Скідан І. А., Шепелєв В. В. Побудова координатної сітки боне на сфері. Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - Мелітополь: ТДАТА, 2003. . - Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Т. 22. – С. 50-56.

УДК 515.2

ПОБУДОВА КООРДИНАТНОЇ СІТКИ БОНЕ НА СФЕРІ

Скідан І. А., д. т. н.
Шепелєв В. В.
Донецький національний технічний університет
Тел. (062)338-48-85

Анотація – Пропонується конструктивно-аналітичний спосіб побудови координатної сітки Боне на сфері у двох нетривіальних випадках, коли вона не збігається з географічною сіткою.

***Ключові слова* – координатна сітка, полюс, ортогональність, частинні похідні, поляра.**

Постановка проблеми. Сітка Боне на сфері відіграє основну роль у побудові поверхонь з двома сім'ями плоских ліній кривини.

Аналіз останніх досліджень. Сітка Боне [1] на сфері утворюється із двох сімей ортогональних кіл. Кожна з цих сімей розташована у пучку площин. Осі пучків є взаємними полярами відносно сфери [2]. Взаємні поляри перпендикулярні одна одній. Їхній спільний перпендикуляр проходить через центр сфери O і перетинає їх у точках P та Q таким чином, що

$$OP*OQ=R^2. \tag{1}$$

Постановка завдання. Ортогональність сітки Боне та її складання з двох сімей кіл забезпечують застосовність віднесення поверхні сфери до координатної сітки Боне у розв'язанні задач гравірування на поверхні сфери.

Основна частина. Конструктивним визначником сітки Боне на сфері є два кола на її поверхні. Існують три різновида сіток Боне на сфері:

1) два кола мають спільну дотичну. Віссю площин інциденції однієї сім'ї кіл є ця дотична, іншої – пряма, перпендикулярна першій осі, і дотична до сфери;
2) два кола на сфері розташовані у площинах, що перетинаються. Віссю площин інциденції однієї сім'ї кіл є лінія перетину площин, іншої – пряма, що проходить через полюси цих площин;

3) два кола на сфері розташовані у паралельних площинах. Одна сім'я кіл збігається з сім'єю паралелей, інша – з сім'єю меридіанів. Вісь площин інциденції першої сім'ї є невласна пряма, вісь іншої – пряма перпендикулярна площинам інциденції поданних кіл, що проходить через центр сфери.

Визначимо параметризації сфери за умов збігання координатної сітки з сіткою Боне для перших двох наведених випадків. Третій випадок тривіальний: сітка Боне збігається з сіткою географічних координат.

1. Спільною дотичною двох кіл, що визначають сітку Боне, є вісь *OX*.

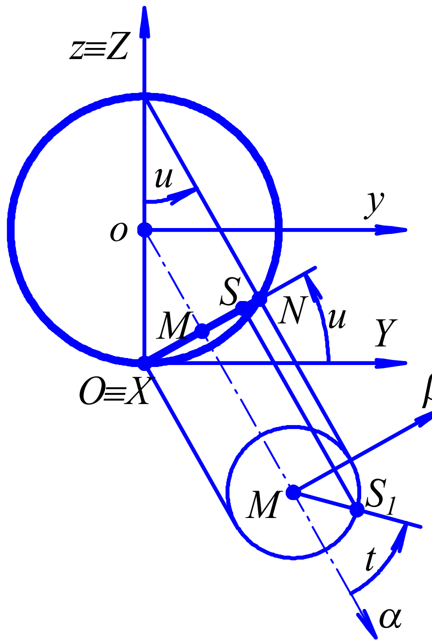

Рис. 1

На рис. 1 показано лише одне із поданих кіл, проекцію якого на площину *YOZ* є відрізок *ON=2r*. Нехай *u* - параметр пучка площин інциденції першої сім'ї сітки Боне. Функція залежності радіуса кола цієї сім'ї від параметра *u*

$$r = R\sin u. \tag{2}$$

Координати центра *M* цього кола в системі *XOYZ*:

$$X_M = 0, Y_M = R\sin u\cos u, Z_M = R\sin^2 u.$$

Другим параметром призначимо кут *t* в площині кола *XON*, що вимірюється від напрямку *α(OX)* до радіуса поточної точки S_1 на колі *u=const* проти руху стрілки годинника.

В системі *xoyz* координати точок сфери в параметрах *R, u, t* будуть

$$x = X_M + \alpha_S, y = Y_M + \beta_S\cos u, z = Z_M + \beta_S\sin u - R.$$

Оскільки $\alpha_S = R\sin u\cos t, \beta_S = R\sin u\sin t$, параметричні рівняння сфери

$$x = R\sin u\cos t, y = R\sin u\cos u(1+\sin t), z = R\sin^2 u(1+\sin t) - R. \quad (3)$$

Знайдемо вирази частинних похідних функцій (3) та коефіцієнтів E та F першої квадратичної форми сфери

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -R\sin u\sin t, \frac{\partial y}{\partial t} = R\sin u\cos u\cos t, \frac{\partial z}{\partial t} = R\sin^2 u\cos t,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = R\cos u\cos t, \frac{\partial y}{\partial u} = R\left(\cos^2 u - \sin^2 u\right)\left(1+\sin t\right), \frac{\partial z}{\partial u} = 2R\sin u\cos u\left(1+\sin t\right),$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = R^2\sin^2 u,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u} = R^2\sin u\cos u\cos t.$$

Оскільки $F \neq 0$, координатна сітка $t = const, u = const$ не ортогональна. Для віднесення сфери до ортогональної сітки Боне необхідно координатну сім'ю *u=const* зберегти та знайти другу сім'ю, ортогональну сім'ї кіл *u=const*. Для цього необхідно розв'язати диференціальне рівняння

$$Edt + Fdu = 0. \quad (4)$$

Підстановка виразів E та F до рівняння (4) після скорочень та перетворень дає

$$\frac{dt}{\cos t} + ctgudu = 0. \quad (5)$$

Розв'язком рівняння (5) буде (див. [3], с. 112, 325 і с. 117,418)

$$\ln tg\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \ln\sin u = \ln v, \quad (6)$$

де $\ln v$ - стала інтегрування.

Розв'яжемо (6) відносно $\frac{t}{2}$

$$\frac{t}{2} = arctg\frac{v}{\sin u} - \frac{\pi}{4}. \quad (7)$$

Оскільки для зміни змінної t на змінну v у параметричних рівняннях (3) нам знадобляться $\cos t$ та $\sin t$, скористуємося наступними формулами тригонометрії

$$\sin t = \sin 2\frac{t}{2} = \frac{2tg\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}, \cos t = \cos\frac{2t}{2} = \frac{1-tg^2\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}, tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}.$$

З останньої формули та виразу (7) випливає

$$tg\frac{t}{2} = tg\left(arctg\frac{v}{\sin u} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{v}{\sin u} - 1}{1 + \frac{v}{\sin u}} = \frac{v - \sin u}{v + \sin u}.$$

Підстановка до перших двох формул дає

$$\sin t = \frac{v^2 - \sin^2 u}{v^2 + \sin^2 u}, \cos t = \frac{2v\sin u}{v^2 + \sin^2 u}, 1 + \sin t = \frac{2v^2}{v^2 + \sin^2 u}.$$

Виконаємо заміну змінної t на змінну v у параметричних рівняннях сфери (3). Отримаємо

$$x = \frac{2Rv\sin^2 u}{v^2 + \sin^2 u}, y = \frac{2Rv^2 \sin u \cos u}{v^2 + \sin^2 u}, z = \frac{2Rv^2 \sin^2 u}{v^2 + \sin^2 u} - R. \qquad (8)$$

Впевнимось, що координатна сітка *u=const,v=const* є сіткою Боне, тобто координатні лінії *u=const,v=const* – кола. Щоб довести це положення, повернемось до первісної системи віднесення, коли початок координат був розташований у південному полюсі сфери. При цьому рівняння сфери (8) зміниться тільки тим, що у виразі Z зникне другий доданок. З урахуванням цієї зміни візьмемо відношення $\frac{Z}{X} = v, \frac{Z}{Y} = tgu.$ Вони виражають пучки площин з осями OY та OX Площини цих пучків перетинають сферу по колах. Втім, другий з пучків було призначено вже при параметризації сфери.

2. Два кола, що подають сітку Боне на сфері, перетинаються. На рис. 2 показано одно з цих кіл, що проекціюється у відрізок *MN*. Нехай інше коло також розташовано у площині, перпендикулярній zoy, і перетинає перше коло в точках P.

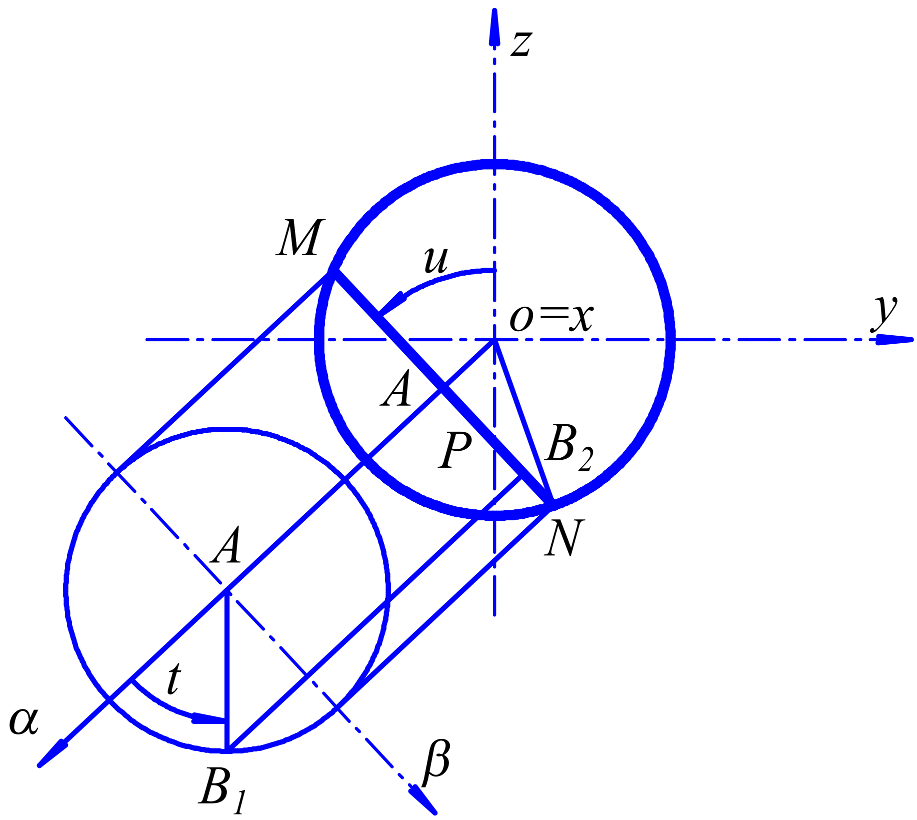

Рис. 2

Позначимо $OP = e, ON = R, AN = r$. Параметризуємо поверхню сфери за допомогою двох кутів u і t

$$OA = OP\sin u = e\sin u, r = \sqrt{R^2 - e^2\sin^2 u}, y_A = -e\sin u\cos u, z_A = -e\sin^2 u.$$

Визначимо координати поточної точки B в системі $\alpha A\beta$

$$\alpha_B = AN\cos t = \cos t\sqrt{R^2 - e^2\sin^2 u}, \beta_B = \sin t\sqrt{R^2 - e^2\sin^2 u}.$$

Оскільки точку B можна вважати поточною для поверхні сфери у цілому, її координати у системі $xoyz$ слід визнати за параметричні рівняння сфери

$$x_B = \alpha_B, y_B = y_A + \beta_B\sin u, z_B = z_A - \beta_B\cos u.$$

Після підстановок отримаємо параметричні рівняння сфери у вигляді

$$x = \cos t\sqrt{R^2 - e^2\sin^2 u}, y = -e\sin u\cos u + \sin u\sin t\sqrt{R^2 - e^2\sin^2 u}, \quad (9)$$
$$z = -e\sin^2 u - \cos u\sin t\sqrt{R^2 - e^2\sin^2 u}.$$

Обчислимо частинні похідні функцій (9) та коефіцієнти E та F першої квадратичної форми поверхні сфери

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{e^2\sin 2u\cos t}{2\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-e\cos 2u-\frac{e^2\sin 2u\sin u\sin t}{2\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}}+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\cos u\sin t,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=-e\sin 2u+\frac{e^2\sin 2u\cos u\sin t}{2\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}}+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\sin u\sin t,$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}=-\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\sin t,\frac{\partial y}{\partial t}=\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\sin u\cos t,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=-\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\cos u\cos t,$$

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=R^2-e^2\sin^2 u,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial t}=e\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\sin u\cos t.$$

Оскільки $F\neq 0$, координатна сітка $t=const, u=const$ не ортогональна. Щоб перейти до ортогональної сітки, знайдемо сім'ю ліній на сфері, ортогональну сім'ї *u=const*. Диференціальне рівняння шуканої сім'ї

$$Edt+Fdu=0,$$

або

$$\left(R^2-e^2\sin^2 u\right)dt+e\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\sin u\cos t du=0.$$

Після перетворень останнє рівняння набуває вигляду

$$\frac{dt}{\cos t}+\frac{e\sin u}{\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}}du=0. \qquad (10)$$

Інтегрування першого доданка рівняння (10)

$$\int\frac{dt}{\cos t}=\ln tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C_1$$ (див. [3], с. 113, 325).

Щодо другого доданка, його інтегрування відбувається дещо складніше:

$$\int\frac{e\sin u}{\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}}du=e\int\frac{\sin u}{\sqrt{R^2-e^2+e^2\cos^2 u}}du$$

$$w=\cos u, dw=-\sin u du$$

$$e\int\frac{\sin u}{\sqrt{R^2-e^2+e^2\cos^2 u}}du=-e\int\frac{dw}{\sqrt{R^2-e^2+e^2w^2}}=-Arsh\frac{e\cos u}{\sqrt{R^2-e^2}}+C_2$$

(див. [3], с. 107, 241).

Виразимо зворотну гіперболічну функцію через логарифмічну, замінимо дві сталі інтегрування C_1 і C_2 одною $\ln v$ і підставимо результати інтегрування до (10). Отримаємо

$$\ln tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\ln\left(\frac{e\cos u+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}}{\sqrt{R^2-e^2}}\right)=\ln v,$$

звідки
$$\frac{t}{2}=arctg\frac{v\left(e\cos u+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\right)}{\sqrt{R^2-e^2}}-\frac{\pi}{4}.$$

Візьмемо тангенс від обох частин

$$tg\frac{t}{2}=tg\left[arctg\frac{v\left(e\cos u+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\right)}{\sqrt{R^2-e^2}}-\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$=\frac{\dfrac{v\left(e\cos u+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\right)}{\sqrt{R^2-e^2}}-1}{1+\dfrac{v\left(e\cos u+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\right)}{\sqrt{R^2-e^2}}}=\frac{v\left(e\cos u+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\right)-\sqrt{R^2-e^2}}{v\left(e\cos u+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\right)+\sqrt{R^2-e^2}}.$$

Оскільки для використання рівнянь (9) нам знадобляться $\sin t$ та $\cos t$, виразимо ці функції через тангенс половинного кута

$$\sin t=\frac{v^2\left(e\cos u+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\right)^2-\left(R^2-e^2\right)}{v^2\left(e\cos u+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\right)^2+\left(R^2-e^2\right)},$$
$$\cos t=\frac{2v\left(e\cos u+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\right)\sqrt{R^2-e^2}}{v^2\left(e\cos u+\sqrt{R^2-e^2\sin^2 u}\right)^2+\left(R^2-e^2\right)}. \tag{11}$$

Таким чином, параметричні рівняння (9) разом з (11) виражають сферу, віднесену до сітки Боне.

Висновки. Сітка Боне на сфері має застосування як в теоретичному плані – за її допомогою складають рівняння класу поверхонь з двома сім'ями плоских ліній кривини, так і в практичному – вона є основою для автоматичного виконання гравірувальних робіт на поверхні сфери.

Література
1. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия. М.: Госиздат физ-мат. лит-ры. 1963. – 540 с.
2. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Ч. II Стереометрия. М.:Учпедгиз. 1938. – 640 с.
3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: "Тойбнер", "Наука",1981.–718 с.

CONSTRUCTION OF BONNET'S COORDINATE LATTICE ON SOHERE

I. Skidan, V. Shepelev

Summary

Constructive and analytical methods of determination BON-NET'S coordinate lattice on sphere are proposed. Proposition may be applied for obtaining the equations of surfaces with two families plane lines of curvature.