Розглянуто загальні питання моделювання студента. Наведено предметну семантичну модель з лінійної алгебри.

СЕМАНТИЧЕСКИЙ КОНСПЕКТ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Е.Г. Евсеева, кандидат физ.-мат. наук
Донецкий национальный технический университет

1. Одним из центральных понятий современной дидактики является *моделирование обучаемого.* В самом широком смысле под *моделью обучаемого* понимают знания об обучаемом, используемые для организации процесса обучения. Это множество точно представленных фактов об обучаемом, которые описывают различные стороны его состояния: знания, личностные характеристики, профессиональные качества и др.

Существуют три точки зрения, с которых можно рассматривать моделирование обучаемого, или наши знания об обучаемом [1, 2]. Во-первых, это знания о том, каков обучаемый есть; во-вторых, знания о том, каким мы хотим его видеть; и, наконец, знания о том, каким мы его можем увидеть. Первые устанавливаются путем анализа поведения обучаемого в процессе обучения, и их называют *поведенческой* моделью обучаемого. Она изменяется вместе с изменением обучаемого, поэтому ее называют *динамической*, или *текущей*, моделью обучаемого.

Знания о том, каким мы хотим видеть обучаемого, т.е. требования к его конечному состоянию (как к специалисту) называют *нормативной* моделью обучаемого. По сути дела, эти знания определяют цель обучения. Они, как правило, многогранны. Сюда относятся, например, требования к личностным качествам будущих специалистов, их профессиональным качествам и умениям, знаниям и умениям по различным учебным предметам, характеристикам физического и психического состояния и т.п. И конечной целью обучения является достижение такого положения, когда поведенческая модель обучаемого при выпуске совпадает с его нормативной моделью.

Третья точка зрения основывается на том, что, в общем случае, существуют различные пути, или траектории, по которым могут продвигаться обучаемые в процессе обучения. С одной стороны, это могут быть корректные траектории, обусловленные правильными действиями обучаемых и предусмотренные нормативной моделью обучаемого, например, использование различных приемов и методов решения одних и тех же задач. С другой стороны, различные траектории могут быть обусловлены *ошибочными* действиями обучаемых, и многие их ошибки могут быть заранее предугаданы преподавателем. Работа преподавателя по определению возможных ошибок обучаемых чрезвычайно полезна с дидактической точки зрения (на ошибках учатся!); совокупность же этих ошибок составляет специфическую модель обучаемого, которую называют *моделью ошибок*.

2. Часть нормативной модели обучаемого, определяющую предметные знания, то есть знания по учебным предметам, называют *предметной моделью* *обучаемого* [1, 2]. Предметная модель обучаемого, таким образом, определяет *смысловую сторону* обучения предмету.

Можно выделить пять компонент предметных знаний и, соответственно им, пять компонент предметной модели обучаемого: *тематическую, функциональную, процедурную, операционную, семантическую.* Тематическая модель показывает, о чем знания; функциональная модель определяет, какие функции они выполняют; процедурная модель описывают порядок и характер преобразования объектов предметной области; операционная модель задает умения, которые должны быть сформированы в процессе обучения; семантическая модель определяют смысловую, или семантическую, часть предметных знаний.

3. В настоящее время предметное моделирование обучаемого приобрело законченный вид, оно вписано в парадигмы как инженерии знаний, так и современной дидактики. Созданы модели по отдельным предметам и показана их эффективность в учебном процессе. Дальнейшая работа должна быть направлена на внедрение моделирования обучаемого в различные учебные предметы. В на стоящей работе подробно описывается существо и построение семантической предметной модели обучаемого по линейной алгебре для студентов экономических специальностей.

4. Семантические знания по учебным предметам содержатся в учебниках, учебных пособиях, другой учебной литературе. И каждый вид учебной литературы в определенном смысле является моделью этого предмета. Учебники представляют собой наиболее расширенную модель.

С точки зрения дидактики, в содержании любого учебника принято выделять две части [8]. К первой части относится информация, непосредственно составляющая содержание предмета, или предметные знания. Другая часть – это информация, обслуживающая предметные знания. Это могут быть, например, сведения из других предметов, выкладки, толкования, объяснения, информация о применении и использовании предметных знаний в других дисциплинах, а также в технике, в жизни и т.п.

По сути дела, именно первая часть и составляет семантическую модель предметной области, или семантическую модель обучаемого. Однако эти знания в учебнике не выделены специально, они распределены по всему учебнику, переплетаются с другими знаниями, не формализованы. Семантические знания представляют собой декларативную компоненту предметных знаний, то есть фактические знания, так как процедурные знания реализуются в умениях (операционных знаниях). Таким образом, для того чтобы на основе учебника построить некоторую формализованную семантическую (содержательную) предметную модель, необходимо из него выделить факты и определенным образом их сгруппировать.

По структуре факты могут быть самыми разнообразными, в той или иной мере сложными, или составными. Однако основу составляют элементарные факты, которые, выступая в различных отношениях, и образуют факты сложные. Например, факт из матричной алгебры *«Наибольший порядок ненулевого минора матрицы называется рангом»*, который, по сути дела, является определением ранга матрицы, может быть разбит на три более простых факта:

1) у матрицы есть миноры,

2) миноры имеют различный порядок,

3) порядок некоторого минора называется рангом матрицы.

Приведенные факты уже не разлагаются на более простые и поэтому являются *элементарными* фактами. Хотя они и содержат предметные термины, но предметного смысла, или семантики, не имеют. Предметный смысл возникает только тогда, когда эти элементарные факты объединяются вместе. Простейший по составу факт, имеющий предметный смысл, получил название *семантический* факт. Семантический факт – это всегда законченная и единственная мысль, которая передается одним предложением, или высказыванием. По сути дела, семантические факты играют роль *единиц знаний* предметной области.

Семантическим фактом является приведенное выше определение ранга матрицы. Больше того, любое определение понятия есть семантический факт. Однако семантические факты – это не только определения, они могут передавать различное содержание. Предметом семантических фактов являются понятия, явления, процессы, законы, теоремы, выводы, причины, следствия, свойства, признаки, модели и др. Например, утверждение: *«Ранг матрицы равен нулю только в том случае, если все элементы матрицы равны нулю»,* представляет собой теорему.

Специфическим семантическим фактом, присущим математическим дисциплинам, является символический вид различного рода утверждений. Именно такими фактами являются формулы и обозначения, которые составляют большую часть предметных знаний по математике. Например, факт: «*Ранг матрицы A обозначается $\operatorname{rang} A$, или $r(A)$»,* вводит обозначение ранга матрицы, а факт «$\operatorname{rang} A_{m\times n} = 0 \Leftrightarrow A_{m\times n} = O_{m\times n}$» является символическим видом теоремы о равенстве ранга матрицы нулю.

5. Полный набор семантических фактов, или высказываний и есть семантическая предметная модель обучаемого. Он получил название *семантического конспекта.* Таким образом, семантический конспект - это полный набор лаконично представленных мыслей предметной области. Изданный отдельно, он представляет собой очень тонкую брошюру, потому что в ней нет выкладок, доказательств и объяснений. Тем не менее, она содержит все положения изучаемого курса.

Все высказывания семантического конспекта пронумерованы. Каждое высказывание имеет номер, состоящий из двух частей, разделенных точкой. Первая часть – это номер раздела, к которому принадлежит данное высказывание, вторая часть - его номер в данном разделе. Кроме того, некоторые номера стоят также после высказываний. Это номера других высказываний, от которых данное зависит, которыми оно определяется, из которых следует. Связи между высказываниями могут быть очень простыми, например, ссылки на термины, которые употребляются в данном высказывании, и более сложными, глубокими, например, связь причины и следствия. Эти связи, по существу, задают структуру предметных знаний, определяют развитие учебного предмета, формальную логическую схему рассуждений, и студенты должны самостоятельно наполнить ее конкретным содержанием. Это обстоятельство способствует повышению эффективности обучения с использованием семантического конспекта.

В качестве примера приведем фрагмент семантического конспекта [4]:

4. Ранг матрицы.

4.1. Определитель квадратной матрицы, которая получена из исходной матрицы вычеркиванием рядов, называется минором исходной матрицы. (1.9,.1.29,.3.1)

4.2. Порядок минора равен количеству строк или столбцов в матрице, определителем которой он является. (3.3, 4.1)

4.3. Порядок минора не превышает наименьшего из размеров матрицы, определителем которой он является. (1.4, 4.1)

4.4. Прямоугольная матрица размера $m \times n$ *имеет миноры, порядок которых может быть равен любому числу от единицы до наименьшего из чисел* m *и* n*. (1.4, 1.27, 4.1, 4.2)*

4.5. Минор k*-го порядка матрицы размера* $m \times n$ *обозначается* M^k*, где* $1 \le k \le \min(m,n)$*. (4.4)*

4.6. Рангом матрицы называется наибольший порядок её ненулевого минора. (1.28, 3.1, 4.1, 4.2)

4.7. Ранг матрицы А обозначается $\operatorname{rang} A$ *или* $r(A)$*. (4.5)*

4.8. Ранг матрицы не превосходит наименьшего из ее размеров. (1.4, 4.5)

4.9. $A_{m\times n} : r(A) \le \min(m,n)$*. (4.8)*

Как видно, высказывания этого раздела имеют не только свое внутреннее обоснование (ссылки на высказывания этого раздела), но и опираются на разделы 1 (Виды матриц), 3 (Определители).

5. Написание семантического конспекта – дело очень непростое, хотя и благодарное. Это очень трудоемкая и кропотливая работа. Она требует от преподавателя глубокого знания учебной дисциплины, умения анализировать, синтезировать и обобщать учебный материал. Такая работа заставляет преподавателя вдумываться в каждое предложение, в каждую мысль, изложенную в учебнике. И в начале этой работы с большим удивлением открываешь, как неточно и некорректно сформулированы многие понятия в учебниках и как эти неточности переходят из одного учебника в другой без изменения. В общем контексте это не бросается в глаза, но часто становится очевидным, если сфокусировать внимание на конкретной мысли. Особую сложность представляет составление семантического конспекта по гуманитарным предметам, где очень сложно вылавливать семантические факты в потоке общих слов.

При составлении семантических конспектов необходимо руководствоваться следующими принципами [1, 2, 9]:

1. *Принцип дискретности*. Фактические знания по предмету должны быть представлены в виде отдельных высказываний;
2. *Принцип завершенности*. Общая совокупность высказываний должна отражать все фактические знания по предмету в полном объеме;
3. *Принцип лаконичности*. Высказывания должны содержать минимальное количество слов, выражая при этом законченную мысль;
4. *Принцип первичности определений*. Понятия впервые вводятся через определения. Никакое новое понятие не может появиться в высказывании, которое не является определением;

5. *Принцип единственности*. Любое высказывание не должно содержать более чем одно новое понятие;
6. *Принцип недвусмысленности*. Каждое высказывание должно являться семантическим фактом и выражать одну единственную мысль;
7. *Принцип последовательности*. Высказывания должны быть расположены в порядке, соответствующем логике изложения изучаемого курса;
8. *Принцип самодостаточности*. Любое высказывание должно даваться в полной формулировке, и его смысл не должен зависеть от других высказываний;
9. *Грамматический принцип*. Структура высказываний должна подчиняться логике построения литературно правильной речи.

Перед тем как приступить к составлению семантического конспекта, необходимо уточнить учебную программу по дисциплине, восстановить в памяти все понятия и основные положения курса. Дальнейшая работа должна быть направлена на вычленение семантических фактов. Для этого оказывается необходимым проработать большое количество учебников и другой специальной литературы. При составлении конспекта по линейной алгебре были использованы учебники и учебные пособия [3, 5, 7].

Удобно иметь однородную структуру конспекта. Главным вопросом здесь является выделение разделов, или рубрик, из которых будет состоять конспект. Делается это по содержанию, тематически, при этом рекомендуется следить, чтобы разделы были самостоятельны, однако не слишком большими. Подразделы или, наоборот, части, объединяющие разделы, допустимы, но их нумерация не желательна. В этом случае можно ограничиться, как было указано, двузначной нумерацией – номер раздела, точка, номер семантического факта в разделе. Например, курс линейной алгебры для составления семантического конспекта может быть разбит на четыре тематические рубрики, которые не нумеруются:

- *алгебра матриц;*
- *системы линейных алгебраических уравнений;*
- *векторная алгебра и аналитическая геометрия;*
- *алгебра линейных операторов и квадратичных форм;*

Каждая тематическая рубрика, в свою очередь, разбивается на несколько разделов, имеющих сквозную нумерацию по всему конспекту. Например:

Алгебра матриц:

1. Основные определения, виды матриц;
2. Операции с матрицами;
3. Определители квадратных матриц;
4. Ранг матрицы;
5. Обратная матрица;

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) :

6. СЛАУ $m \times n$*, основные определения;*
7. СЛАУ $n \times n$*, матричный метод решения;*
8. СЛАУ $n \times n$*, решением методом Крамера;*
9. Метод Гаусса решения СЛАУ ;
10. Метод Жордана-Гаусса решения СЛАУ;
11. Теорема Кронекера Капели;

12. Однородные СЛАУ;

Векторная алгебра с элементами аналитической геометрии:

13. Геометрические векторы и прямая на плоскости;
14. Операции с векторами в пространстве;
15. Плоскость и прямая в пространстве;
16. Векторное и евклидово пространства;
17. Базис векторного пространства;
18. Линейные формы и выпуклые множества;

Алгебра линейных операторов (ЛО) и квадратичных форм (КФ):

19. Матрица ЛО в эвклидовом пространстве;
20. Собственные векторы и собственные значения ЛО;
21. Канонический вид КФ;
22. Критерий Сильвестра;
23. Кривые второго порядка на плоскости;
24. КФ и кривые второго порядка.

После того как выделена структура конспекта, можно приступать к формулировке высказываний, руководствуясь приведенными выше принципами. При этом очень важно следовать *грамматическому принципу.* Существуют определенные закономерности построения высказываний, которые обусловлены особенностями логико-грамматического метода [6]. Этот метод основывается на том, что большинство высказываний отчетливо делится на две части. Первая часть, которая представляет собой исходный пункт высказывания, называется *темой*. Тема высказывания либо уже известна, либо предопределяется контекстом. Вторая часть называется *ремой*. Она сообщает нечто новое о теме и представляет собой главную цель высказывания. Рема заключает в себе содержание сообщения и является семантическим центром высказывания. Рассмотрим следующий пример:

4.2. Порядок минора равен количеству строк или столбцов в матрице, определителем которой он является.

Здесь темой является «*порядок минора*», а ремой –*«равен количеству строк или столбцов в матрице, определителем которой он является»*. Это высказывание служит для того, чтобы показать*, чему равен* порядок минора матрицы. Его раскрывает рема – «*количеству строк или столбцов в матрице, определителем которой он является*». Это и есть главная цель и мысль высказывания.

Таким образом, порядок слов в предложении играет определенную роль и не может быть свободным. Если порядок слов изменить, то это может привести к изменению темы и ремы, они взаимно перевоплотятся друг в друга, и коммуникативная цель высказывания также изменится. Особенно важно соблюдать необходимый порядок слов в теоремах, которые задают необходимое или достаточное условие. Например, высказывание

3.29. Если все элементы какого-нибудь ряда матрицы равны нулю, то и определитель этой матрицы равен нулю

представляет собой достаточное условие равенства нулю определителя матрицы. Первая часть высказывания « *все элементы какого-нибудь ряда матрицы равны нулю»* здесь является темой, а вторая – «*определитель этой матрицы ра-*

вен нулю» – ремой. Между ними существует четкая причинно-следственная связь: из темы следует рема. Если это высказывание переформулировать следующим образом:

3.29. Если определитель этой матрицы равен нулю, то и все элементы какого-нибудь ряда матрицы равны нулю,

то в этом случае «*равенство нулю определителя матрицы»* превратится в тему, из которой следует новая рема «*все элементы какого-нибудь ряда матрицы равны нулю»*. При этом не просто изменится смысл высказывания: утверждение теоремы станет неверным, так как не в каждой матрице с нулевым определителем содержится нулевой ряд. Таким образом, необходимо внимательно следить за порядком слов в высказывании, чтобы правильно передавать смысл.

Принцип недвусмысленности требует, чтобы любое высказывание имело только одну рему, одну мысль. Следующее высказывание является примером, в котором этот принцип нарушается: *«Свойства определителей могут быть сформулированы для общего понятия -ряда матрицы, так как они одинаковы для строк и столбцов».* Фактически данное высказывание содержит две ремы, которые должны быть представлены двумя отдельными высказываниями:

3.27. Свойства определителей одинаковы для строк и столбцов матрицы.

3.28. Свойства определителей могут быть сформулированы для общего понятия - ряда матрицы.

Как правило, сложносочиненные и сложноподчиненные предложения имеют более, чем одну рему, и использовать их нужно очень осторожно. Существует особый тип высказываний, у которых отсутствует тема. Такие высказывания содержат комплексную рему и определяются как высказывания с *нулевой* темой. Высказывания с нулевой темой содержат сообщения о существовании или возникновении явлений и фактов, рассматриваемых как единое целое. Сущность таких высказываний не зависит от порядка слов в нем. Высказывания с «нулевой» темой служат для введения определений понятий или обозначений. Примером могут служить высказывания, определяющее понятие определителя:

3.1. Определителем квадратной матрицы называют число, которое ставится ей в соответствие по определённому правилу.

3.2. Определитель матрицы A обозначают $\det A$*, или* $|A|$.

Конспект должен соответствовать логике изложения учебного материала, а точнее, - логике развития науки, которая составляет предмет учебной дисциплины. Отсюда следует, что все понятия должны вводиться через определения до того, как они будут использоваться в высказываниях других типов. Отмеченное положение отражается принципом *первичности определений*. Например, может показаться логически стройным и последовательным следующее сочетание высказываний :

3.22. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

3.23. Алгебраическим дополнением к элементу матрицы называют минор этого элемента, взятый со знаком плюс или минус, в зависимости от местоположения элемента в матрице. (3.22)

3.24. Минором элемента матрицы называется определитель квадратной матрицы, которая получена из исходной вычеркиванием строки и столбца на пересечении которых стоит элемент. (3.23)

Однако здесь содержание первого высказывания определяется понятием *алгебраическое дополнение,* которое еще не введено, это будет сделано позднее. Поэтому это высказывание не может быть понято без апелляции к материалу из будущего и, следовательно, не имеет предметного содержания. Точно так же обстоит дело и с понятием *минора*. Смысл высказываний должен формироваться предыдущими, а не последующими высказываниями. Верный порядок размещения высказываний должен быть следующим:

3.22. Минором элемента матрицы называется определитель квадратной матрицы, которая получена из исходной вычеркиванием строки и столбца на пересечении которых стоит элемент.

3.23. Алгебраическим дополнением к элементу матрицы называют минор этого элемента, взятый со знаком плюс или минус, в зависимости от местоположения элемента в матрице. (3.22)

3.24. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения. (3.23)

Точно так же не могут быть поняты высказывания, содержащие более одного нового понятия. Это положение отражается принципом *единственности*.

Когда составляешь семантический конспект, существует большой соблазн сокращать, использовать в последующем высказывании информацию из предыдущего, что создает иллюзию связного текста. Часто в последующем высказывании хочется употребить местоимение, как, например, в следующем случае:

1.33. Элементы, стоящие на главной диагонали квадратной матрицы, называются диагональными.

1.34. Эти элементы имеют два одинаковых индекса. (1.33)

Видно, что вне контекста высказывание 1.34 теряет смысл. Такие ситуации запрещаются принципом *самодостаточности*.

Когда все высказывания сформулированы, они группируются в единое целое, т.е. семантический конспект.

6. Дальнейшая работа над семантическим конспектом состоит в том, чтобы:

- отредактировать каждое высказывание в соответствии с выраженной в нем мыслью и грамматикой его написания;
- удалить из текста те высказывания, которые повторяются или противоречат друг другу;
- разбить высказывание на два отдельных, если в нем есть две ремы;
- где необходимо, поменять высказывания местами, следуя логике изложения учебного курса;
- исключить случаи использования еще не введенных определениями понятий;
- исключить случаи использования более одного нового понятия в одном высказывании;

- присвоить каждому высказыванию номер, определяющий раздел и место высказывания внутри раздела.

Конечным этапом работы является определение внутренних связей между высказываниями. Ранее уже отмечалось, что после высказываний указываются номера других высказываний, связанных с данным. Самый простой, но необходимый вид связи – это напоминание понятий. Прежде всего, каждое понятие, упомянутое в высказывании, должно быть восстановлено в памяти. Без таких связей невозможно обойтись, ведь для верного толкования высказывания необходимо, чтобы был известен смысл всех его слов.

Существуют и более глубокие связи между высказываниями, например, *целого и части, общего и конкретного, причины и следствия.* Отношение целого и части показывает следующее высказывание:

1.28. Квадратной называется матрица, в которой количество строк равно количеству столбцов.

1.39. Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные под главной диагональю, равны нулю, называется треугольной. (1.28)

Связь общего и конкретного иллюстрируется следующими высказываниями:

2.1. Для матриц определены операции сравнения, сложения, вычитания, умножения на число и умножения матрицы на матрицу.

2.15. Операция сложения определена только для матриц одинакового размера (2.1).

2.16. Суммой двух матриц называется матрица, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых.

Связь причины и следствия представлена, например, в следующем примере:

2.63. Арифметические операции со строками и столбцами матрицы выполняются по одним и тем же правилам.

2.64. Правила, по которым выполняются арифметические операции со строками и столбцами матрицы, могут быть сформулированы для общего понятия ряда матрицы (1.9, 2.63)

Связи существуют не только между высказываниями одного раздела, но и теми высказываниями, которые расположены в различных разделах семантического конспекта. Так, приведенное выше высказывание 2.64, принадлежащее разделу «Операции с матрицами», связано с высказыванием 1.9 из раздела «Виды матриц»:

1.9. Строку и столбец матрицы называют общим термином – ряд матрицы.

Описанная работа очень полезна для установления таких связей в сознании студентов.

7. По мнению преподавателей, применяющих в обучении семантический конспект, а также студентов, он оказался эффективным средством в самостоятельной работе по закреплению материала, при подготовке к практическим и лабораторным занятиям. Конспект помогает уяснить структуру материала, освещаемого на лекции, выделить и запомнить существенные моменты. При этом "выживаемость" знаний существенно возрастает. Студенты отмечают особую ценность конспекта при подготовке к экзамену, когда из-за обилия информации существует опасность не выделить и не усвоить главное. Регулярно обращаясь к семантическому конспекту в течение семестра (а это не требует сколько-нибудь значительных затрат времени), студент к сессии помнит все высказывания, т. е. мысли, составляющие существо курса, у него готов его каркас, и он быстро наполняет его знаниями, которые не вошли в семантический конспект.

Семантический конспект чрезвычайно полезен и для преподавателя. Во-первых, преподаватель может активно применять конспект в процессе обучения; во-вторых, работа над конспектом дает преподавателю новые более глубокие представления об учебном предмете.

8. Автор выражает искреннюю благодарность профессору Г. А. Атанову за руководство работой.

1. Атанов Г.А.Возрождение дидактики – залог развития высшей школы. – Донецк: Из-во ДОУ, 2003.
2. Атанов Г.А., Пустынникова И.Н. Обучение и искусственный интеллект, или Основы современной дидактики высшей школы. – Донецк: Из-во ДОУ, 2002.
3. Бугір М.К. Математика для економістів. К.: Академія, 1998.
4. Евсеева Е. Г. Опорный конспект по курсу «Высшая математика» по теме «Линейная алгебра». – Донецк: ДИСО, 1999.
5. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М., Инфра-М., 1999.
6. Ковтунова И.И. Современный русский язык.- М.: Просвещение, 1976.
7. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2002.
8. Машбиц Е.И. Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения. – М.: Педагогика, 1988.
9. Evseeva, E. Semantic subject student model in the linear algebra // Proceedings of the International Conference PEG-2003, St.-Petersburg, Russia, 2003. – P.307-310.

Summary. General questions of the student modeling are considered. The subject semantic model in the linear algebra is given.