{1}{\omega^2+9} + \dfrac{125}{16}\dfrac{1}{\omega^2+25}$, отже

$$\mathbf{D_y = -\frac{125}{16}\int_0^{\infty}\frac{\sin 7\omega}{\omega(\omega^2+9)}d\omega + \frac{525}{16}\int_0^{\infty}\frac{\sin 7\omega}{\omega(\omega^2+25)}d\omega}$$

Кожен з цих інтегралів обчислимо за формулою 8 із додатка А (у першому інтегралі покладемо $\mathbf{m=7,\ a=3}$ у другому $-\mathbf{m=7,\ a=5}$) :

$$\mathbf{D_y = -\frac{125}{16}\ \frac{\pi}{2\cdot 9}(1-e^{-7\cdot 3}) + \frac{525}{16}\ \frac{\pi}{2\cdot 25}(1-e^{-7\cdot 5}) = \frac{\pi}{288}(64+125e^{-21}-189e^{-35})}$$

Завдання 2.

На вхід стаціонарної лінійної динамічної системи, що описується диференціальним рівнянням $\mathbf{y'' + 4y' + 4y = 5x'}$ подається стаціонарний випадковий процес $\mathbf{X(t)}$ з кореляційною функцією $\mathbf{k_x(\tau) = 16\exp(-4|\tau|\cos 3\tau)}$ Знайти спектральну щільність $\mathbf{S_y(\omega)}$ випадкового процесу $\mathbf{Y(t)}$ на виході системи в сталому режимі.

Рішення.

Спектральна щільність випадкового процесу $\mathbf{X(t)}$.

$$\mathbf{S_x(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} k_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} 16e^{-4\tau}\cos 3\tau\cos\omega\tau\, d\tau}$$

По формулі 22 додатку 1 при $\mathbf{a=4,\ m=3,\ n=\omega}$ маємо

$$\mathbf{S_x(\omega) = \frac{32}{\pi}\ \frac{4(16+9+\omega^2)}{(16+(3-\omega)^2)\cdot(16+(3+\omega)^2)} = \frac{128(25+\omega^2)}{\pi(16+(3-\omega)^2)\cdot(16+(3+\omega)^2)}}$$

Передатна функція і амплітудно-частотна характеристика

$$\mathbf{\Phi(p) = \frac{5p}{p^2+4p+4} = \frac{5p}{(p+2)^2} \Rightarrow |\Phi(i\omega)|^2 = \frac{25\omega^2}{(\omega^2+4)^2}}$$

Спектральна щільність $\mathbf{S_y(\omega)}$ випадкового процесу $\mathbf{Y(t)}$.

$$\mathbf{S_y(\omega) = \frac{3200\omega^2(25+\omega^2)}{\pi(16+(3-\omega)^2)\cdot(16+(3+\omega)^2)(\omega^2+4)^2}}$$

7.2 Завдання до лабораторної роботи №7

Завдання 1.

На вхід подається стаціонарний ВП **X(t) з** математичним очікуванням $\mathbf{m_X}$ і спектральною щільністю $\mathbf{S_x(\omega)}$. Знайти математичне очікування й дисперсію випадкового процесу **Y(t)** на виході системи.

Таблиця 7.1 – Варіанти індивідуальних завдань

№	Процес	m_x	$S_X(\omega)$
1	$y'' + 5y' + 6y = 3x$	10	$S_x(\omega)=2(\sin 4\omega)/(4\omega)$
2	$y'' + 4y' + 4y = 3x'$	14	$S_x(\omega)=10/(\pi(4+\omega^2))$
3	$y'' + 3y' + 2y = x'' + 8x' + 15x$	6	$S_x(\omega)=(\cos 2\omega \sin\omega)$
4	$y'' + 4y' + 4y = x'$	10	$S_x(\omega)= \exp(-\omega^2/4)$
5	$y'' + 2y' + y = x' + 3x$	4	$S_x(\omega)=(1-\omega^2)/10$
6	$y'' + 10y' + 25y = x'$	14	$S_x(\omega)=\sin 3\omega/2\omega$
7	$y' + y = 2x$	12	$S_x(\omega)=1 - 9\omega^2)$
8	$y'' + 7y' + 10y = x' + 4x$	6	$S_x(\omega)=4(1+ \sin\omega^2)$
9	$y'' + 4y' + 3y=x'' + 8x' + 16x$	7	$S_x(\omega)=12/(\pi(9+\omega^2))$
10	$y' + 3y = 4x'$	18	$S_x(\omega)= 4\cos 2\omega \cos 6\omega$
11	$y' + 5y = x$	20	$S_x(\omega)=4/(\pi(1+\omega^2))$
12	$y' + 3y = x' + x$	5	$S_x(\omega)=10/(l+8\omega^2)$
13	$y'' + 6y' + 5y = x' + 2x$	15	$S_x(\omega)=10(\sin^2\omega)/\omega^2$
14	$y' + 4y = 2x$	12	$S_x(\omega)=1/(10 + 5\omega^2)$
15	$y'' + 5y' + y = x'+x$	8	$S_x(\omega)=10/(\pi(4+\omega^2))$
16	$y'' + 6y' + 5y = x'$	16	$S_x(\omega)=10+2 \cos\omega$
17	$y' + 3y = 4x$	12	$S_x(\omega)=2(1 - 2\omega^2)$
18	$y'' + 4y' + 3y = x'$	16	$S_x(\omega)=5(1+\cos 2\omega)$
19	$y' + 5y = 4x'$	6	$S_x(\omega)=4/(-\omega^2)$
20	$y'' + 2y = 4x$	6	$S_x(\omega)= 27(-\omega^2/36)$
21	$y' + 4y = 10x$	9	$S_x(\omega)=5/(1 + \cos 2\omega)$
22	$y' + 2y = x'+ 3x$	2	$S_x(\omega)=\pi+4\cos 2\omega$
23	$y' + 4y = 5x$	9	$S_x(\omega)=\cos 2\omega\ (-3\cos 2\omega)$
24	$y' + 3y = 4x$	18	$S_x(\omega)=3\sin 4\omega/\omega$
25	$y'' + 2y' + y = x$	5	$S_x(\omega)=4/\pi\cdot(5+\omega^2)$

Завдання 2.

На вхід подається стаціонарний ВП **X(t)** с кореляційною функцією $\mathbf{k_X(\tau)}$. Знайти спектральну щільність $\mathbf{S_x(\omega)}$ випадкового процесу **Y(t)** на виході системи.

Таблиця 7.2 – Варіанти індивідуальних завдань

№	Процес	$k_x(\tau)$
1	$y'' + 10y' + 25y = x'$	$k_x(\tau)=5(\sin 2\tau)$
2	$y'' + 4y' + 3y = x'' + 8x' + 16x$	$k_x(\tau)=6\exp(-\tau^2)$
3	$y' + 3y = x' + x$	$k_x(\tau)=\cos 2\tau\ \exp(\tau)$
4	$y'' + 3y' + 2y = x'' + 8x' + 15x$	$k_x(\tau)=(\cos 2\tau\ \sin\tau)$
5	$y'' + 4y' + 4y = x'$	$k_x(\tau)=\exp(-\tau^2/4)$
6	$y' + 5y = 4x'$	$k_x(\tau)=5(\sin 2\tau)/\tau$
7	$y'' + 2y' + y = x' + 3x$	$k_x(\tau)=10/(\pi(4+\tau^2))$
8	$y' + 4y = 2x$	$k_x(\tau)=81\exp(-9\tau)$
9	$y'' + 5y' + 6y = 3x$	$k_x(\tau)=16\exp(-4\tau^2)$
10	$y' + y = 2x$	$k_x(\tau)=1 - 9\tau^2)$
11	$y'' + 7y' + 10y = x' + 4x$	$k_x(\tau)=4(1+ \sin\tau^2)$
12	$y'' + 4y' + 4y = 3x'$	$k_x(\tau)=(\tau^2\sin\tau/\tau)$
13	$y'' + 6y' + 5y = x'$	$k_x(\tau)=\sin^2 2\tau/\tau^2$
14	$y' + 3y = 4x'$	$k_x(\tau)=3(\cos 2\tau\ \sin\tau)$
15	$y' + 5y = x$	$k_x(\tau)=32\exp(\tau-1)$
16	$y'' + 4y' + 3y = x'$	$k_x(\tau)=4/(\pi(1+\tau^2))$
17	$y' + 4y = 10x$	$k_x(\tau)=10/(l+8\tau^2)$
18	$y'' + 6y' + 5y = x' + 2x$	$k_x(\tau)=2/(\pi+2\tau^2)$
19	$y' + 3y = 4x$	$k_x(\tau)=\sin 3\tau/2\tau$
20	$y'' + 5y' + y = x'+x$	$k_x(\tau)=1/(10 + 5\tau^2)$
21	$y' + 4y = 5x$	$k_x(\tau)=10/(\pi(4+\tau^2))$
22	$y' + 3y = 4x$	$k_x(\tau)=10+2\cos\tau$
23	$y' + 2y = x'+ 3x$	$k_x(\tau)=2(1 - 2\tau^2)$
24	$y'' + 2y' + y = x$	$k_x(\tau)=5(1+\cos 2\tau)$
25	$y'' + 2y = 4x$	$k_x(\tau)=\exp(\tau)/(l+\tau)$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бугров Я.С., Нікольский С.М. Вища математика. Діфференціальні рівняння. Кратні інтеграли. Ряди. Функції комплексного переменного. –М.: Наука, 1980.

2. Гмурман В.Е. Керівництво до рішення задач з теорії вірогідності та математичного очікування . – М.: вища школа, 1998.

3. Гмурман В.Е. Теорія вірогідності та математична статистика. – М.: Вища школа, 1999.

4. Гніденко Б.В. Курс теорії вірогідності. – М.: Наука, 1988.

5. Гурский Е.И. теорія вірогідності з елементами математичної статистики. – М.: Вища школа, 1971.

6. Двайт Г.Б. Таблиці інтегралів та інші математичні формули. – М.:Наука, 1983.

7. Завдання к типовому обліку з теми «Элементи теорії випадкових процесів»/ видавник Син Л.И. – Шахты: ЮРГУЭС, 2002.

8. Збірник задач по математиці для вузів. Теорія вірогідності та математична статистика./ під видавництвом А.В.Ефимова. – М.: Наука, 1990.

9. Чистяков В.П. Курс теорії вірогідності. – М.: Наука, 1982.

10. Чудесенко В.Ф. Зб. завдань по спеціальним курсам вищої математики. Типові розрахунки. – М.: Вища школа, 1999.

ДОДАТОК А

Табличні інтеграли

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}, a > 0, m \ge 0$

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-e^{-2ma}), a > 0, m \ge 0$

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx \sin nx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}\mathrm{sh}\, na, a > 0, m \ge n \ge 0$

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx \cos nx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}\mathrm{ch}\, na, a > 0, m \ge n \ge 0$

5. $\int\limits_0^\infty \frac{x \sin mx \cos nx}{a^2+x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-ma}\mathrm{ch}\, na, a>0, m>n\ge 0 \\ -\frac{\pi}{2}e^{-na}\mathrm{sh}\, ma, a>0, n>m\ge 0 \end{cases}$

6. $\int\limits_0^\infty \frac{x \sin mx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma}, a \ge 0, m > 0$

7. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma}, a > 0, m \ge 0$

8. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx}{x(a^2+x^2)}dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ma}), a > 0, m \ge 0$

9. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx}{x(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2a^4}(1-\frac{2+ma}{2}e^{-ma}), a > 0, m \ge 0$

10. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma}, a > 0, m \ge 0$

11. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}dx = (\frac{e^{-mb}}{b}-\frac{e^{=ma}}{a})\frac{\pi}{2(a^2-b^2)}, a, b > 0, m \ge 0, a \ne b$

12. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma}, a > 0, m \ge 0$

13. $\int\limits_0^\infty \frac{x \sin mx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}dx = \frac{\pi}{2}\frac{e^{-mb}e^{-ma}}{a^2-b^2}, a, b > 0, m \ge 0, a \ne b$

14. $\int_0^\infty \frac{\sin mx \cos nx dx}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, m>n\geq 0 \\ \frac{\pi}{4}, m=n>0 \end{cases}$

15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax \cos mx dx}{x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(a-\frac{|m|}{2}), a>\frac{|m|}{2}\geq 0 \\ 0, \frac{|m|}{2}\geq a\geq 0 \end{cases}$

16. $\int_0^\infty \frac{1-\cos mx}{x^2} dx = \frac{\pi|m|}{2}$

17. $\int_0^\infty xe^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}, a > 0$

18. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin mx dx = \frac{m}{a^2+m^2}, a > 0$

19. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos mx dx = \frac{a}{a^2+m^2}, a > 0$

20. $\int_0^\infty xe^{-ax} \cos mx dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2}, a > 0$

21. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin mx \cos nx dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)}, a > 0$

22. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos mx \cos nx dx = \frac{a(a^2+m^2+n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)}, a > 0$

23. $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos mx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{\frac{-m^2}{4a}}, a > 0$

24. $\int x^2 \cos ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax \cos ax + (a^2x^2 - 2)\sin ax) + c, a \neq 0$

25. $\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax \sin ax) + c, a \neq 0$

26. $\int xe^{ax} dx = e^{ax}(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}) + c, a \neq 0$

27. $\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax}(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}) + c, a \neq 0$

ДОДАТОК Б

Зведення з теорії відрахувань

1. **Обчислення вирахувань для полюсів**

Якщо z_0 простий полюс функції $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, функції $\varphi(z), \psi(z)$, аналітичні в точці z_0 та $\varphi(z_0) \neq 0$ Тоді

$$\mathrm{Res}_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}\Big|_{z=z_0} \quad (1)$$

Якщо z_0 - полюс другого порядку функції $f(z)$ тоді

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} ((z - z_0)^2 f(z))' \quad (2)$$

2. **Обчислення невласних інтегралів за допомогою вирахувань**

Якщо $P(z), Q(z)$ багаточлени від z степені n, m відповідно ,та $m > n + 1$. Крім того, хай дроб $P(z)/Q(z)$ не має виняткових крапок на осі Ох,а $z_1, z_2, .. z_n$ всі її полюси з позитивними уявними частинами. Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}_{z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(z)e^{iax}}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}_{z_k} \frac{P(z)e^{iaz}}{Q(z)}, a \geq 0 \quad (4)$$

Зауваження . при $m > n + 1$ формула (3) є окремим випадком формули (4) коли $a = 0$. Але при a>0 формула (4) дійсна й при m>n