

Чернышев Е.А., Пашинин А.В. (ДонНТУ, г. Донецк, Украина)

Тел./Факс: +38 (062) 3050104; E-mail: [chernyshev81@mail.ru](mailto:chernyshev81@mail.ru)

**Аннотация:** На примере одномассовой консервативной колебательной системы выполнен теоретический анализ факторов, вызывающих явление параметрического резонанса при точении. Получены явные выражения, позволяющие учитывать влияние реальной формы заготовки на динамическую устойчивость. Определены зоны неустойчивости.

**Ключевые слова:** эллиптичность, эксцентриситет, глубина резания, жесткость, частота, параметрический резонанс.

### Введение.

В динамических системах при переменности во времени каких-либо параметров возникают колебания, именуемые параметрическими. Это явление известно и при обработке металлов резанием, хотя в классической литературе по динамике станков ему обычно не уделяют большого внимания. Тем не менее опубликовано достаточно много работ, выполненных в этом направлении. Среди них можно отметить работы [1, 2] Ю.Ф. Копелева, труды последних лет [3-5], в которых исследуются параметрические колебания при точении, осевой и абразивной обработке. Одной из основных причин параметрических колебаний при резании является изменяющаяся жесткость. Это же явствует и из уравнения, к которому обычно приводит анализ подобных задач, - уравнения с периодическим коэффициентом при упругом члене. Однако не всегда выполненный анализ, корректный математически, имеет ясный физический смысл. В ряде случаев ограничиваются анализом уравнений, не вдаваясь в физические причины явления. В данной работе основное внимание как раз уделено анализу тех факторов, которые могут вызвать параметрический резонанс. В качестве примера рассматривается обработка точением.

Выдвинуто предположение, что геометрические погрешности заготовки (эллиптичность и эксцентричность сечения) и центробежная сила приводят к динамической «параметричности» системы, физически уподобляя ее системе с переменной жесткостью, в которой возможен параметрический резонанс. В этом заключается *основная идея работы*. Все нижеизложенное является по существу ее математической разработкой.

На основании этого сформулирована **цель работы** – теоретически исследовать факторы, вызывающие явление параметрического резонанса при точении, и их влияние на ширину областей неустойчивости. Для этого поставлены задачи: 1) получить явные выражения для изменения глубины резания вследствие эллиптичности и эксцентричности сечения; 2) учесть влияние центробежной силы на динамику процесса; 3) провести анализ уравнения динамики на предмет параметрического резонанса и определить зоны неустойчивости.

### Основное содержание и результаты работы.

Рассмотрим одномассовую консервативную колебательную систему, в которой резец считается жестко закрепленным, а заготовка представляется приведенной массой  $m$ , вращающейся с угловой скоростью  $\nu$  и совершающей радиальные колебания на пружине с коэффициентом  $c$  статической жесткости под действием радиальной со-

ставляющей  $P_y$  силы резания, которой противодействует упругая восстанавливающая сила.

Радиальную силу резания  $P_y$  будем определять с использованием эмпирической зависимости [6] вида

$$P_y = K h^n \text{ Н}, \quad (1)$$

где  $h$  - фактическая глубина резания, м, а коэффициент  $K$  считается постоянной величиной и определяется условиями обработки:

$$K = 10 C_p K_p V^l s^m 1000^n,$$

учитывая скорость резания  $V$ , м/мин, подачу  $s$ , мм/об, а также свойства материалов и схему обработки безразмерными коэффициентами  $C_p, K_p$ .

Запишем уравнение радиальных колебаний в предположении о линейности упругой силы и той гипотезы, что в каждый момент времени сила резания определяется зависимостью (1), где глубина резания корректируется радиальными перемещениями  $y$  заготовки в колебательном движении, т.е. представляется в виде

$$h = h_0 - y, \quad (2)$$

где  $h_0$  - номинальная глубина резания без учета колебаний, направив ось  $y$  таким образом, что перемещение в направлении действия силы резания уменьшает фактическую глубину резания.

Подставив (2) в (1), будем иметь уравнение

$$m\ddot{y} + cy = K (h_0(t) - y)^n, \quad (3)$$

отражающее переменность номинальной глубины резания.

Перейдем к анализу динамических процессов, могущих проявиться по причине периодического изменения глубины резания.

На практике они могут быть вызваны, во-первых, отклонением от круглости поперечного сечения заготовки, а во-вторых, несовпадением оси вращения с осью сечения. Последний фактор возможен даже при точении одноступенчатого вала, когда продольная кривизна приводит к тому, что сечение не вращается вокруг своей оси. В результате, помимо периодического (вследствие несоосности и некруглости) изменения глубины, а следовательно, силы резания, возникает также периодически изменяющаяся

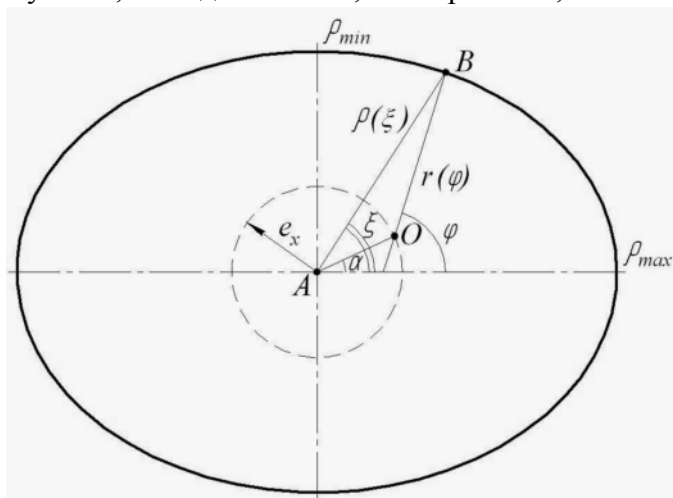


Рис. 1. Эллиптическое сечение заготовки со смещенной осью вращения

центробежная сила. Она возникает и в том случае, когда ось заготовки совпадает с осью вращения, но из-за радиальных колебаний имеет место мгновенный эксцентриситет.

Учтем все эти факторы следующим образом. Представим сечение заготовки в виде эллипса с полуосями  $\rho_{\min}, \rho_{\max}$ , вращающегося вокруг оси, смещенной на величину эксцентриситета  $e_x$  относительно центра  $A$  эллипса (рис. 1). Под эксцентриситетом условимся понимать не характерный параметр эллипса как кривой второго порядка, а расстояние между осью вращения и

центром эллипса. Очевидно, что геометрическое место всех возможных положений этой оси вращения при заданном эксцентриситете есть окружность радиуса  $e_x$ , описанная около центра эллипса. Обозначим точкой  $O$  произвольное положение оси вращения и найдем зависимость радиус-вектора  $r(\varphi) = OB$  от угла поворота.

Уравнение эллипса в полярных координатах с полюсом в центре имеет вид

$$\rho(\xi) = \frac{\rho_{\min}}{\sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}}\right)^2\right] \cos^2 \xi}}, \quad (4)$$

где  $\xi$  - угол поворота радиус-вектора  $AB$ .

Перейдем к радиус-вектору  $OB$ , используя известные координаты его концов:  $O(e_x \cos \alpha; e_x \sin \alpha)$  и  $B(\rho(\xi) \cos \xi; \rho(\xi) \sin \xi)$ . В результате получим

$$r(\xi) = \sqrt{(\rho(\xi) \cos \xi - e_x \cos \alpha)^2 + (\rho(\xi) \sin \xi - e_x \sin \alpha)^2}, \quad (5)$$

где центральный угол  $\alpha$  показывает угловую координату оси вращения относительно большой полуоси эллипса.

Поскольку эллипс вращается вокруг точки  $O$ , необходимо иметь также зависимость  $\xi(\varphi)$ . Однако с учетом того, что на практике величина  $e_x$  минимум на два порядка меньше радиуса заготовки и точка  $O$  близка к точке  $A$ , можно считать, что  $\xi = \varphi$ . Так, например, при полуосях 51 и 50 мм и  $e_x = 1$  мм разница  $|\xi - \varphi|$  не превышает  $1^\circ$ . Таким образом, при данном допущении уравнение (5) дает следующую зависимость фактического радиуса заготовки от угла поворота  $\varphi$ :

$$r(\varphi) = \sqrt{(\rho(\varphi) \cos \varphi - e_x \cos \alpha)^2 + (\rho(\varphi) \sin \varphi - e_x \sin \alpha)^2}, \quad (6)$$

Входящие в (4) величины  $\rho_{\min}, \rho_{\max}$  можно представить в виде

$$\rho_{\min} = R - \frac{\Delta_K}{2}, \quad \rho_{\max} = R + \frac{\Delta_K}{2}, \quad (7)$$

где  $\Delta_K$  - отклонение от круглости,  $R$  - средний радиус, или полуразность наибольшего и наименьшего диаметра.

Номинальная глубина резания  $h_0$ , с учетом некруглости и эксцентриситета, как функция угла поворота ротора запишется следующим образом:

$$h_0(\varphi) = r(\varphi) - r_0, \quad (8)$$

где  $r_0$  - расстояние от вершины резца до оси вращения заготовки.

Формула (8) дает зависимость номинальной глубины резания от угла поворота с учетом некруглости и несоосности сечения, связывая, таким образом, погрешности формы и расположения с технологическим параметром  $h_0$  - глубиной резания. При малом эксцентриситете ее можно приближенно переписать в виде

$$h_0(\varphi) = r(\varphi) - R + \bar{h}_0, \quad (9)$$

где  $\bar{h}_0$  - «ожидаемая» глубина резания без учета некруглости и несоосности, т.е. глубина резания при идеально круглом сечении, концентричном с осью вращения.

Формула (9) будет точной, если  $R$  заменить среднеинтегральным за один оборот радиусом заготовки относительно оси вращения. Однако при малом эксцентриситете можно считать, что значения среднеинтегрального радиуса относительно оси вращения

и центра сечения совпадают. Это допущение имеет ту же природу, что и сделанное выше предположение  $\xi = \varphi$ , существенно упрощая дальнейший анализ.

Формула (9) отражает тот факт, что при отсутствии некруглости и несоосности, когда  $r(\varphi) = R$ , будем иметь  $h_0(\varphi) = \bar{h}_0$ , т.е. номинальная глубина резания не изменяется во времени. Последовательное использование формул (7), (4), (6) и (9) позволяет описать изменение номинальной глубины резания во времени в зависимости от геометрических погрешностей – некруглости и несоосности.

Полученные зависимости, отражая изменение номинальной глубины, уточняют, таким образом, значение силы резания в каждый момент времени. Для этого в правой части уравнения движения (3) вместо  $h_0$  следует подставить зависимость (9) и решить дифференциальное уравнение относительно динамической переменной  $y$ . Однако необходимо также учесть центробежную силу, которая, повторим, в рамках сделанных допущений возникает вследствие:

- 1) начального (статического) эксцентриситета сечения относительно оси вращения;
- 2) динамического эксцентриситета, равного смещению оси заготовки в колебательном движении.

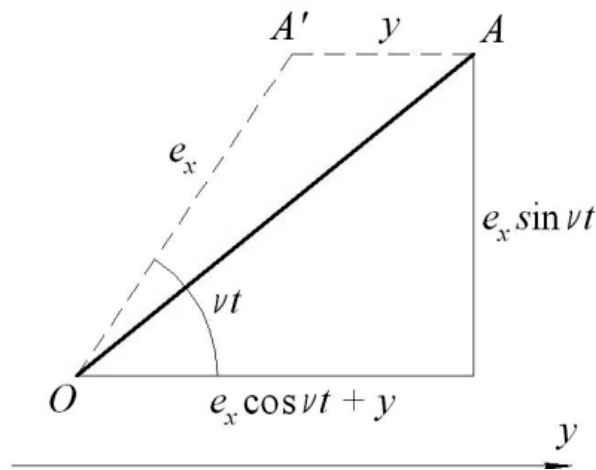


Рис. 2. Схема к расчету мгновенного эксцентриситета

Эти причины, как будет показано ниже, могут вызвать систематическое увеличение амплитуд колебаний в значительно большей степени, чем периодическое изменение глубины резания.

Представим, что точка  $A$  (рис. 1), к которой приведена масса  $m$  заготовки, в силу статического эксцентриситета, обозначенного  $e_x$ , вращается вокруг оси (точка  $O$ ) с угловой скоростью  $v$  и одновременно, согласно принятой модели, совершает радиальные колебания, описываемые функцией  $y$ . Взаимное положение этих воображаемых точек в некоторый момент времени изображено на рис. 2. В качестве точки  $A'$  обозначено текущее положение

приведенной массы без учета колебаний, а в качестве точки  $A$  - с учетом радиальных колебаний. Очевидно, что  $OA' = e_x$ ,  $AA' = y$ . Отсюда легко определить зависимость радиуса  $OA$ , благодаря которому возникает центробежная сила:

$$OA = \sqrt{e_x^2 \sin^2 vt + (e_x \cos vt + y)^2},$$

и тогда проекция центробежной силы  $P_{uy}$  на ось  $y$  равна

$$P_{uy} = mv^2 \sqrt{e_x^2 \sin^2 vt + (e_x \cos vt + y)^2} \cos vt. \quad (10)$$

Считая колебания малыми и имея в виду прежде всего обнаружение неустойчивого движения, линеаризуем (10) в окрестности  $y = 0$ :

$$P_{uy} = P_{uy} \Big|_{y=0} + \frac{\partial P_{uy}}{\partial y} \Big|_{y=0} \cdot y, \quad (11)$$

$$P_{uy}|_{y=0} = mv^2 e_x \cos vt, \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial P_{uy}}{\partial y} \right|_{y=0} = - \frac{2mv^2 (e_x \cos vt + y) \cos vt}{2\sqrt{e_x \sin^2 vt + (e_x \cos vt + y)^2}} \Big|_{y=0} = -mv^2 \cos^2 vt. \quad (13)$$

Подставляя (12), (13) в (11), получим зависимость

$$P_{uy} = mv^2 \cos vt (1 - y \cos vt), \quad (14)$$

которую необходимо добавить в правую часть уравнения динамики (3), после чего последнее примет вид

$$m\ddot{y} + cy = K \left( [h_0(vt)] - y \right)^n + P_{uy}, \quad (15)$$

где силу резания также линеаризуем в окрестности  $y = 0$  для использования теории Флоке-Ляпунова дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Полученное однородное уравнение

$$m\ddot{y} + \varpi^2(t)y = 0, \quad (16)$$

где обозначено

$$\varpi^2(t) = c + Kn [h_0(vt)]^{n-1} + mv^2 \cos^2 vt, \quad (17)$$

является уравнением с периодическим коэффициентом и описывает параметрическую систему, т.е. такую, которая характеризуется переменностью во времени одного из параметров. В данном случае этот параметр можно толковать как переменную «жесткость»  $\varpi^2(t)$ .

Прежде чем приступить к анализу этого уравнения, заметим, что периодический параметр (17) складывается из двух частных периодических коэффициентов, обусловленных: 1) переменностью глубины резания; 2) центробежной силой. В силу этого представим его в виде

$$\varpi^2(t) = c + \Theta_1(t) + \Theta_2(t), \quad (18)$$

где

$$\Theta_1(t) = Kn [h_0(vt)]^{n-1}, \quad (19)$$

$$\Theta_2(t) = mv^2 \cos^2 vt, \quad (20)$$

употребляя функции  $\Theta_1(t)$ ,  $\Theta_2(t)$  для обозначения влияния переменной глубины и центробежной силы соответственно.

Примем во внимание это обстоятельство, как подводящее к вопросу о числе гармоник в частичной сумме ряда Фурье, которой мы будем представлять периодическую функцию (18). Очевидно, что функция  $\Theta_2(t)$ , представляя ее в виде  $\Theta_2(t) = 0,5mv^2(1 + \cos 2vt)$ , содержит единственную гармонику частоты  $2\nu$ .

Сколько гармоник содержит функция  $\Theta_1(t)$ , ясно из рис. 1. Поскольку она отражает влияние переменной глубины, то очевидно следующее: вследствие статического эксцентриситета  $e_x$  глубина изменяется с частотой  $\nu$ , но эллиптичность сечения приводит к появлению гармоники с частотой  $2\nu$ . Это связано с тем, что радиус-вектор эллиптического сечения, концентричного с осью вращения, дважды за один оборот принимает максимальное и минимальное значения. Наличие статического эксцентриситета лишь незначительно изменяет соотношение между этими двумя гармоническими чле-

нами. Поскольку, таким образом, периодический коэффициент  $\varpi^2(t)$  содержит всего две гармоники, то и ряд Фурье будет состоять из двух гармонических членов. Причем в частном случае  $\alpha = 0$  (когда ось вращения  $O$  на рис. 1 лежит на большой полуоси) фазы всех косинусов в (19), (20) совпадают, что превращает  $\varpi^2(t)$  в четную функцию,

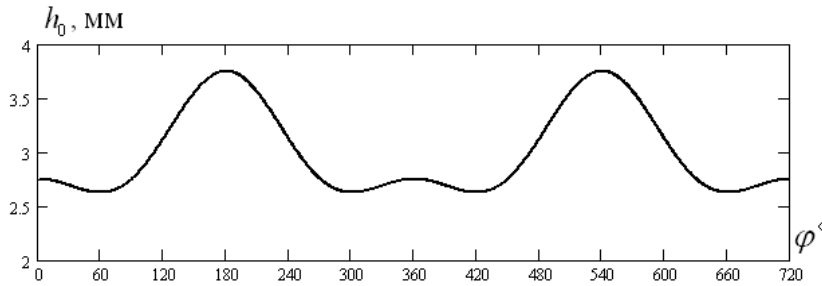


Рис. 3. Зависимость номинальной глубины резания от угла поворота:  $R = 30$  мм,  $e_x = 0,5$  мм,  $\Delta_K = 0,5$  мм,  $\alpha = 0$

содержащую только косинусы.

Приведем для примера график изменения номинальной глубины резания  $h_0(\varphi = vt)$ , показанного на рис. 3. Эта функция имеет две гармоники. Очевидно, что и сила резания будем изменяться по подобной зависимости.

Итак, используя подстановку (18), перепишем уравнение (16) в виде

$$m\ddot{y} + \left( c + A_0 + \sum_{n=1}^2 \text{sign}(a_n) A_n \cos(nvt - \delta_n) \right) y = 0, \quad (21)$$

где  $A_0$  - среднеинтегральное значение переменной части (18),  $A_n$  - полная амплитуда  $n$ -й гармоники;  $a_n$  - амплитуда  $n$ -й косинусной гармоники;  $\delta_n$  - начальная фаза:

$$\delta_n = \arctg(b_n / a_n), \quad (22)$$

где  $b_n$  - амплитуда  $n$ -й синусной гармоники, а функция  $\text{sign}(a_n)$  учитывает, что

$$a \cos x + b \sin x = \text{sign}(a) \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \delta)$$

при обозначении (22).

Уравнение (21) преобразуется к виду

$$\ddot{y} + \omega'^2 (1 + \bar{h} \Theta(t)) y = 0, \quad (23)$$

где обозначено

$$\omega'^2 = \frac{c + A_0}{m}, \quad (24)$$

$$\bar{h} = \frac{A_1}{(c + A_0)}, \quad (25)$$

$$\Theta(t) = \sum_{n=1}^2 \text{sign}(a_n) \frac{A_n}{A_1} \cos(nvt - \delta_n). \quad (26)$$

По физическому смыслу  $\omega'$  является частотой колебаний в первом приближении (подразумевая под нулевым  $\omega = \sqrt{c/m}$ ), т.к. содержит «динамическую жесткость»  $A_0$ , которая здесь имеет среднеинтегральный смысл. Величина  $\bar{h}$  является параметром, влияющим на глубину модуляции  $\omega'^2 \bar{h}$  и определяющим ширину зоны неустойчивости. Функция  $\Theta(t)$  есть по сути гармоническое разложение для  $\Theta_1(t) + \Theta_2(t)$ .

Полученное уравнение (23) является уравнением Хилла, и его решения при определенных сочетаниях параметров могут быть асимптотически неустойчивыми при  $t \rightarrow \infty$ . Это явление известно в динамике под названием параметрического резонанса и

характерно для систем с переменными параметрами, в данном случае – с переменной «жесткостью». Для системы (23) параметрический резонанс наступает при отношении частот

$$\Lambda = \frac{\omega'}{\nu} = \frac{i}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

когда амплитуда колебаний растет неограниченно. В реальной системе этот процесс, естественно, ограничивается физическими условиями; к тому же сама линейаризация с ростом амплитуды в какой-то момент времени становится некорректной. Но поскольку задачей является *обнаружение* резонанса, то использование однородного уравнения (16) допустимо, считая формально амплитуды колебаний еще достаточно малыми, так что линейаризация (11) правомерна.

Резонансы при  $\Lambda = 1, 2, 3 \dots$  называются субгармоническими, при остальных значениях в (27) – комбинационными, причем параметрический резонанс на частоте  $\omega' = \nu/2$  носит название демумльтипликационного резонанса, или супергармонического.

Для обнаружения параметрического резонанса воспользуемся теорией Флоке – Ляпунова дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [7, 8]. Обозначим через  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  два линейно независимых частных решения (23) и пусть при  $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} y_1(0) = 1, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 1, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

что образует фундаментальную систему решений. Пусть  $T$  – период функции  $I(t)$ . Тогда решениями (23) будут также  $y_1(t+T)$  и  $y_2(t+T)$ .

Введем в рассмотрение матрицы

$$\Psi = \begin{pmatrix} y_1(T) & \dot{y}_1(T) \\ y_2(T) & \dot{y}_2(T) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим решение  $C_1 y_1(T) + C_2 y_2(T)$ , удовлетворяющее для некоторого  $\lambda$  условию

$$\Psi C = \lambda C.$$

Нетривиальное решение  $(C_1, C_2)$  этого уравнения существует, если

$$\det(\Psi - \lambda E) = 0,$$

где  $E$  – единичная матрица, что приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - [y_1(T) + \dot{y}_2(T)]\lambda + [y_1(T)\dot{y}_2(T) - \dot{y}_1(T)y_2(T)] = 0, \quad (26)$$

где  $y_1(T)\dot{y}_2(T) - \dot{y}_1(T)y_2(T)$  есть не что иное, как вронскиан, в силу (28) равный единице, и, следовательно, уравнение (26) принимает вид

$$\lambda^2 - [y_1(T) + \dot{y}_2(T)]\lambda + 1 = 0. \quad (30)$$

Значением собственных чисел (30) и определяется характер устойчивости движения. Корни будут различными, комплексно-сопряженными, по абсолютной величине меньше 1, если  $|y_1(T) + \dot{y}_2(T)| < 2$  (и тогда решение устойчиво), и действительными различными, если  $|y_1(T) + \dot{y}_2(T)| > 2$ , когда одно из слагаемых общего интеграла растет неограниченно и решение уравнения (23) неустойчиво.

Именно функциональное уравнение

$$|y_1(T) + \dot{y}_2(T)| = 2 \quad (31)$$

является условием наступления параметрического резонанса.

Теоретически резонансов может быть бесконечное множество, однако с увеличением отношения частот (27) ширина резонансных областей, как правило, убывает, и наибольшую опасность представляют резонансы при небольших значениях  $L$ .

Необходимо заметить, что в уравнении (23) невозможно изменение какого-то *только одного* из входящих в него параметров с сохранением физического смысла, т.к. оно влечет за собой изменение и всех связанных с ним величин. Например, при фиксированной величине  $\bar{h}$  изменение отношения частот  $\Lambda$  означает либо изменение частоты  $\omega'$ , либо частоты  $\nu$ . Но это сразу же изменяет и саму величину  $\bar{h}$ , в выражение (25) которой входят величины, определяющие собственную частоту ( $c, A_0$ ), и величины зависящие от вынуждающей частоты ( $A_0, A_1$ ). Последнее связано с тем, что  $A_0, A_1$  зависят от центробежной силы, которая, в свою очередь, зависит от  $\nu$ .

Чтобы избежать подобных сложностей при построении областей резонансов, нами формально принято для примера, что  $\nu = 100$  рад/с, однозначно фиксируя, таким образом, периодический коэффициент (26) по фазе и коэффициенты разложения Фурье, считая лишь, что при переменности отношения частот (27) изменение  $\nu$  изменяет только частоту периодического коэффициента (26). В рамках сделанного формального

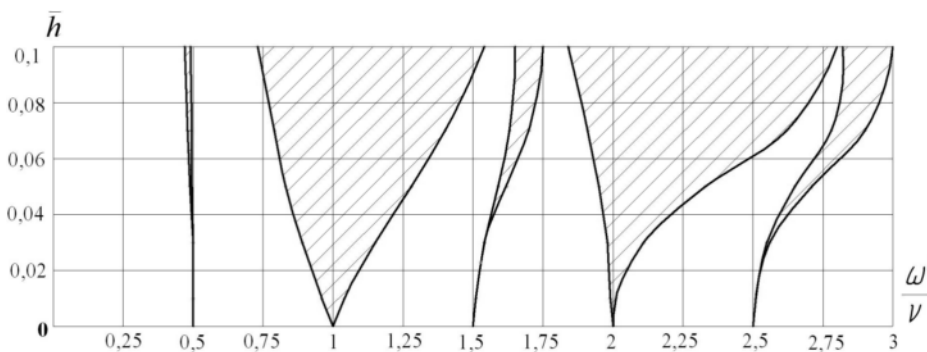


Рис. 4. Области параметрического резонанса для уравнения Хилла (1.115):  $\bar{h}_0 = 3$  мм,  $c = 5 \cdot 10^6$  Н/м,  $n = 0,9$ ,  $m = 10$  кг,  $R = 30$  мм,  $e_x = 0,5$  мм,  $\Delta_K = 0,5$  мм,  $\alpha = 0$

приема получены результаты, изображенные на рис. 4. Обращают на себя внимание узкие зоны комбинационных резонансов и широкие – субгармонических. Такой результат объясняется, по-видимому, тем, что при заданных параметрах в разложении периодического коэффициента (26) доминирует вторая гармоника:  $A_1 = 5 \cdot 10^3$  Н/м,  $A_2 = 47 \cdot 10^3$  Н/м. Это приводит к тому, что наиболее широкие зоны параметрического резонанса наблюдаются при

$$\frac{\omega'}{2\nu} = \frac{i}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

что как раз соответствует субгармоническим резонансам.

Заметим, что величина  $\bar{h}$  может быть как весьма малой при большой статической жесткости и малой амплитуде периодического коэффициента (порядка  $10^{-4}$ ), так и весьма большой в противном случае, что влияет на ширину резонансных областей.

#### Выводы.

На примере анализа одномассовой консервативной колебательной системы при точении получены явные выражения, позволяющие учитывать влияние реальной формы заготовки на динамическую устойчивость. Установлены следующие результаты:



1. При периодическом изменении глубины резания по причине геометрических погрешностей (эллиптичности и эксцентриситета сечения) и центробежной силы возможен параметрический резонанс, поскольку система становится физически подобной системе с переменной жесткостью.

2. При вращении заготовки с частотой  $\nu$  номинальная глубина резания и, следовательно, «жесткость» изменяются на частотах  $\nu$  и  $2\nu$ , причем первая гармоника соответствует эксцентриситету сечения, а вторая – эллиптичности.

3. Соотношение между «весом» этих гармоник в функции переменной «жесткости» определяет ширину областей комбинационных и субгармонических резонансов, так что, например, при доминировании частоты  $2\nu$ , т.е. эллиптичности, наиболее опасны субгармонические резонансы.

**Список литературы:** 1. Копелев Ю.Ф. Параметрические колебания станков / Ю.Ф. Копелев // Металлорежущие станки : респ. межвед. науч.-техн. сб. - К., 1984. - Вып. 12. - С. 3 – 8. 2. Копелев Ю.Ф. Параметрические колебания станков при резании: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.03.01 / ЭНИМС; Ю.Ф. Копелев. – М., 1985. – 32 с. 3. Митина Т.В. Минимизация параметрических колебаний при резании на основе управления скоростью движения подачи. Дис. ... канд. техн. наук: 05.13.06. - Москва, 2005. – 129 с. 4. Балакин С.В. Динамическая устойчивость стебля ружейного сверла с подвижной промежуточной опорой / С.В. Балакин, А.М. Гуськов, Г.Я. Пановко // Вестник научно-технического развития. №11 (15), 2008. – С. 36 – 39. 5. Татьяначенко А.Г. О динамической устойчивости осевого инструмента / А.Г. Татьяначенко, З.С. Сергеечев // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Машинобудування і машинознавство. Вип. 6 (154). – Донецьк: ДонНТУ. – 2009. – С. 130 – 136. 6. Справочник технолога-машиностроителя. В 2-х т. Т.2 / Под ред. А.Г. Косиловой и Р.К. Мещерякова. – М.: Машиностроение, 1986. – 496 с. 7. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. - М: ИЛ, 1958. - 475 с. 8. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

#### **PARAMETRIC RESONANCE IN TURNING**

*Chernyshev E.A., Pashinin A.V. (DonNTU, Donetsk, Ukraine)*

**Abstract:** *The paper presents theoretical analysis of factors caused parametric resonance in turning on the example of the one-mass conservative oscillating system. It have been got the obvious expressions that take into account influence of the workpiece real shape on dynamic stability. The areas of instability are received.*

**Keywords:** *ellipticity, eccentricity, depth of cut, rigidity, frequency, parametric resonance.*

#### **ПАРАМЕТРИЧНИЙ РЕЗОНАНС ПРИ ТОЧІННІ**

*Чернишев Є.О., Паши́нін А.В. (ДонНТУ, м. Донецьк, Україна)*

**Анотація:** *На прикладі одномасової консервативної коливальної системи виконано теоретичний аналіз чинників, що викликають явище параметричного резонансу при точінні. Отримані явні вирази, що дозволяють враховувати вплив реальної форми заготовки на динамічну стабільність. Визначені зони несталості.*

**Ключові слова:** *еліптичність, ексцентриситет, глибина різання, жорсткість, частота, параметричний резонанс.*

Надійшла до редколегії 10.01.2011.