

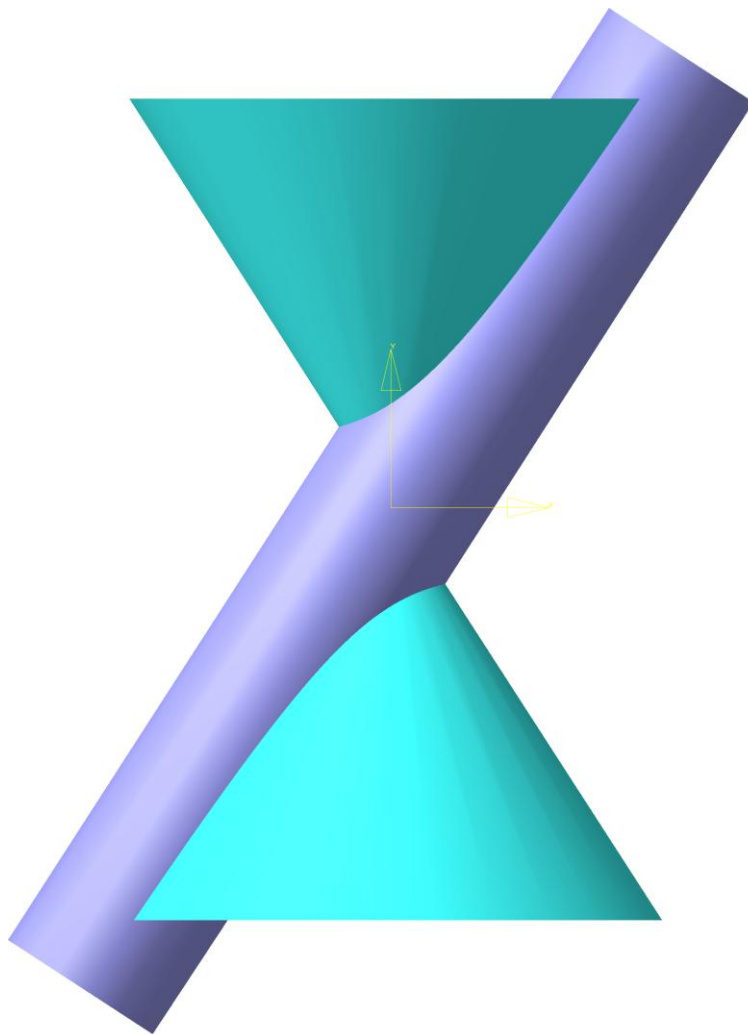
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Донецкий национальный технический университет

Червоненко А. П., Катькалова Е. А.

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ПРОЕКЦИЙ ЛИНИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С ОБЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ СИММЕТРИИ**

Учебное пособие



Донецк 2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Донецкий национальный технический университет

Червоненко А. П., Катькалова Е. А.

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ПРОЕКЦИЙ ЛИНИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С ОБЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ СИММЕТРИИ**

Учебное пособие

РАССМОТРЕНО
на заседании кафедры начертательной
геометрии и инженерной графики
Протокол № 10 от 18.05.2006 г.

У Т В Е Р Ж Д Е Н О
на заседании учебно – издательского
совета ДонНТУ
Протокол № 2 от 24.05.2006 г.

Донецк 2007

УДК 515

Червоненко А. П., Катькалова Е. А. Геометрические характеристики проекций линий пересечения поверхностей второго порядка с общей плоскостью симметрии: Учеб. пособие. ДонНТУ, Донецк: 2006. – 26 с.: ил.

В пособии исследованы особенности проекций линий пересечения поверхностей второго порядка, имеющих общую плоскость симметрии, на плоскость, параллельную этой плоскости симметрии. Предложены приемы построения центров, асимптот, фокусов и других элементов кривых второго порядка, в которые проецируются линии пересечения.

Пособие предназначено для преподавателей, аспирантов, студентов, изучающих начертательную геометрию по углубленной программе. Оно может быть использовано в научно – исследовательской и конструкторской работе студентами, аспирантами и конструкторами.

Составители:

А. П. Червоненко, ст. преп.
О. А. Катькалова, доц.

Рецензент:

Проф. кафедры начертательной
геометрии и инженерной
графики, доц., к. т. н.

А. Ф. Коломиец

Ответственный за выпуск:

И. А. Скидан, проф.

ВВЕДЕНИЕ

Кривые поверхности широко используются в технике, строительстве, архитектуре и других сферах деятельности человека. При проектировании объектов различных форм стараются использовать самые простые поверхности или их части, за исключением тех случаев, когда для обеспечения необходимых технических или эстетических характеристик объекта применяются порой очень сложные поверхности. В практике проектирования и производства наиболее широко используются поверхности вращения. В решении различных задач на взаимное пересечение поверхностей проектировщик, как правило, изображает поверхность в наиболее удобном для работы положении.

В подтверждение вышесказанного можно упомянуть широко используемые в технике строительстве и архитектуре пары пересекающихся поверхностей вращения с общей плоскостью симметрии. Для удобства решения задач такие поверхности, как правило, изображают на плоскости проекций, параллельной плоскости симметрии, поскольку порядок проекции линии пересечения поверхностей уменьшается вдвое. Так, пространственные кривые 4-го порядка изображаются плоскими кривыми 2-го порядка — эллипсами, гиперболами, параболом.

Однако, если конструктор не владеет достаточно глубокими знаниями в области начертательной геометрии, ошибки в его решениях вышеназванных задач неизбежны. Это очень хорошо прослеживается в учебном процессе вузов на опыте решения индивидуальных заданий студентами, изучающими начертательную геометрию.

В индивидуальных заданиях по начертательной геометрии часто используются простейшие кривые поверхности, — конусы, цилиндры, сферы, — в различных сочетаниях. Успех в решении таких задач может быть достигнут, если студент хотя бы в общих чертах знает. Каков должен быть результат решения.

Мы хотим обратить внимание еще раз на геометрический анализ проекций линий взаимного пересечения простых поверхностей вращения с общей плоскостью симметрии в различных сочетаниях. Который поможет студентам добиваться более точных результатов решения задач начертательной геометрии. Такой анализ был проведен Глазуновым Е.А. в 50-е годы прошлого столетия [1].

В нашей работе анализ расширен некоторыми новыми примерами. Обращаем особое внимание на методику построения элементов проекций линий пересечения поверхностей вращения с общей плоскостью симметрии. Оказалось, что знание такой методики позволяет по небольшой части линий пересечения увидеть особенности этой линии в целом и определить ее элементы.

Надеемся, что эта работа будет полезной для студентов, аспирантов и молодых преподавателей начертательной геометрии.

Две алгебраические поверхности второго порядка, имеющие общую плоскость симметрии, пересекаются по кривой четвертого порядка, которая проецируется на плоскость, параллельную этой общей плоскости симметрии, в виде кривой второго порядка, действительной или распавшейся [1, с. 35-69]. Для упрощения и уточнения построений проекций такой кривой желательно знать вид кривой и ее элементы.

Для нахождения линии пересечения в таких случаях могут быть применены сферы как поверхности-посредники.

При пересечении конической поверхности вращения со сферой, центр которой лежит на оси конуса, получается две окружности, которые будут проектироваться на плоскость проекций, параллельную оси конуса двумя параллельными отрезками. Эти отрезки перпендикулярны проекции оси конуса. Если опустить перпендикуляр из проекции центра сферы на образующую конуса, то получим точку, через которую пройдет прямая, параллельная выше полученным отрезкам, и на одинаковом расстоянии от них. Эта линия называется средней линией для полученных выше отрезков.

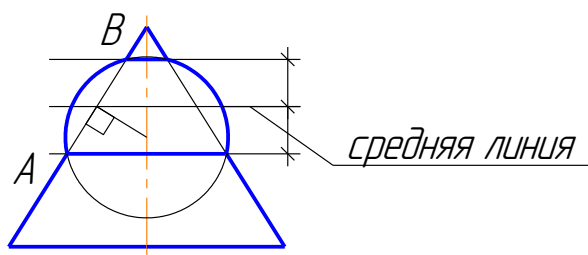


Рис. 1

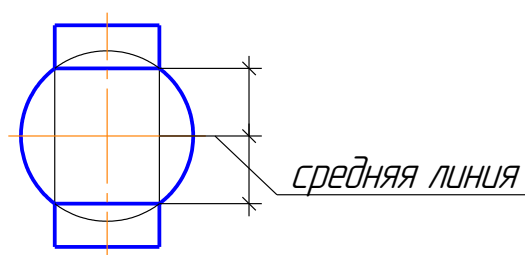


Рис. 2

Эта линия будет служить средней линией для всякой пары прямых, в которые проецируются окружности, полученные от пересечения этого конуса со сферой другого радиуса, при условии, что центр ее находится в той же точке на оси конуса.

Средние линии дают возможность построить для проекции линии пересечения поверхностей вращения второго порядка ось, если она проецируется параболой, и центр, если она проецируется эллипсом или гиперболой. Средняя линия при пересечении цилиндра вращения со сферой пройдет через центр сферы, перпендикулярно оси и образующим цилиндра.

Для параболоида вращения средней линией будет линия, проходящая через точку касания сферы (на проекции – окружность) к очерку параболоида вращения. Эта касательная сфера имеет центр в той же точке на оси параболоида, что и все остальные сферы.

Эта же средняя линия расположена на расстоянии параметра (p) очерковой параболы от проекции центра сфер к вершине параболы [1]. Средняя линия для однополостного гиперболоида вращения проходит через точку, полученную от пересечения перпендикуляра из центра применяемых сфер на асимптоту очерковой гиперболы [1].

Средняя линия проходит перпендикулярно оси очерковой гиперболы.

Для двуполостного гиперболоида вращения средняя линия будет про-

ходить через точку, полученную от пересечения перпендикуляра из центра применяемых сфер на асимптоту очерковой гиперболы. Средняя линия проходит перпендикулярно оси очерковой гиперболы [1].

Для растянутого эллипсоида с большой осью вращения, расположенной горизонтально и параллельно фронтальной плоскости проекций, средняя линия определяется следующим образом. Строится прямоугольный треугольник OFE , где катет OF равен расстоянию от центра очеркового эллипса до фокуса и совпадает по направлению с большой осью, катет FE равен малой полуоси очеркового эллипса и перпендикулярен к большой оси эллипса. Гипотенуза OE соединяет центр эллипса с концом катета E .

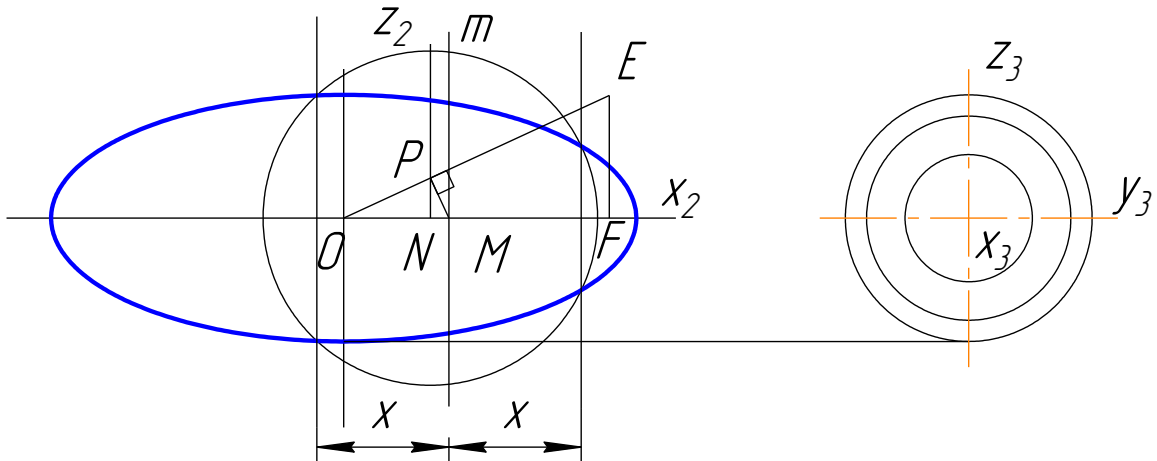


Рис.3

Из центра применяемых сфер проводится прямая, перпендикулярная к большой оси, до пересечения с гипотенузой OE . Из полученной точки проводится перпендикуляр к гипотенузе OE до пересечения его с большой осью в точке M . Прямая m , проходящая через точку M перпендикулярно к большой оси и является средней линией для всех применяемых концентрических сфер.

Для сжатого эллипсоида с малой осью вращения, расположенной горизонтально и параллельной фронтальной плоскости проекций, средняя линия определяется следующим образом. Строится прямоугольный треугольник OFE , где катет OF равен расстоянию от центра очеркового эллипса до фокуса и совпадает по направлению с большой осью, катет OE равен малой полуоси очеркового эллипса и перпендикулярен к большой оси эллипса. Гипотенуза FE соединяет фокус эллипса F с концом малой оси E .

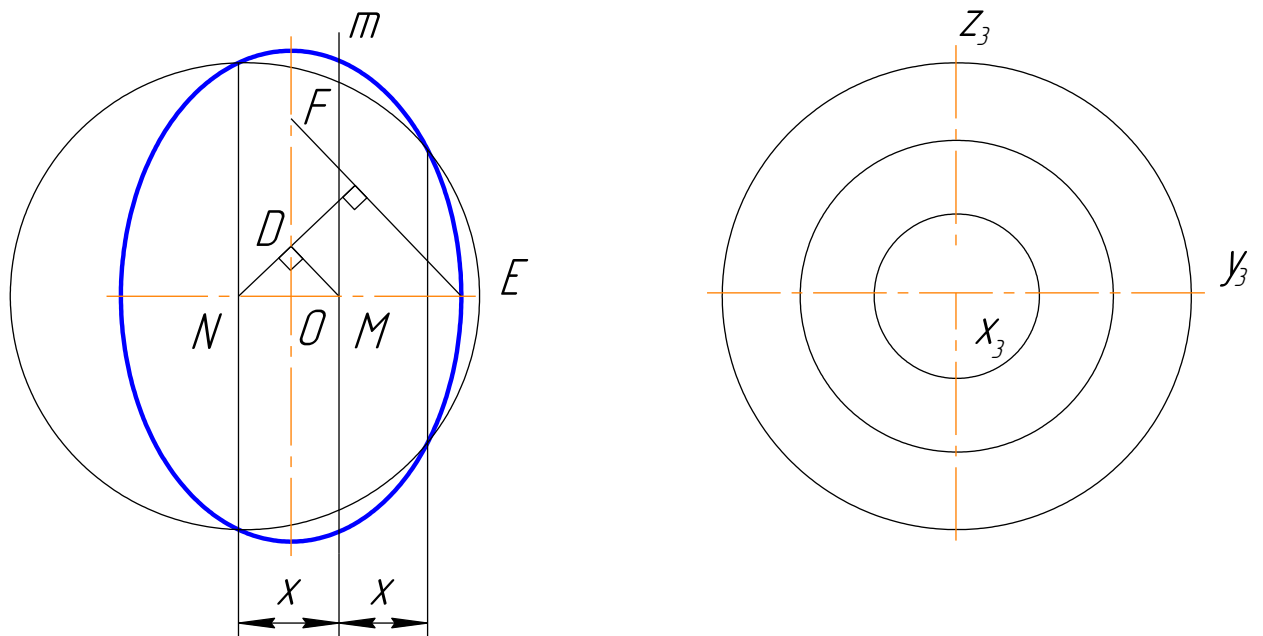


Рис. 4

Из центра применяемых сфер проводится прямая, перпендикулярная к гипотенузе FE. Из точки пересечения этого перпендикуляра с большой осью очеркового эллипса (т. D) проводится перпендикуляр до пересечения с малой осью эллипса (т. M). Прямая, проходящая через эту точку (M) и перпендикулярная к малой оси и является средней линией (m) для всех применяемых концентрических сфер.

При пересечении двух конусов вращения имеющих общую плоскость симметрии, параллельные оси и одинаковые углы при вершинах, линия пересечения изображается в виде эллипса, гиперболы, двойной прямой или окружности (при совпадении осей) и несобственной окружности. На общую плоскость симметрии линия пересечения проецируется в виде прямых линий

При пересечении двух конусов вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельные оси и разные углы при вершинах линия пересечения изображается в виде биквадратной кривой или двух окружностей (при совпадении осей). На общую плоскость симметрии эти кривые проецируются, соответственно, в виде параболы или двух прямых (Рис.6).

При пересечении конуса и цилиндра вращения, имеющих общую плоскость симметрии и параллельные оси, линия пересечения изобразится в виде биквадратной кривой или двух окружностей (при совпадении осей).

На общую плоскость симметрии линия пересечения проецируется соответственно в виде параболы или параллельных отрезков.

Линия пересечения двух поверхностей вращения второго порядка, имеющих общую плоскость симметрии и пересекающиеся оси, проецируется на эту плоскость [1]:

1. В виде *гиперболы* при пересечении между собой поверхностей вращения в любой комбинации: цилиндрических, конических, параболоидов, гиперболоидов и растянутых эллипсоидов. Два сжатых эллипсоида пересекаются между собой по кривой, которая также проецируется гиперболой. В

виде равносторонней гиперболы линия пересечения будет проецироваться при пересечении: двух цилиндров; двух параболоидов; цилиндра с параболоидом; двух конусов, если углы при вершинах у них равны; двух гиперболоидов, если углы при вершинах их асимптотических конусов равны; конуса и гиперболоида, если углы при вершинах конуса и асимптотического конуса гиперболоида равны; двух подобных эллипсоидов.

2. В виде *параболы* при пересечении сферы с поверхностями цилиндрической и конической, а также с поверхностями параболоида, гиперболоида и эллипсоида.

3. В виде *эллипса* при пересечении сжатого эллипсоида с поверхностями: цилиндрической, конической, параболоида, гиперболоида. А также с поверхностью растянутого эллипсоида.

Установлено [1], что направление асимптот гиперболы – проекции линии пересечения не меняется, если:

а) изменить диаметр цилиндрической поверхности, участвующей в пересечении, не меняя направления оси;

б) перемещать одну из пересекающихся поверхностей вдоль ее оси;

в) заменять поверхность параболоида соосной цилиндрической поверхностью;

г) заменять поверхность гиперболоида ее асимптотическим конусом.

В следующих двух разделах рассмотрим несколько примеров по построению проекций линии пересечения тел в виде гиперболы (1 раздел) и в виде параболы (2 раздел).

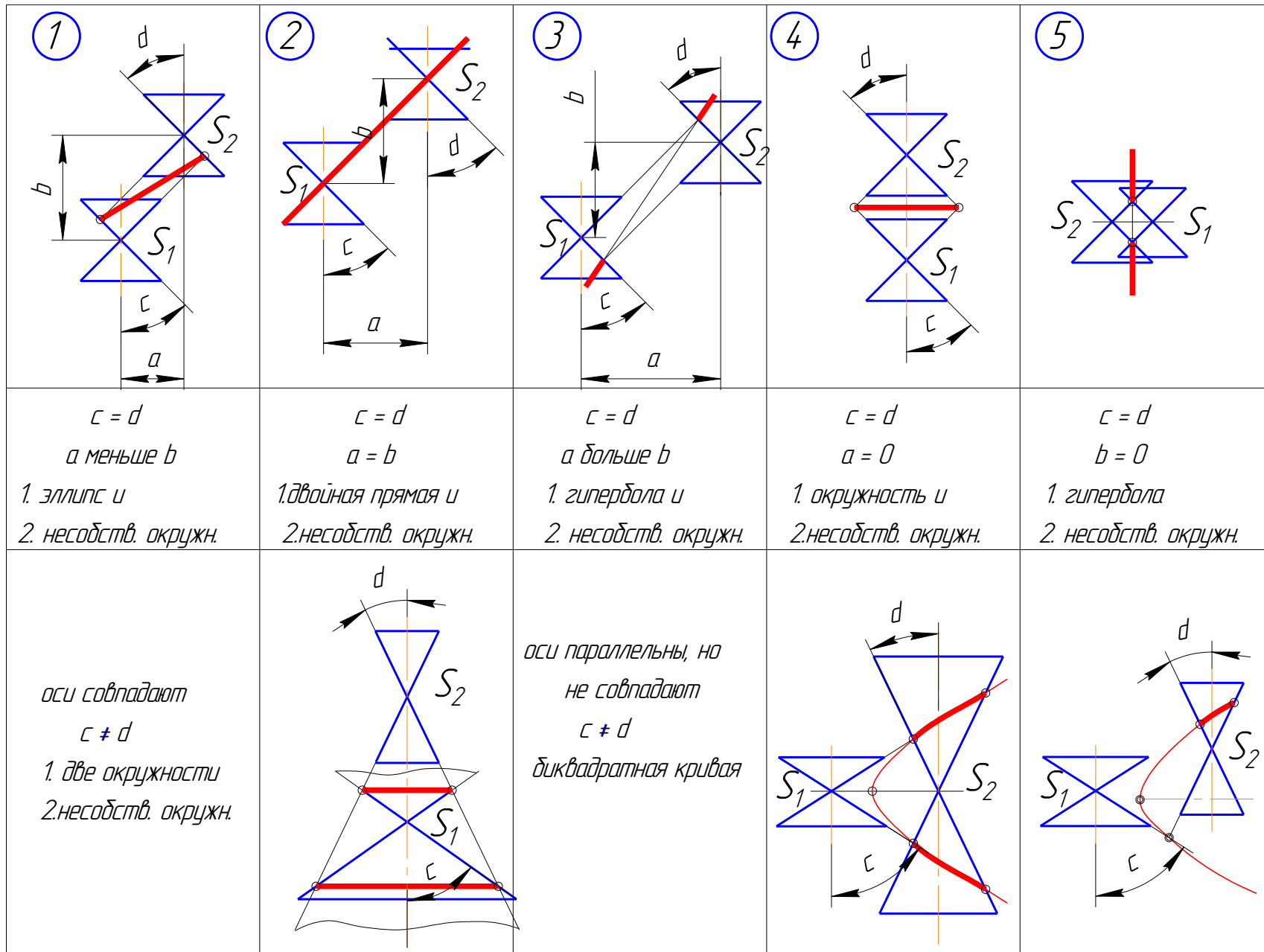


Рис.6

1. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИИ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ВИДЕ ПАРАБОЛЫ

На рисунке 7 показано построение линии пересечения двух цилиндров вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Оси цилиндров перпендикулярные.

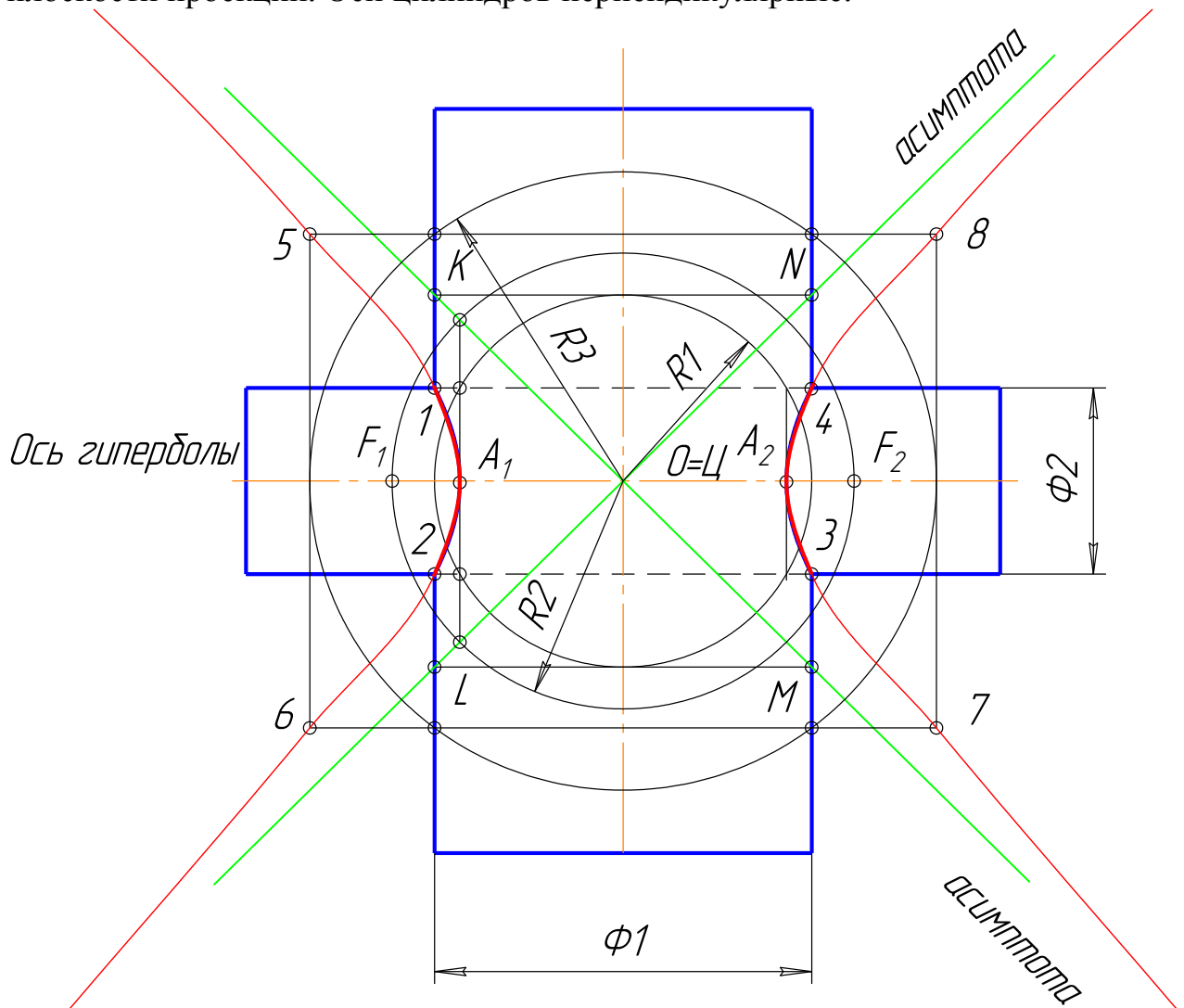


Рис.7 Построение линии пересечения двух цилиндров вращения с общей плоскостью симметрии, параллельной фронтальной плоскости проекций

Исходные точки 1, 2, 3, 4 как точки пересечения контурных образующих.. Оси цилиндров пересекаются в точке Ц. Она же – точка пересечения средних линий. Вписываем в большой цилиндр Φ_1 сферу радиуса R_1 и центром в т. Ц. Она пересекается с меньшим цилиндром по окружностям, которые проецируются в виде прямых, а с большим цилиндром – по окружности касания, совпадающей на проекции с осью меньшего цилиндра. Пересечение этих прямых на проекции дает вершины гиперболы A_1 и A_2 .

Увеличиваем диаметр меньшего цилиндра до размера касания его со сферой R_1 . Два цилиндра одинакового диаметра с пересекающимися осями пересе-

каются по двум эллипсам, которые проецируются в виде прямых – KM и LN . Это и есть асимптоты гиперболы, в которую проецируется линия пересечения двух цилиндров на плоскость симметрии. Центр гиперболы $t. O$ совпадает с точкой пересечения осей $t. Ц$. Фокусы гиперболы F_1 и F_2 находятся известным методом с помощью окружности R_2 . Дополнительные точки 5, 6, 7, 8 находятся с помощью произвольной сферы R_3 .

На рисунке 8 показано построение линии пересечения двух цилиндров вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Оси цилиндров не перпендикулярны.

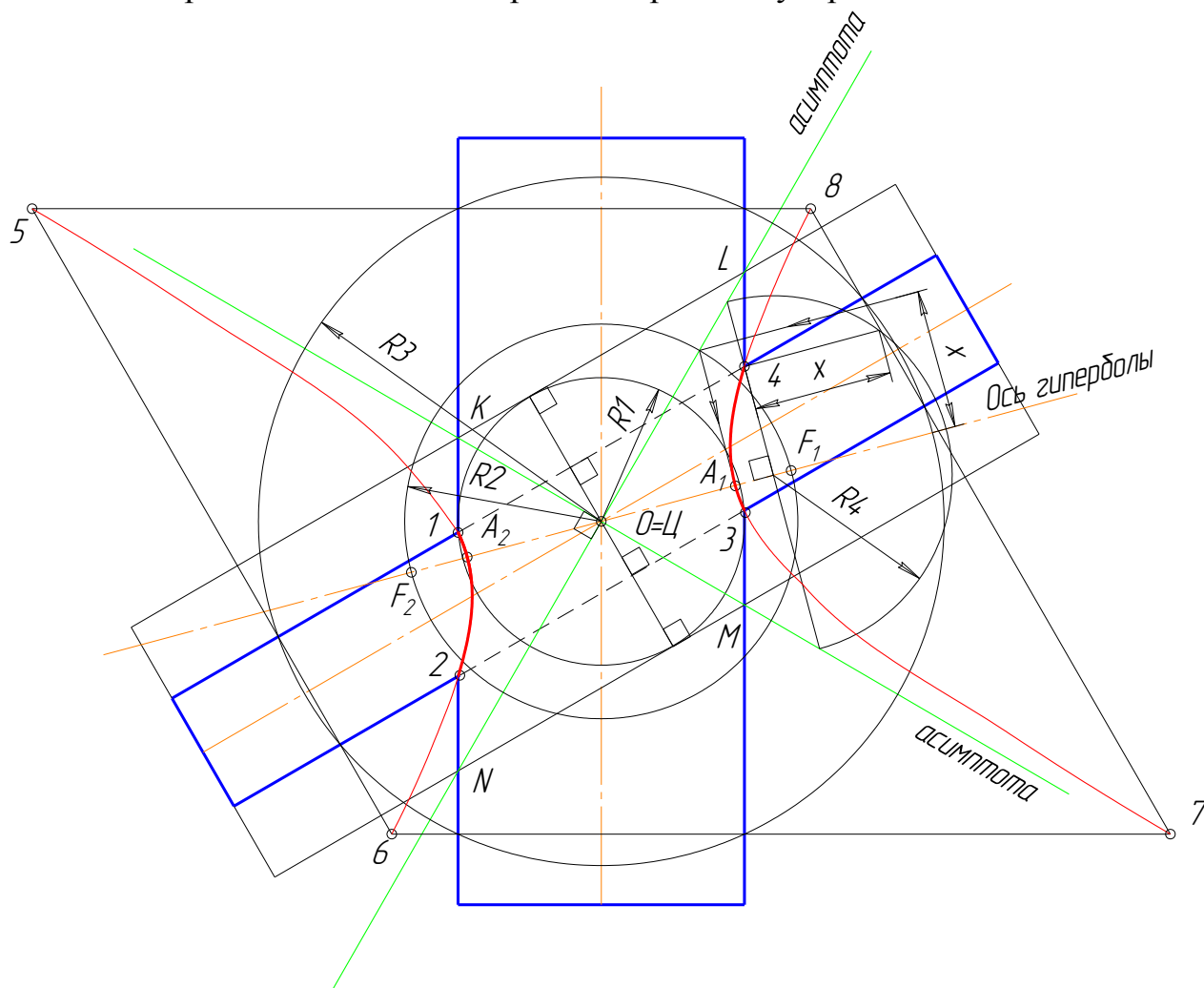


Рис. 8 Построение линии пересечения двух цилиндров вращения с общей плоскостью симметрии, параллельной фронтальной плоскости проекций. Оси цилиндров не перпендикулярны.

Исходные точки 1, 2, 3, 4 – как точки пересечения контурных образующих. Оси цилиндров пересекаются в $t. Ц$ – она же – точка пересечения средних линий. Вписываем в большой цилиндр Φ_1 сферу радиуса R_1 и центром в $t. Ц$. Увеличиваем диаметр меньшего цилиндра до размеров касания его со сферой R_1 . Два цилиндра одинакового диаметра с пересекающимися осями пересекаются по двум эллипсам, которые проецируются в виде прямых KM и NL . Это и есть асимптоты гиперболы, в которую проецируется линия пересечения двух

цилиндров на плоскости симметрии. Центр гиперболы т. О совпадает с точкой пересечения осей т. Ц. Строим ось гиперболы. Используя точку 4 и радиус R_4 находим вершину гиперболы т. A_1 и симметричную ей т. A_2 . Фокусы гиперболы F_1 и F_2 находятся известным методом с помощью окружности R_2 . Дополнительные точки 5, 6, 7, 8 находятся с помощью произвольной сферы R_3 .

На рисунке 9 показано построение линии пересечения конуса и цилиндра вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную

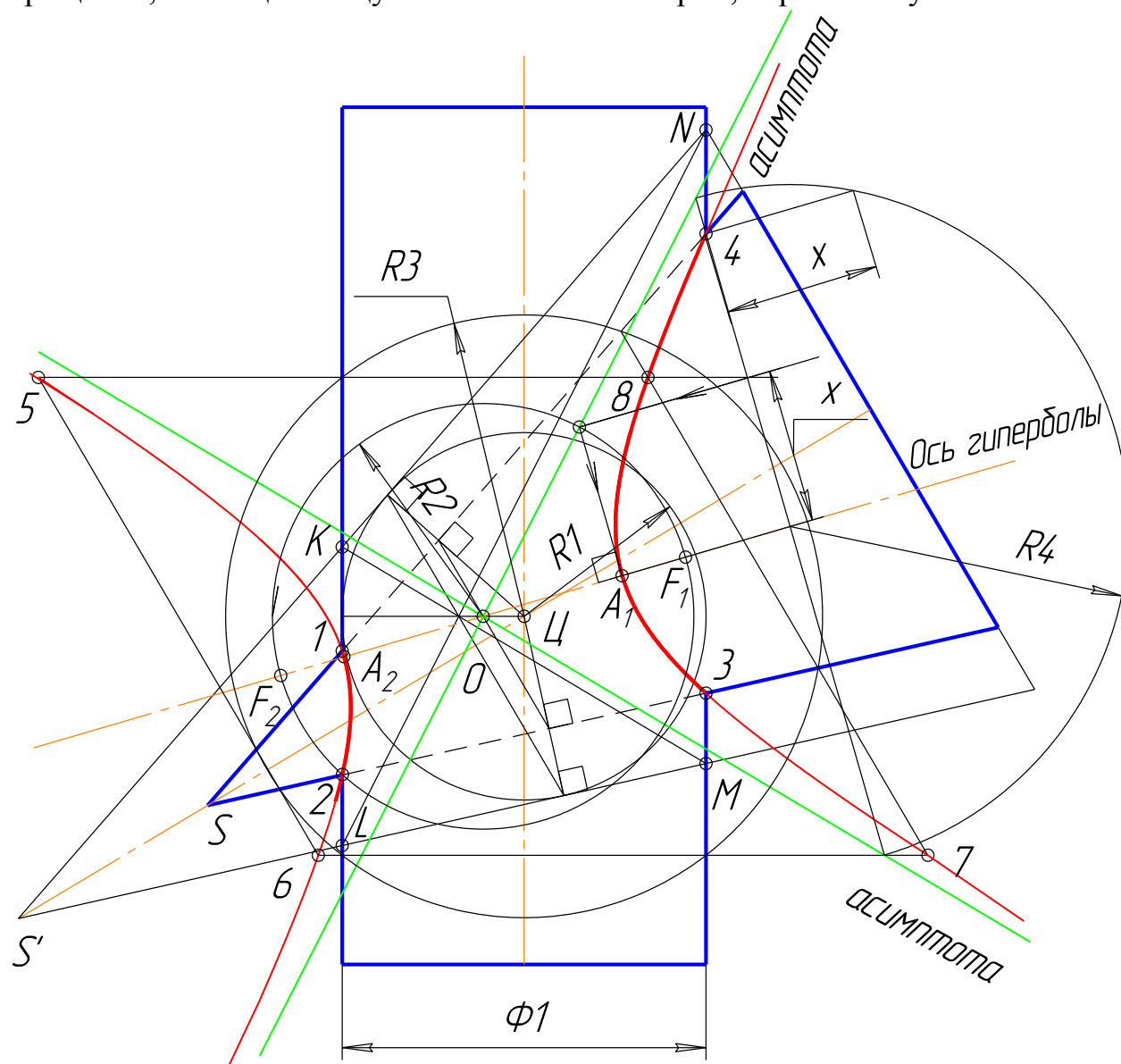


Рис. 9 Линия пересечения конуса и цилиндра вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций

фронтальной плоскости проекций. Оси их пересекаются не под прямым углом. Ось конуса наклонная фронтальная прямая. Исходные точки 1, 2, 3, 4 – как точки пересечения контурных образующих. Оси конуса и цилиндра пересекаются в т. Ц. Вписываем в цилиндр Φ_1 сферу радиуса R_1 и центром в т. Ц. Сдвигаем конус S вдоль его оси до положения S' , в котором он будет касательным к сфере R_1 . Конус S' и цилиндр Φ_1 пересекаются по эллипсам, которые проецируются в

Произвольная сфера радиуса R_2 (она проведена через точку 1) дает точки гиперболы 5,6,7. Используя точку 6 и радиус R_3 , находим вершину т. A_1 и симметричную ей т. A_2 . фокусы гиперболы F_1 и F_2 находим известным методом с помощью окружности R_4 .

На рис. 11 показано построение линии пересечения двух конусов вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Оси их пересекаются не под прямым углом. Исходные точки 1, 2, 3, 4 – как точки пересечения контурных образующих. Оси конусов пересекаются в т. Ц. Вписываем в вертикальный конус S_1 сферу радиуса R_1 с центром в т. Ц. Сдвигаем наклонный конус S_2 вдоль его оси до положения S'_2 , в котором он будет касательным к сфере R_1 . Конус S_1 и конус S'_2 пересекаются по плоским кривым эллипсу и гиперболе которые проецируются в виде прямых KL и MN . Эти прямые параллельны будущим асимптотам гиперболы, в которую проецируется линия пересечения данных поверхностей. По средним линиям конуса S_1 и конуса S_2 находим центр гиперболы т. O . Через нее проводим асимптоты гиперболы параллельно прямым KL и NM . Строим ось гиперболы. С помощью т. 4 и радиуса R_2 находим вершину A_1 и симметричную ей A_2 . Фокусы гиперболы F_1 и F_2 находятся известным методом с помощью окружности R_3 . Дополнительные точки можно найти с помощью метода сфер.

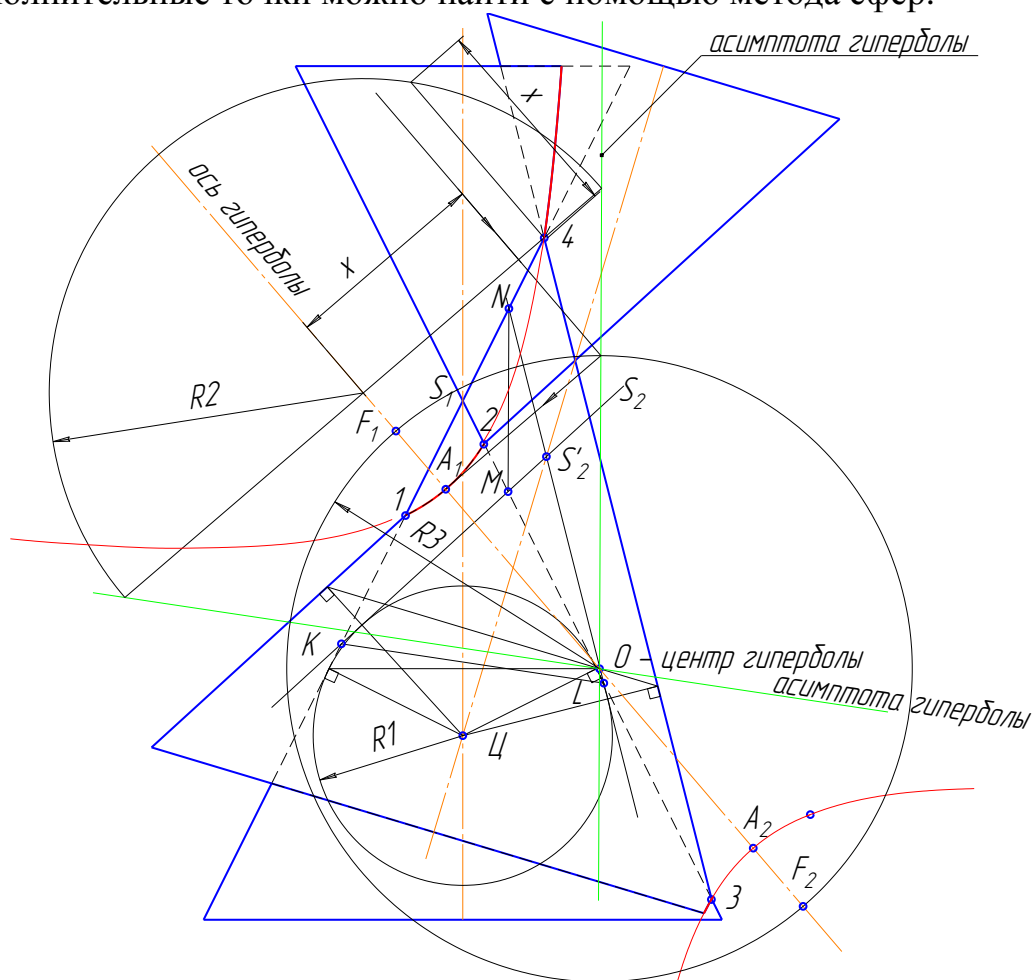


Рис. 11 Линия пересечения двух конусов вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций

На рисунке 12 показано построение линии пересечения конуса вращения S_1 и цилиндра вращения Φ_1 , имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Оси их пересекаются под острым углом. Исходные точки 1, 2, 3, 4 – как точки пересечения контурных образующих. Оси поверхностей пересекаются в т. Ц. Вписываем сферу радиуса R_1 в цилиндр с центром в т. Ц. Сдвигаем конус S вдоль его оси до положения S'_1 , в котором он будет касательным к сфере R_1 . Конус S'_1 и цилиндр Φ_1 пересекаются, как описанные вокруг одной и той же сферы, по плоским кривым второго порядка, которые проецируются в виде прямых KL и MN . Эти прямые параллельны будущим асимптотам гиперболы, в которую проецируется линия пересечения данных поверхностей. По средним линиям цилиндра Φ_1 и конуса S_1 находим центр гиперболы т. О. Через нее проводим асимптоты гиперболы параллельно прямым KL и NM . Строим ось гиперболы. С помощью

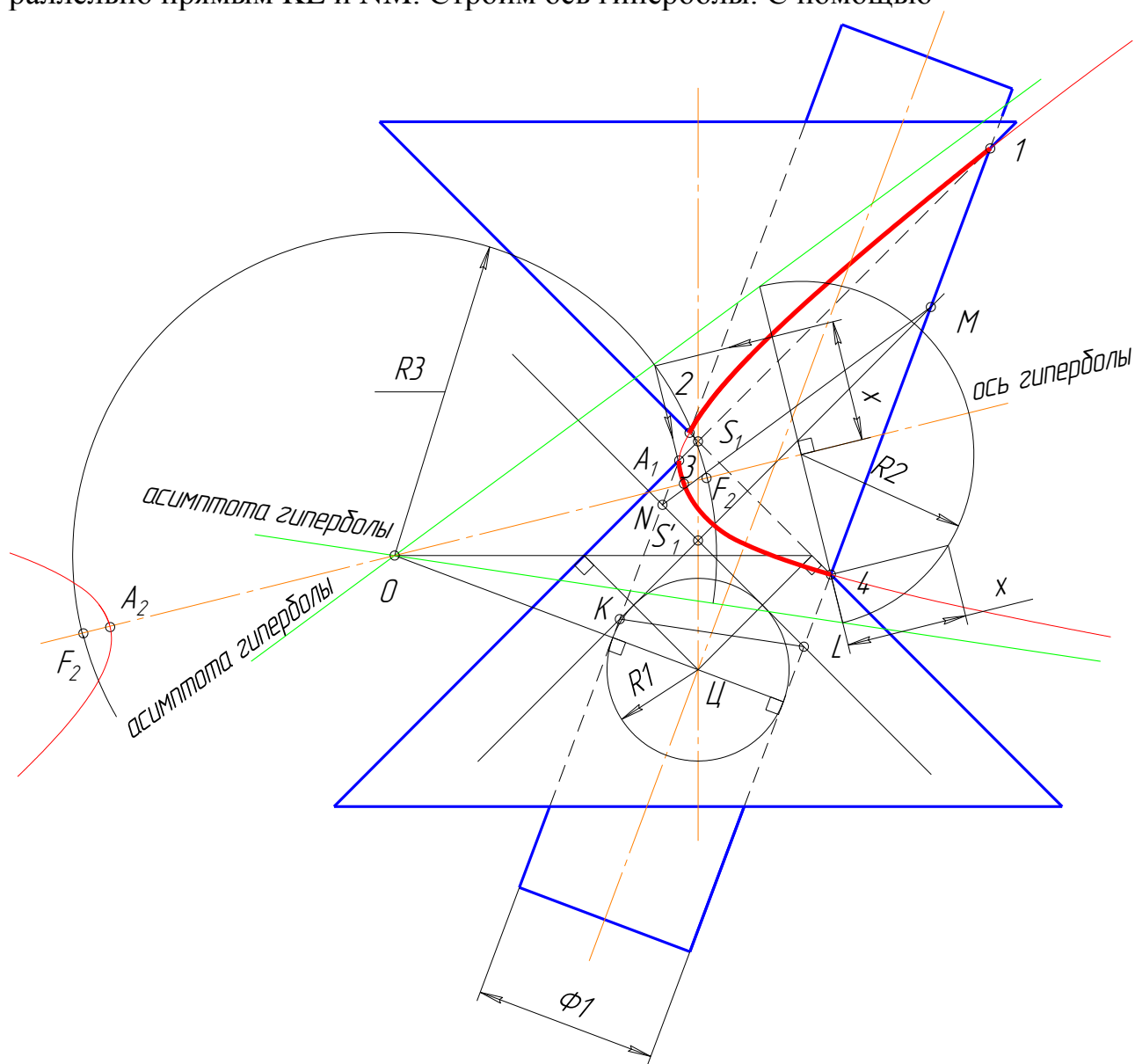


Рис. 12 Линия пересечения конуса вращения S_1 и цилиндра вращения Φ_1 , имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций

т. 4 и радиуса R_2 находим вершину A_1 и симметричную ей A_2 . Фокусы гиперболы F_1 и F_2 находятся известным методом с помощью окружности R_3 . Дополнительные точки можно найти с помощью метода сфер.

На рисунке 13 показано построение линии пересечения конуса вращения S_1 и цилиндра вращения Φ_1 , имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Оси их пересекаются под острым углом в вершине конуса $S_1=C$. Исходные точки 1, 2, 3, 4 – как точки пересечения контурных образующих. Вписываем сферу радиуса R_1 в цилиндр с центром в т. $S_1=C$. Сдвигаем конус S_1 вдоль его оси до положения S'_1 , в котором он будет касательным к сфере R_1 . Конус S'_1 и цилиндр Φ_1 пересекаются, как описанные вокруг одной и той же сферы, по плоским кривым линиям

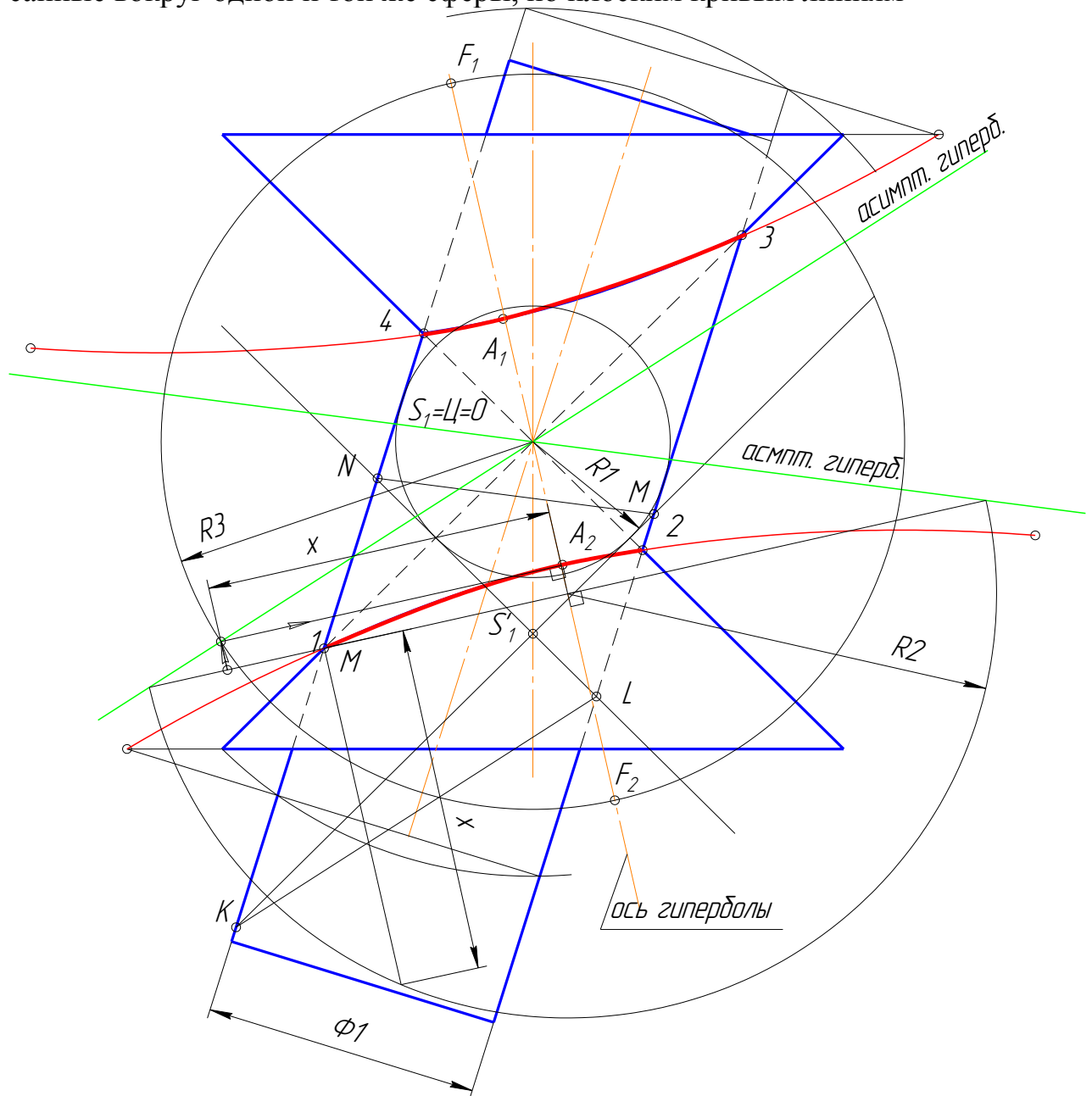


Рис. 13 Пересечение конуса вращения и цилиндра вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций

второго порядка, которые проектируются в виде прямых KL и MN . Эти прямые параллельны будущим асимптотам гиперболы, в которую проектируется линия пересечения данных поверхностей. Центр гиперболы совпадает с вершиной конуса $S_1=Ц=O$. Через нее проводим асимптоты параллельно прямым KL и NM . Строим ось гиперболы. С помощью т. 1 и радиуса R_2 находим вершину A_2 и симметричную ей A_1 . Фокусы гиперболы F_1 и F_2 находятся известным методом с помощью окружности R_3 . Дополнительные точки можно найти с помощью метода сфер.

На рисунке 14 показано построение линии пересечения конуса вращения S_1 и цилиндра вращения Φ_1 , имеющих общую плоскость симметрии, паралл-

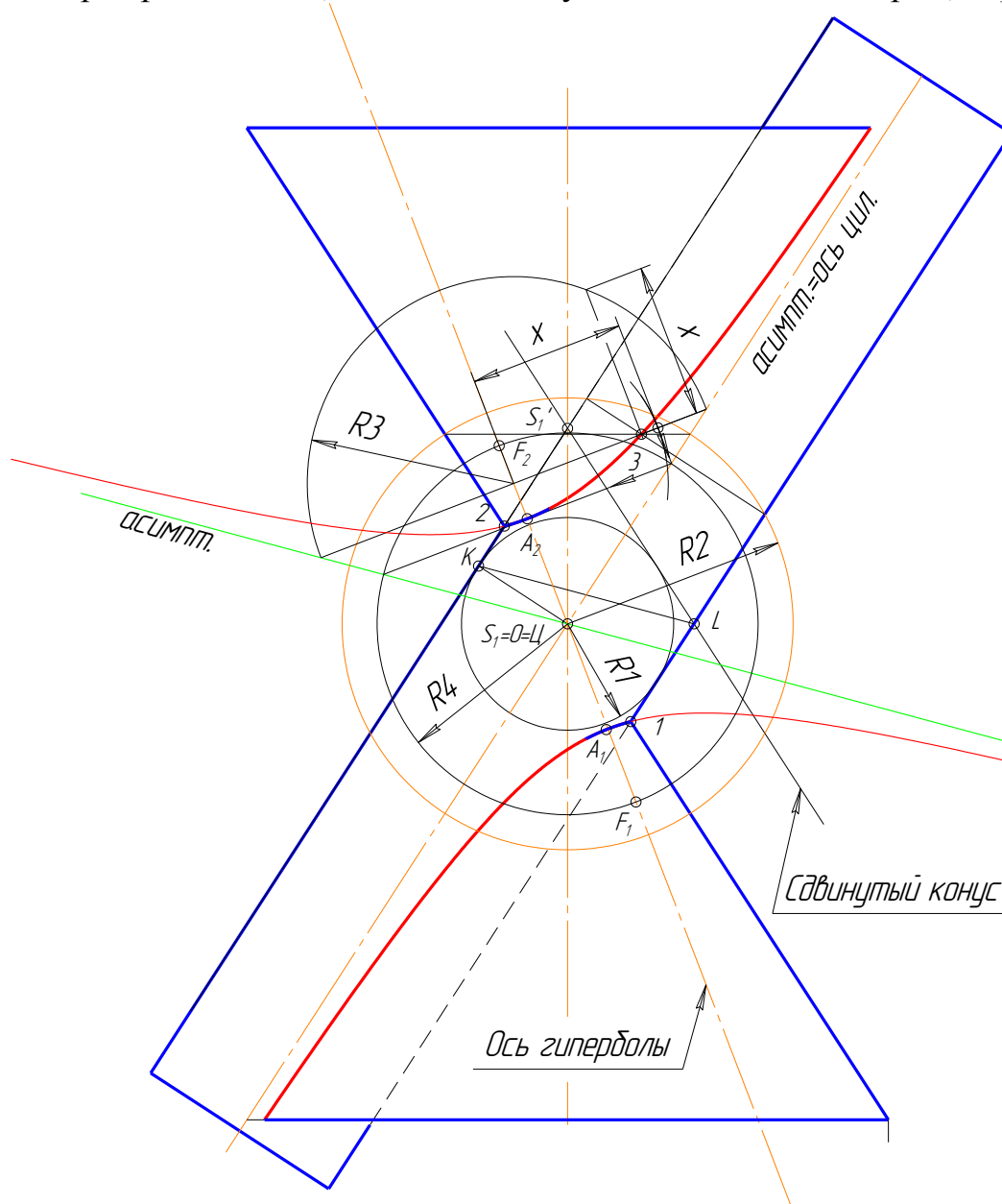


Рис. 14 Пересечение конуса вращения и цилиндра вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций, и осью цилиндра совпадающей с контурной образующей конуса.

лельную фронтальной плоскости проекций. Оси их пересекаются под острым углом в вершине конуса $S_1=Ц$. При этом ось цилиндра совпадает с образующей конуса.

Исходные точки 1, 2, – как точки пересечения контурных образующих. Вписываем сферу радиуса R_1 в цилиндр с центром в т. $S_1=Ц$. Сдвигаем конус S_1 вдоль его оси до положения S'_1 , в котором он будет касательным к сфере R_1 . Конус S'_1 и цилиндр Φ_1 пересекаются, по эллипсу и двойной прямой, которые проецируются в виде прямых KL и образующей цилиндра, проходящей через т. K . Эти прямые параллельны будущим асимптотам гиперболы, в которую проецируется линия пересечения данных поверхностей. Центр гиперболы совпадает с вершиной конуса $S_1=Ц=O$. Через него проводим асимптоты параллельно выше полученным прямым. Строим ось гиперболы. Находим произвольную т. 3 с помощью метода сфер (R_2). С помощью т. 3 и радиуса R_3 находим вершину A_2 и симметричную ей A_1 . Фокусы гиперболы F_1 и F_2 находятся известным методом с помощью окружности R_4 . Дополнительные точки можно найти с помощью метода сфер.

2. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИИ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ВИДЕ ПАРАБОЛЫ

На рисунке 15 показано построение линии пересечения конуса вращения S и цилиндра вращения Φ , имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Оси их параллельны, но не совпадают. В этом случае линия их пересечения проецируется на общую плоскость симметрии параболой. Исходные точки 1, 2, 3, 4 – как точки пересечения контурных образующих. Четыре не коллинеарных точки дают возможность построить параболу и ее элементы (вершину, фокус, директрису, ось). Четыре точки 1, 2, 3, 4 можно представить как точки пересечения сферы R_1 с цилиндром Φ . Они тоже имеют плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Перпендикуляры, проведенные через середины отрезков 12 и 34, в пересечении дают центр O_1 , из которого проходит сфера R_1 . Проводим произвольную сферу R_2 с центром O_2 на оси цилиндра и проходящей через т. 7 и 8. Эта сфера пересекается со сферой R_1 по окружности, которая проецируется в виде прямой 56, а с цилиндром – по окружности, которая проецируется в виде прямой 7,8. Точка их пересечения дает вершину A . Ось параболы – горизонтальна и проходит через т. A и S . Дискриминант параболы равен 0,5. поэтому расстояние $A7$ равно $A9$. Касательная к параболе в точке 1 пересекает ось параболы в точке 9. Известно, что подера параболы относительно фокуса ее есть прямая, проведенная в вершине ее и перпендикулярно к ее оси. Отсюда из точки пересечения этой подеры и касательной 19 проводим прямую, перпендикулярную к касательной 19, до пересечения с осью. Это и будет фокус параболы. Директриса параболы находится на расстоянии AF слева от вершины A .

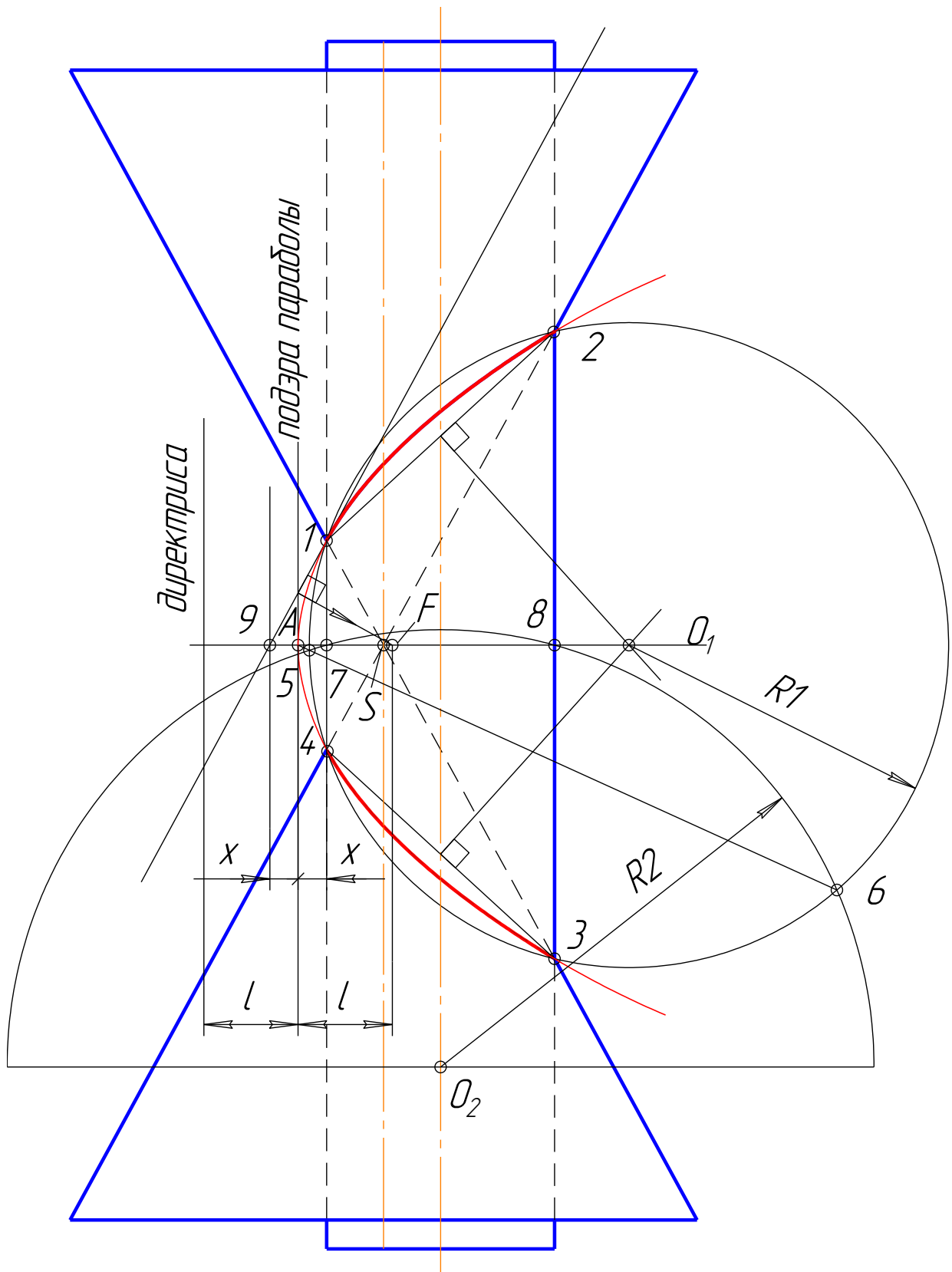


Рис. 15 Пересечение конуса вращения и цилиндра вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций

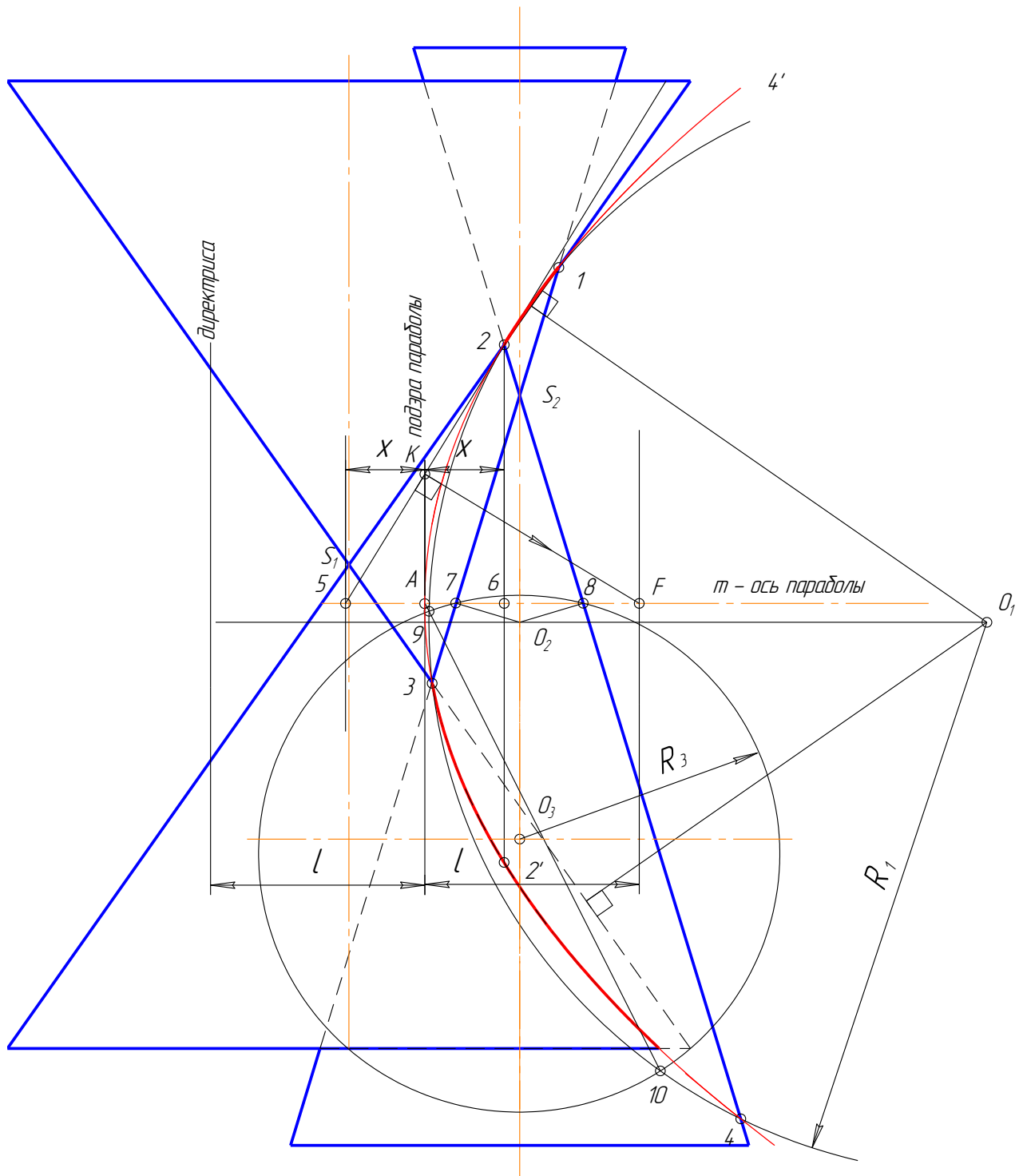


Рис. 16 Линия пересечения двух конусов вращения S_1 и S_2 , имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Оси их параллельны, но не совпадают.

На рис. 16 показано построение линии пересечения двух конусов вращения S_1 и S_2 , имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Оси их параллельны, но не совпадают. Углы при вершинах α и β не одинаковы. Линия пересечения этих конусов проецируется на общую плоскость симметрии параболой (1). Исходные точки 1, 2, 3, 4 – как точки

пересечения контурных образующих. Четыре точки, принадлежащие параболе, дают возможность построить все элементы параболы. Четыре точки 1, 2, 3, 4 можно представить как точки пересечения сферы R_1 с конусом S_2 . Эта сфера и конус S_2 тоже имеют общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Перпендикуляры, проведенные через середины отрезков 12 и 34, в пересечении дают центр O_1 , из которого проходит сфера R_1 . Пересечение плоскости экватора сферы R_1 с осью конуса S_2 дает центр сфер O_2 , средняя линия для которых m (на чертеже эти сферы не показаны), является осью параболы. Проводим произвольную сферу R_3 через т. 7 и 8 с центром O_3 лежащем на оси конуса S_2 . Эта сфера пересекается с конусом S_2 и сферой O_1 по окружностям, которые проецируются в виде прямых линий 78 и 910. Точка пересечения этих прямых и есть вершина параболы А. Дискриминант параболы равен 0,5. Опустив перпендикуляр из т. 2 на ось параболы, находим т.6.

Расстояние $6A$ равно расстоянию $5A$. Касательная к параболе в т. 2 проходит через т. 5. Подера параболы относительно фокуса ее есть прямая, перпендикулярная к оси и проходящая через вершину. Из точки пересечения подеры и касательной 25 (т.К) проводим перпендикуляр к касательной 25 до пересечения с осью параболы. Это и будет фокус параболы F. Директриса параболы находится на расстоянии AF слева от вершины А.

На рис. 17 показано построение линии пересечения цилиндра вращения и сферы O_1 , имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Линия пересечения в этом случае проецируется на общую плоскость симметрии в виде параболы (1). Исходные точки 1, 2, 3, 4 – как точки пересечения контуров тел. Для нахождения вершины параболы проводим произвольную сферу O_2 радиусом R_2 . Сфера проходит через т. 6 и 7 пересечения плоскости экватора сферы O_1 с контурными образующими цилиндра. Центр сферы O_2 лежит на оси цилиндра. Эта сфера пересекается со сферой O_1 и цилиндром по окружностям, которые проецируются в виде прямых 67 и 89. точка пересечения этих прямых и есть вершина параболы т. А. Дискриминант параболы равен 0,5. Расстояние $A6$ равно расстоянию $A5$. Касательная к параболе в т. 3 проходит через т. 5. Из т. 10 пересечения касательной 35 и подеры параболы относительно фокуса O проводим прямую, перпендикулярную к касательной 35 до пересечения с осью параболы. Это и есть фокус параболы. Директриса параболы находится на расстоянии AF слева от вершины А.

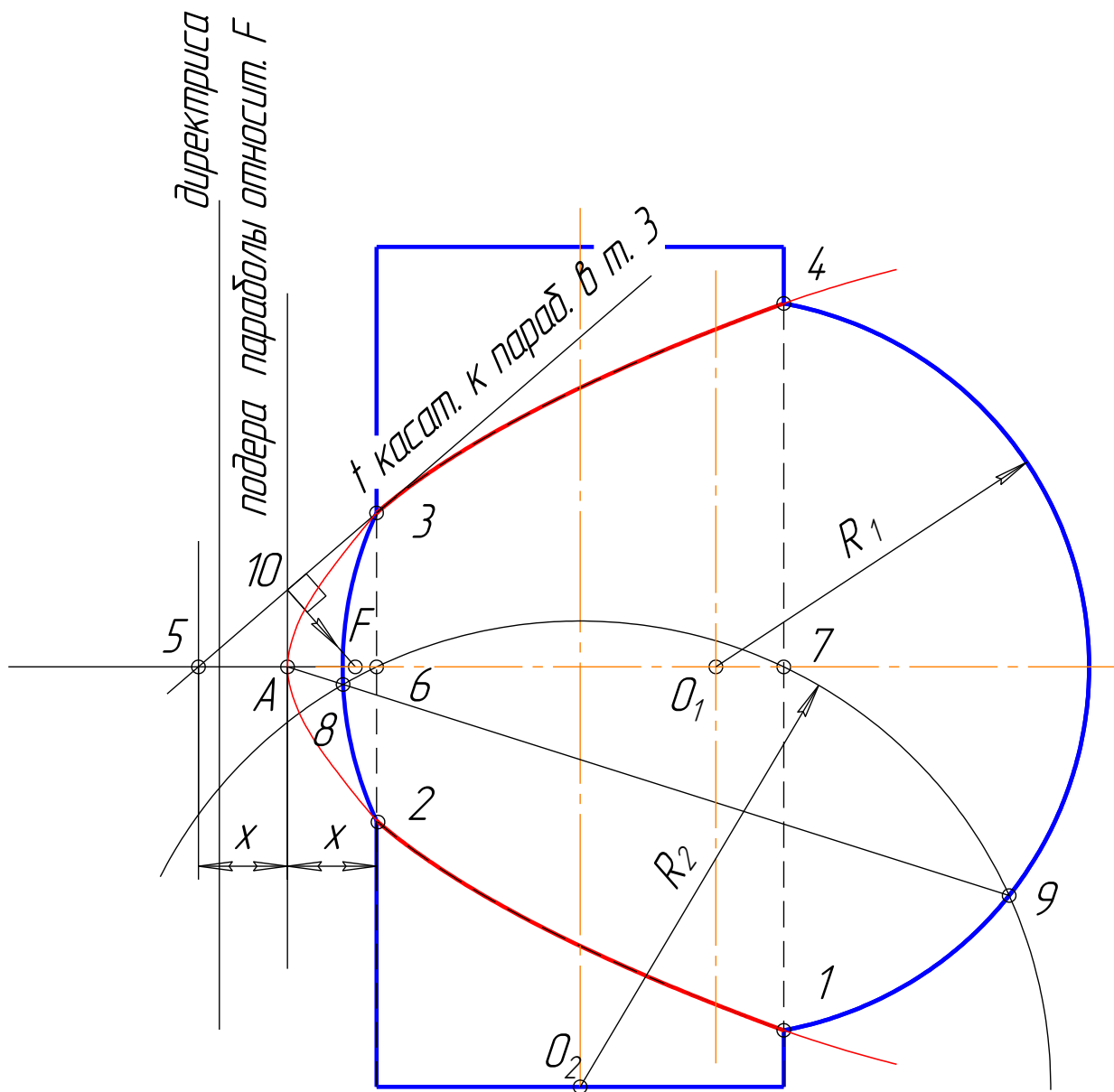
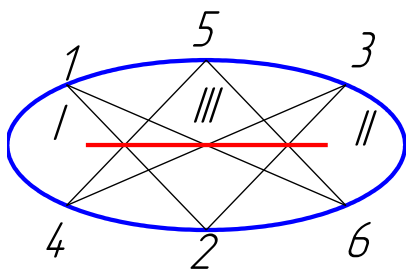


Рис. 17 Пересечение цилиндра вращения и сферы, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций

На рис. 18 показано построение линии пересечения цилиндра вращения и сферы O_1 , имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Линия пересечения в этом случае проецируется на общую плоскость симметрии в виде параболы (1). Все построения ведутся аналогично рис. 17. За исключением нахождения касательной к параболе в т. 3. Она находится с помощью теорем Паскаля.



$$\begin{aligned} (12-23-34) \cap (23-34-45) &= I \\ (23-34-45) \cap (34-45-56) &= II \\ (34-45-56) \cap (45-56-61) &= III \end{aligned}$$

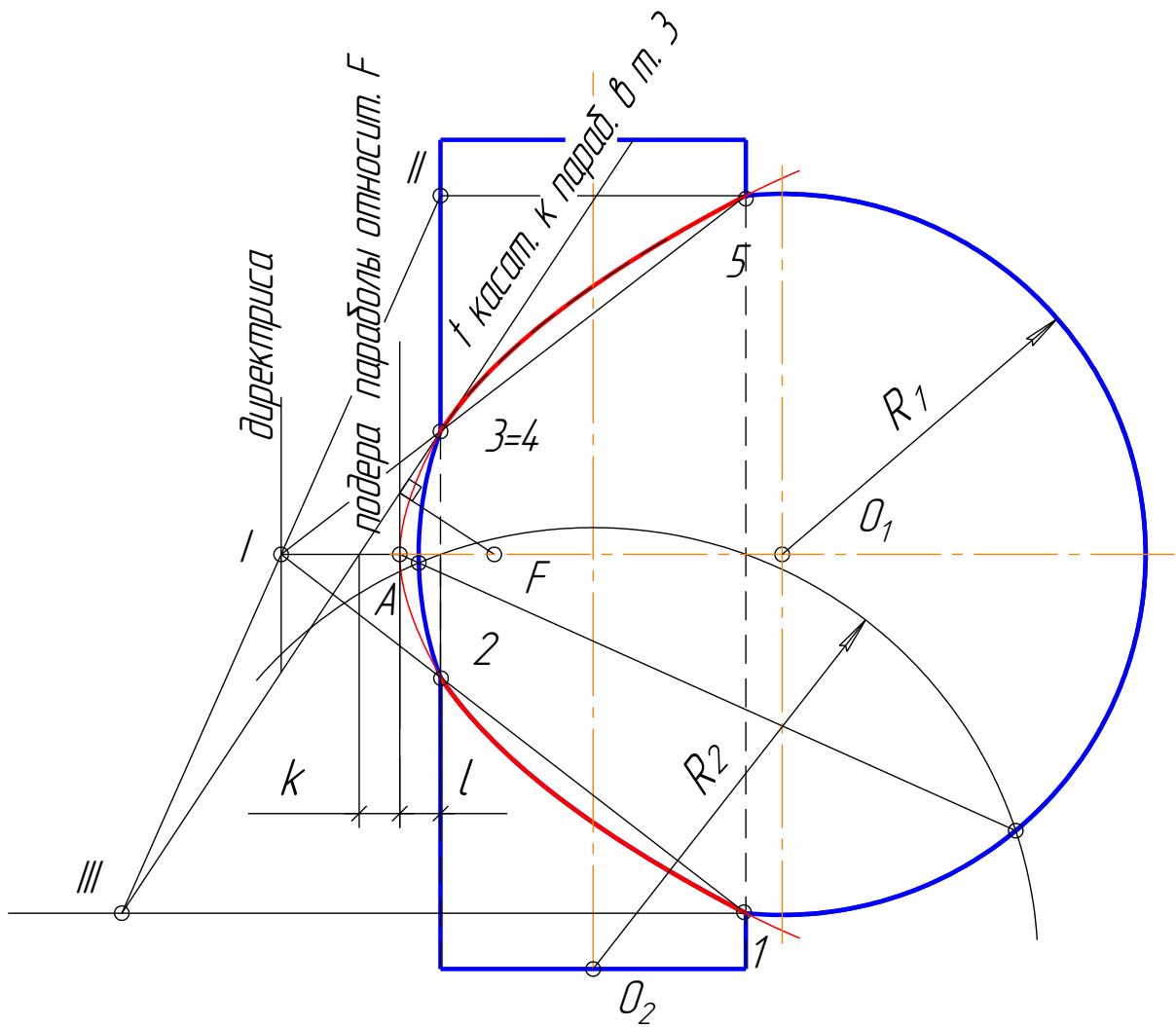


Рис. 18 Пересечения цилиндра вращения и сферы, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций

На рис. 19 показано построение линии пересечения конуса вращения и сферы O_1 , имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Линия пересечения в этом случае проецируется на общую плоскость симметрии в виде параболы (1). Исходные точки 1, 2, 3, 4 – как точки пересечения контуров тел. Пересечения плоскости экватора сферы R_1 с осью конуса S_1 дает центр сфер O_2 . Сферы, проведенные из этого центра, дают для конуса S_1 среднюю линию m , которая и является осью параболы. Проводим произвольную сферу R_3 через т. 5 и 6 с центром O_3 , лежащем на оси конуса S_1 . Эта сфера пересекается с конусом S_1 и со сферой O_1 по окружностям, которые проецируются в виде прямых 5 6 и 10 11. Точка пересечения этих прямых и есть вершина параболы т. А. Дискриминант параболы равен 0,5. Опустив перпендикуляр из т. 1 на ось параболы, находим т. 7.

Расстояние 7А равно расстоянию 8А. Касательная к параболе в т. 1 проходит через т. 8. Подера параболы относительно ее фокуса есть прямая, перпендикулярная к оси и проходящая через вершину. Из точки пересечения

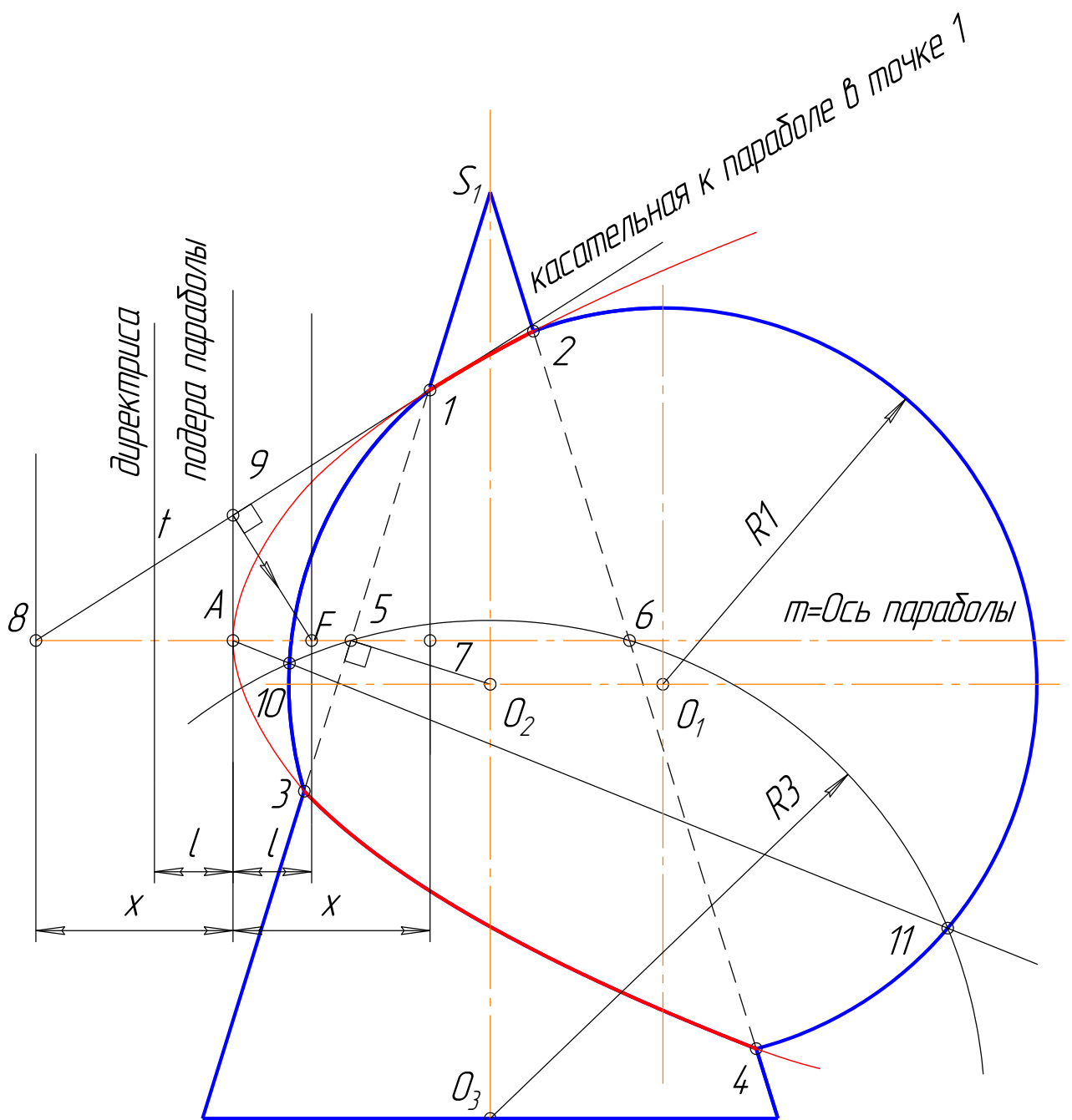


Рис. 19 Пересечение конуса вращения и сферы, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций

подеры и касательной 18 (т.9) проводим перпендикуляр к касательной 18 до пересечения с осью параболы. Это и будет фокус параболы F . Директриса параболы находится на расстоянии AF слева от вершины A .

На рис. 20 показано построение линии пересечения конуса вращения S_1 и сферы O_1 , имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Линия пересечения в этом случае проецируется на общую плоскость симметрии в виде параболы (1). Исходные точки 1, 2, 3, 4 – как точки пересечения контуров тел. Пересечение плоскости экватора сферы R_1 с осью конуса S_1 дает центр сфер O_2 . Сферы, проведенные из этого центра, дают для

конуса S_1 среднюю линию m , которая и является осью параболы.

Проводим произвольную сферу R_3 через т. 5 и 6 с центром O_3 , лежащем на оси конуса S_1 . Эта сфера пересекается с конусом S_1 и со сферой O_1 по окружностям, которые проецируются в виде прямых линий 56 и 10 11.

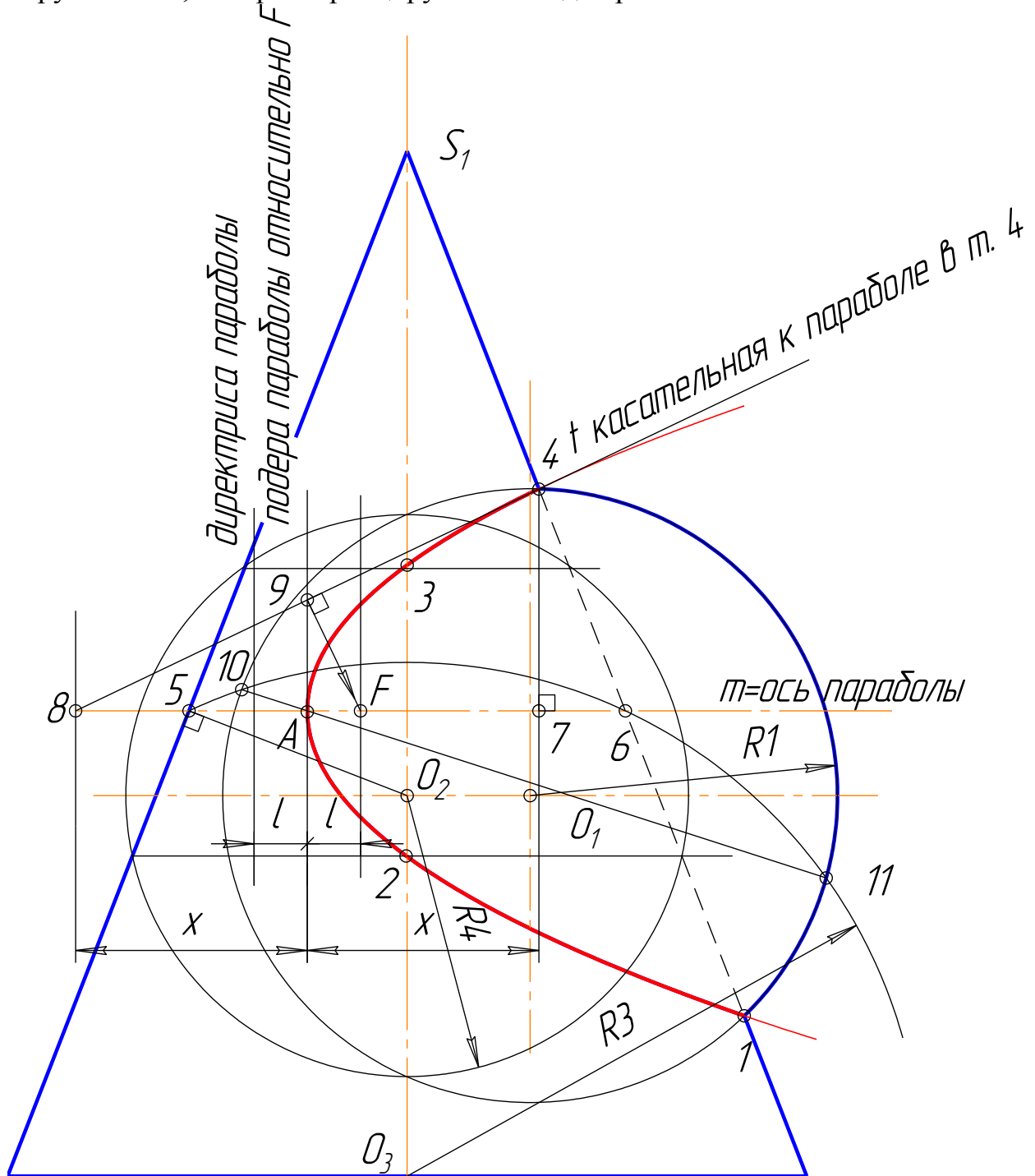


Рис. 20 Линия пересечения конуса вращения S_1 и сферы O_1 , имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций

Точка пересечения этих прямых и есть вершина параболы т. А. Ее можно было определить и с помощью сферы, вписанной в конус S_1 с центром в т. O_2 . Дискриминант параболы равен 0,5. Опустив перпендикуляр из т.4 на ось параболы,

находим т.7. Расстояние $7A$ равно расстоянию $8A$. Касательная к параболе в т. 4 проходит через т. 8. Подера параболы относительно ее фокуса есть прямая, перпендикулярная к оси и проходящая через вершину. Из точки пересечения подеры и касательной 48 (т.9) проводим перпендикуляр к касательной 48 до пересечения с осью параболы. Это и будет фокус параболы F . Произвольные точки 3. и 2 найдены с помощью сферы R_4 центром в т. O_2 . Директриса параболы находится на расстоянии AF слева от вершины A .

Литература

1. Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. – М.: «Советская наука», 1958. – 270 с.:ил.

2. А.А. Савелов. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). /Под редакцией А.п. Нордена. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960.– 294 с.:ил.

3. Гаспар Монж. Приложение анализа к геометрии. Перевод с французского В.А. Глуковской. Под редакцией с предисловием и примечаниями М.Я. Выговского. Главная редакция общетехнических дисциплин. Москва 1936. Ленинград – 699 с.:ил.

Учебное издание

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ПРОЕКЦИЙ ЛИНИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С ОБЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ СИММЕТРИИ

Учебное пособие

Составители: Анатолий Пантелеевич Червоненко, ст. преп.,
Елена Анатольевна Катькалова, к. т. н., доц.

Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Усл. печ. л. – 1,75. Тираж 100 экз.
83000, г. Донецк, ул. Артема, 58, ДонНТУ.