Швидке перетворення Фур'є

1. Матрична реалізація ДПФ

За допомогою ДПФ відповідно до формули $\dot{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ вхідний вектор дискретних відліків трансформується у вектор спектральних коефіцієнтів. Перетворення реалізується як множення деякої квадратної матриці на вхідний вектор-стовпець: $y=A\cdot x$, де A – матриця перетворення (рис.1). Загальна формула для елемента матриці, розташованого в *n*-стовпці *k*-рядка: $A(k,n)=e^{-j2\pi\frac{(k-1)(n-1)}{N}}$, де k=1…N,n=1…N...

$$
\begin{vmatrix} \dot{X}(0) \\ \dot{X}(1) \\ \dot{X}(2) \\ \dot{X}(3) \\ \dots\dots \\ \dot{X}(N-1) \end{vmatrix}
=
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline
1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}1\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{N}1\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}1\cdot 3} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}1(N-1)} \\ \hline
1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}2\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2\cdot 3} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ \hline
1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}3\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{N}3\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}3\cdot 3} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}3(N-1)} \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline
1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)1} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)3} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \\ \hline
\end{array}
\begin{vmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ \dots \\ x(N-1) \end{vmatrix}
$$

Рис.1 Матричне ДПФ

Наприклад, для ДПФ-8 вираження має вигляд: $\dot{X}(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}$, k=0,…,7... Позначимо $K=2\pi k/8$. Тоді

$$\dot{X}(k)=x(0)e^{-jK0}+x(1)e^{-jK1}+x(2)e^{-jK2}+x(3)e^{-jK3}+...+x(7)e^{-jK7}.$$

Відповідно до вираження $\dot{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ для обчислення одного коефіцієнта ДПФ необхідно виконати N комплексних множень і $(N-1)$ додавань. Наприклад, обчислення кожного зі членів ДПФ-8 передбачає 8 множень і 7 додавань. Ці обчислення треба зробити стосовно кожної з гармонік. Таким чином, для ДПФ-8 треба виконати 8^2=64 операцій множення та 8х7=56 операцій додавання, усього 120 операцій. У загальному випадку ці значення рівні N^2 і $N(N-1)$ відповідно. При $N=1024$ потрібно приблизно один мільйон операцій множення та один мільйон операцій додавання.

Обчислення ДПФ можна прискорити, розділивши набір відліків на частині. Такі способи обчислення ДПФ називаються *швидке перетворення Фур'є - ШПФ (Fast Fourier Transform - FFT)* і використовують надмірність виражень для ДПФ. Наприклад, при k=1, n=2 $e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$, що аналогічно при k=2, n=1 (це треба з матриці ДПФ).

Алгоритм ШПФ був уперше опублікований в 1965 році в статті Кулі (Cooly) і Т'юкі (Tukey).

2. ШПФ із проріджуванням за часом

При ШПФ із проріджуванням за часом (decimation in time – DIT, *тимчасова децимація*) вихідна послідовність відліків розбивається на дві - з парними та непарними номерами (N - парне число, інакше у вхідну послідовність додається нуль) (рис.2):

$$\dot{X}(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)\cdot W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)\cdot W_N^{(2m+1)k} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)\cdot W_N^{2mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)\cdot W_N^{2mk} = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)\cdot W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)\cdot W_{N/2}^{mk}$$

У виражені використане позначення $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, при якому формула для ДПФ має вид:

$$\dot{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W_N^{kn}, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N\text{-}1\ldots$$

При цьому $W_N^2 = e^{-j2\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$.

Дві суми являють собою ДПФ двох послідовностей половинної довжини: перша $x_1(n) = x(2m)$- відліки з парними номерами, а друга $x_2(n) = x(2m+1)$ - відліки з непарними номерами. Кожне із цих ДПФ має розмірність $N/2$. Таким чином, $\dot{X}(k) = \dot{X}_1(k) + W_N^k\,\dot{X}_2(k)$, де $\dot{X}_1(k)$ й $\dot{X}_2(k)$ - ДПФ послідовностей відліків з парними та непарними номерами.

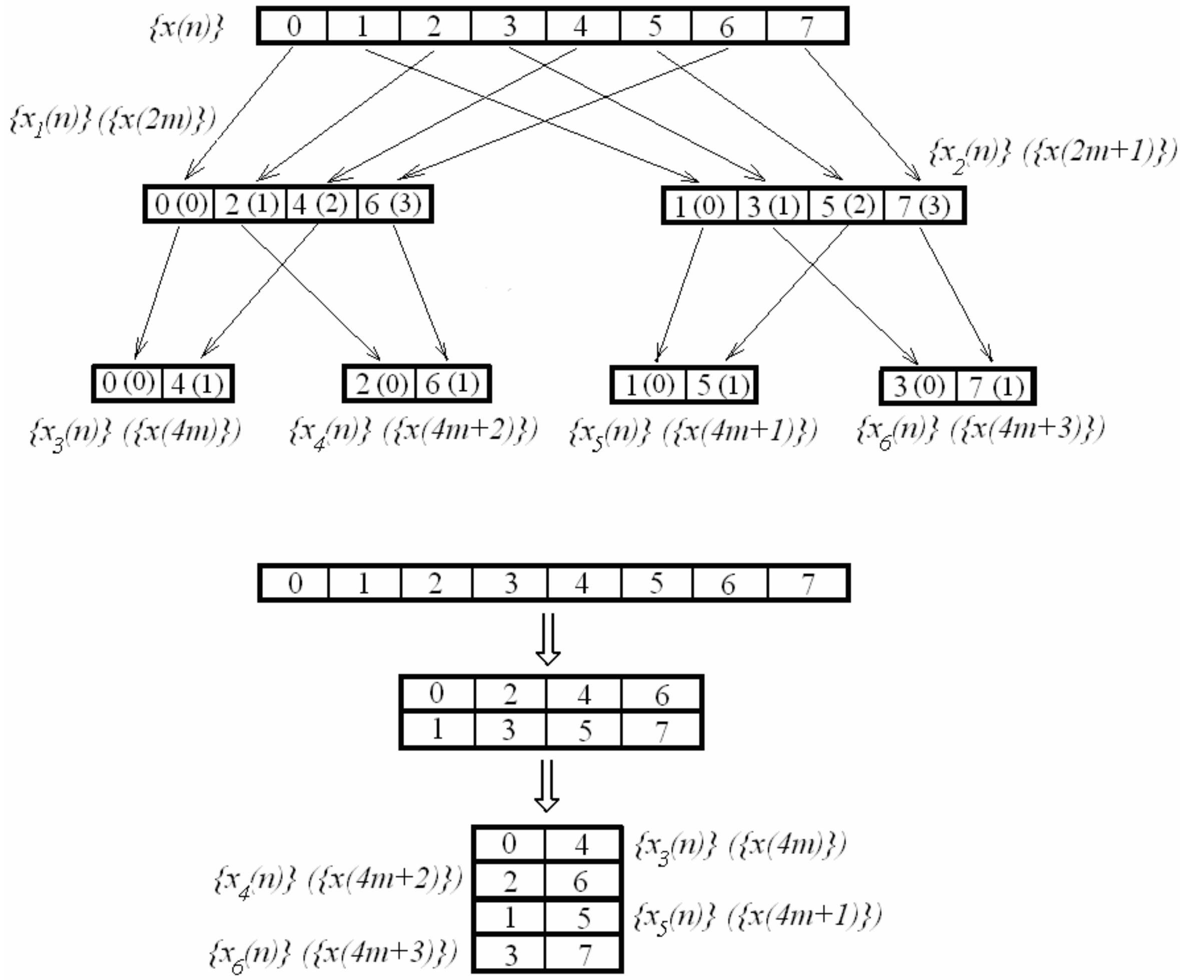

Рис.2 Перетворення вхідного вектора відліків відповідно до алгоритму с децимацією за часом

ДПФ має розмірність *N/2* (*m*=0...3…3) і, отже, формує *N/2* спектральних коефіцієнтів, що відповідають $0 \le k < N/2$. Для розрахунку коефіцієнтів більше, ніж *N/2* необхідно використовувати вираження:

$$\dot{X}\left(k+\frac{N}{2}\right)=\dot{X}_1\left(k+\frac{N}{2}\right)+W_N^{\left(k+\frac{N}{2}\right)}\dot{X}_2\left(k+\frac{N}{2}\right).$$

Виходячи із властивості періодичності спектра дискретного сигналу: $\dot{X}\left(k+\frac{N}{2}\right)=\dot{X}(k)$ (період дорівнює *N/2* , тому що ДПФ половинної послідовності). Крім того,

$$W_N^{(k+N/2)}=W_N^k W_N^{N/2}=W_N^k e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{N}{2}\right)}=W_N^k e^{-j\pi}=-W_N^k,\ \left(e^{-j\pi}=(-1)\right),$$

$$W_N^{(k-N/2)}=W_N^k W_N^{-N/2}=\frac{W_N^k}{e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{N}{2}\right)}}=-W_N^k.$$

З обліком цього: $\dot{X}\left(k+\frac{N}{2}\right)=\dot{X}_1(k)-W_N^k\dot{X}_2(k).$

Приклад обчислення ДПФ-8 розбивкою його на два ДПФ-4 із проріджуванням за часом показаний на рис.3.

Використано наступне позначення для комплексних експонент: $W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$. Кожний блок, що поєднує результати двох ДПФ, має два вхідних і два вихідних сигнали. Один із вхідних сигналів множиться на комплексну експоненту W_N^k, після чого підсумується із другим вхідним сигналом і віднімається з нього, формуючи два вихідних сигнали. Дана операція одержала назву "метелик" (butterfly) (рис.4).

Таким чином, для цього приклада загальна кількість операцій дорівнює 68 -у ДПФ-4 4*4*2=32 множень і 4*3*2=24 додавань, а потім 4 множення на експоненту та 8 підсумкових додавань-вирахувань у метелику.

Якщо *N/2* теж є парним числом, тобто *N* ділиться на 4, можна продовжити процедуру через 4 ДПФ розмірності *N/4*, що дозволяє ще більш скоротити обсяг обчислень.

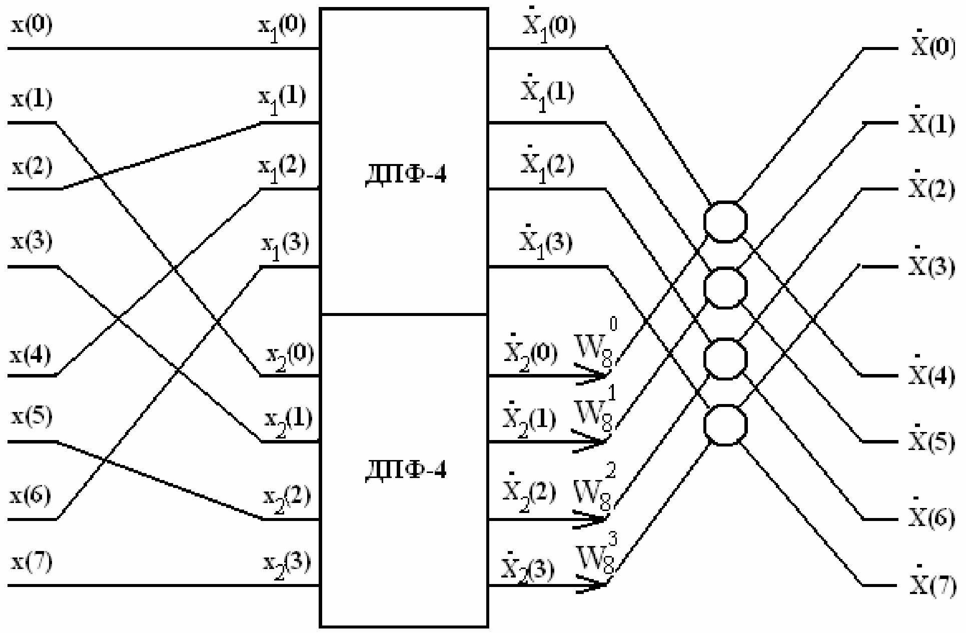

Рис.3 Приклад обчислення ШПФ-8 із проріджуванням за часом

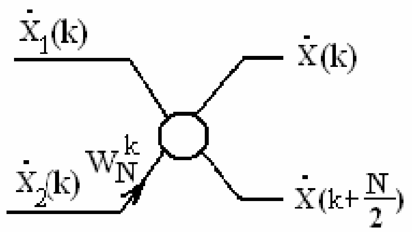

Рис.4 "Метелик" ШПФ із децимацією за часом

У свою чергу, блок ДПФ-4 можна перетворити через два ДПФ-2 (рис.5). Методика перетворення аналогічна. Відмінність складається в довжині послідовностей. Крім того, якщо блок ДПФ-4 є складовою частиною іншого блоку ДПФ (як у розглянутому прикладі), то коефіцієнти W приводяться до однакової основи (у даному прикладі - до основи 8).

Таким чином, $\dot{X}_1(k)=\dot{X}_3(k)+W_{N/2}^{k}\,\dot{X}_4(k)=\dot{X}_3(k)+W_N^{2k}\,\dot{X}_4(k)$, де $\dot{X}_3(k)$ та $\dot{X}_4(k)$ - ДПФ послідовностей з парними та непарними номерами. Для старшої половини спектральних коефіцієнтів:

$$\dot{X}_1\left(k+\frac{N}{4}\right)=\dot{X}_3(k)-W_N^{2k}\,\dot{X}_4(k).$$

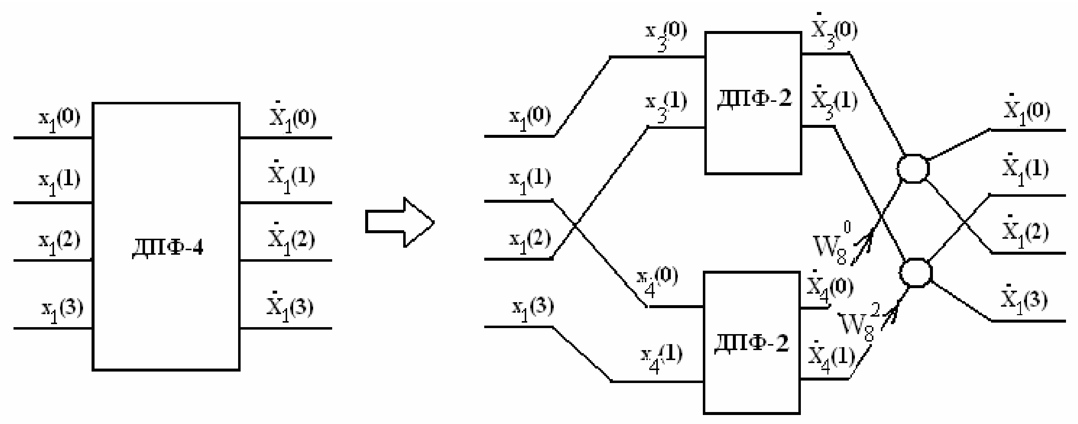

Рис.5 Перетворення ШПФ-4

Перетворення блоку "ДПФ-2": $\dot{X}_3(k)=\sum_{n=0}^{1}x_3(n)W_2^{nk}$.

$$\dot{X}_3(0)=x_3(0)W_2^0+x_3(1)W_2^0$$

$$\dot{X}_3(1)=x_3(0)W_2^0+x_3(1)W_2^1$$

З обліком того, що $W_2^0=1$ та $W_2^4=-1$, після перетворення маємо:

$$\dot{X}_3(0)=x_3(0)+x_3(1)=x_3(0)+W_8^0x_3(1),$$

$$\dot{X}_3(1)=x_3(0)-x_3(1)=x_3(0)-W_8^0x_3(1).$$

Таким чином, ДПФ-2 – це метелик, у якому W=1 (рис.6).

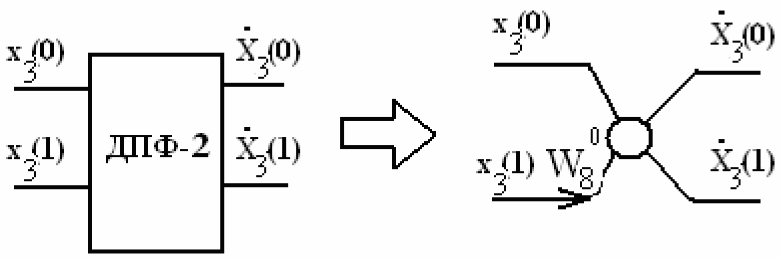

Рис.6 Перетворення ШПФ-2

Результат повного перетворення ДПФ-8 показаний на рис.7, на якому використане позначення $W_N^k=W^k$.

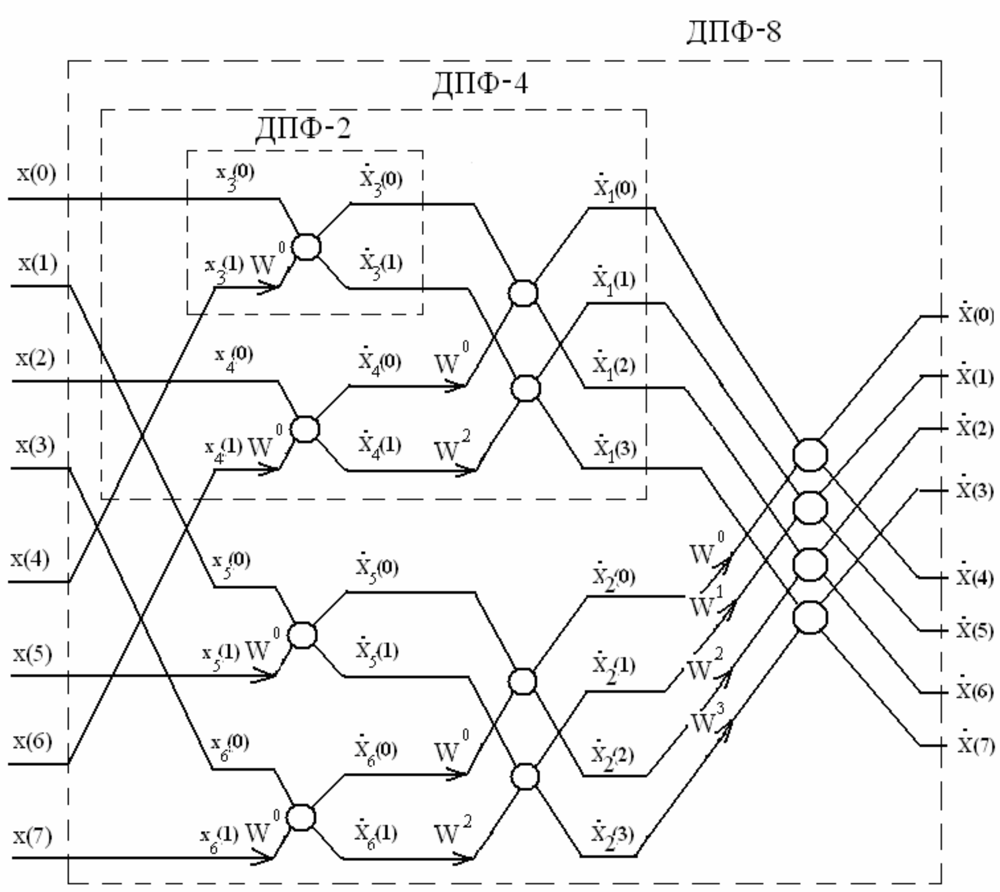

Рис.7 ШПФ-8 з послідовною децимацією за часом в 2 рази

Обчислювальні переваги ШПФ: ШПФ-N містить $N/2$ метеликів на кожному каскаді та $\log_2(N)$ каскадів. Кожний метелик містить одну операцію комплексного множення. Отже, ШПФ містить $\frac{N}{2}\log_2(N)$ операцій множення замість N^2 при ДПФ. Таким чином, економія на кількості операцій множення становить $N^2 - \frac{N}{2}\log_2(N)$.

Кожний метелик містить дві операції комплексного додавання-вирахування, тобто для ШПФ необхідно $N\log_2(N)$ операцій додавання-вирахування замість $N(N-1)$ операцій додавання в ДПФ. Таким чином, економія на кількості операцій додавання становить $N(N-1) - N\log_2(N)$. Для приклада ДПФ-8 ця економія становить 64-12=52 операції множення та 56-24=32 операції додавання.

У загальному випадку, економія оцінюється в такий спосіб: для операцій множення - $\frac{N^2}{\frac{N}{2}\log_2(N)} = \frac{2N}{\log_2(N)}$, для додавань - $\frac{N(N-1)}{N\log_2(N)} = \frac{N-1}{\log_2(N)}$.

Таким чином, для випадку N=1024 кількість множень скорочується в 204,8 раз, додавань – в 102,3 раз.

Алгоритм **зворотного ШПФ** аналогічний алгоритму прямого ШПФ. Для цього досить поміняти в наведених формулах знак у показниках комплексних експонент і додати, якщо буде потреба, розподіл на N:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\dot{X}(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\dot{X}(k)\cdot W_N^{-kn} =$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{m=0}^{N/2-1}\dot{X}(2m)\cdot W_N^{-2mn} + \sum_{m=0}^{N/2-1}\dot{X}(2m+1)\cdot W_N^{-(2m+1)n}\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{m=0}^{N/2-1}\dot{X}(2m)\cdot W_{N/2}^{-mn} + W_N^{-n}\sum_{m=0}^{N/2-1}\dot{X}(2m+1)\cdot W_{N/2}^{-mn}\right]$$

Якщо ДПФ реалізується відповідно до виражень із множником $1/\sqrt{N}$, то цей множник ураховується як при прямому, так і при зворотному ДПФ. Як наслідок, алгоритми розрізняються тільки знаком у ступені експоненти.

3. ШПФ із проріджуванням за частотою

ШПФ із проріджуванням за частотою (decimation in frequency – DIF, *частотна децимація*) передбачає розбивку вихідної послідовності відліків на дві частини, які слідують одна за одною (N - парне число) (рис.8):

$$\dot{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N/2-1}x(m)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} + \sum_{m=0}^{N/2-1}x\left(m+\frac{N}{2}\right)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(m+\frac{N}{2}\right)k}$$

У другій сумі є множник $e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}k} = e^{-j\pi k} = (-1)^k$. У такий спосіб:

$$\dot{X}(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1}x(m)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} + (-1)^k\sum_{m=0}^{N/2-1}x\left(m+\frac{N}{2}\right)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N/2-1}x(m)\cdot W_N^{mk} + (-1)^k\sum_{m=0}^{N/2-1}x\left(m+\frac{N}{2}\right)\cdot W_N^{mk} = \sum_{m=0}^{N/2-1}\left[x(m) + (-1)^k x\left(m+\frac{N}{2}\right)\right]\cdot W_N^{mk}$$

Після об'єднання обох сум:

- для парних гармонік: $\dot{X}(2k) = \sum_{m=0}^{N/2-1}\left(x(m) + x\left(m+\frac{N}{2}\right)\right)\cdot W_{N/2}^{mk}$,

- для непарних гармонік:

$$\dot{X}(2k+1) = \sum_{m=0}^{N/2-1}\left(x(m) - x\left(m+\frac{N}{2}\right)\right)\cdot W_N^{(2k+1)m} = \sum_{m=0}^{N/2-1}\left[\left(x(m) - x\left(m+\frac{N}{2}\right)\right)\cdot W_N^{m}\right]\cdot W_{N/2}^{mk},$$

k=0, …, N/2-1

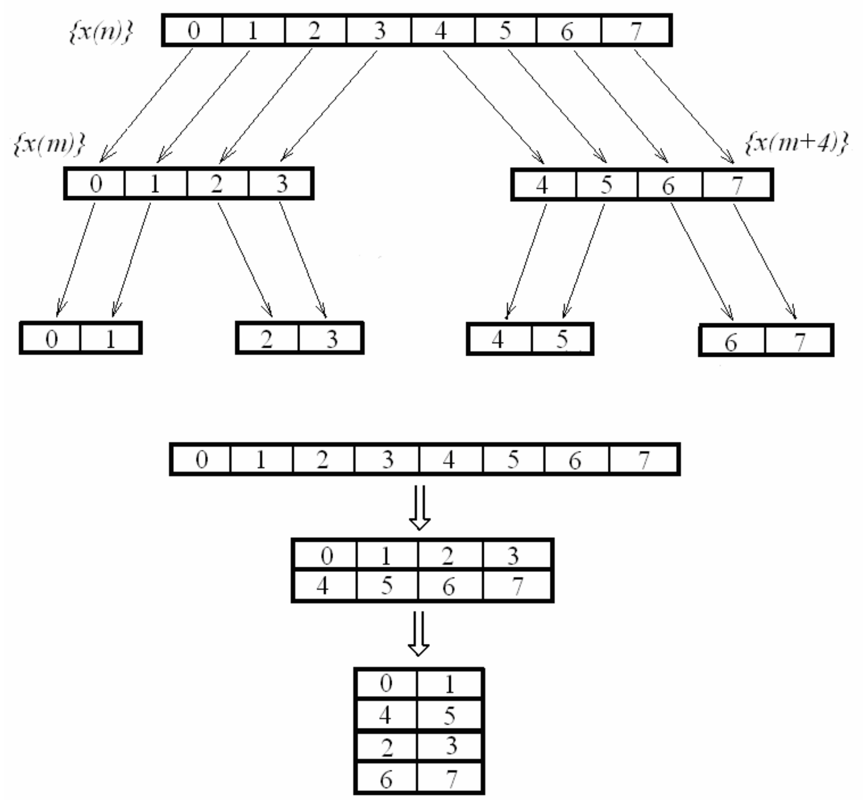

Рис.8 Перетворення вхідного вектора відліків відповідно до алгоритму с децимацією за частотою

Обчислення організуються в такий спосіб:

1). Вихідна послідовність $\{x(n)\}$ довжиною $\boldsymbol{N}$ розділяється на дві послідовності $\{x_1(m)\}$ й $\{x_2(m)\}$ довжиною $N/2$ відповідно до формул:

$$x_1(m) = x(m) + x\left(m + \frac{N}{2}\right), \quad x_2(m) = \left(x(m) - x\left(m + \frac{N}{2}\right)\right) W_N^m .$$

2). ДПФ послідовності $\{x_1(m)\}$ формує спектральні коефіцієнти з парними номерами, а ДПФ послідовності $\{x_2(m)\}$ - з непарними:

$$\dot{X}(2k) = \dot{X}_1(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_1(m) \cdot W_{N/2}^{mk} ,$$

$$\dot{X}(2k+1) = \dot{X}_2(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_2(m) \cdot W_{N/2}^{mk} ,$$

k=0,…,N/2-1...

Ці суми являють собою ДПФ суми та різниці половин вхідної послідовності, при цьому різниця перед обчисленням ДПФ множиться на комплексні експоненти W_N^m. Кожне із двох ДПФ має розмірність $N/2$.

Приклад обчислення ДПФ-8 розбивкою його на два ДПФ-4 із проріджуванням за частотою показаний на рис.9. Структура "метелика" ШПФ із децимацією за частотою показана на рис.10. На рис.11 показаний приклад реалізації ДПФ-8.

Обчислювальна продуктивність розраховується аналогічно алгоритму з децимацією за часом.

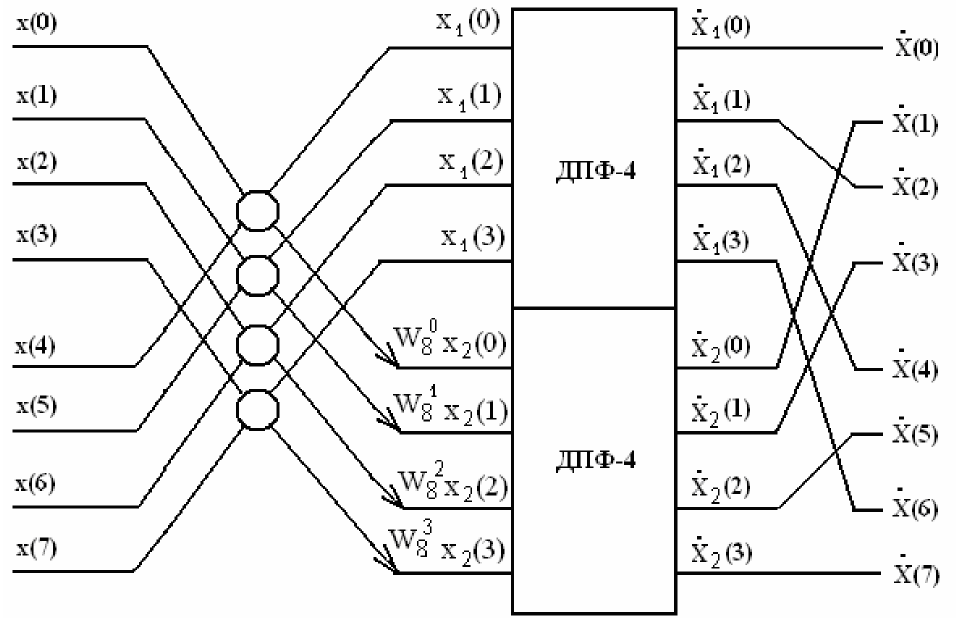

Рис.9 Приклад обчислення ШПФ-8 з децимацією за частотою

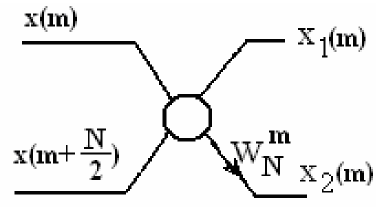

Рис.10 "Метелик" ШПФ із децимацією за частотою

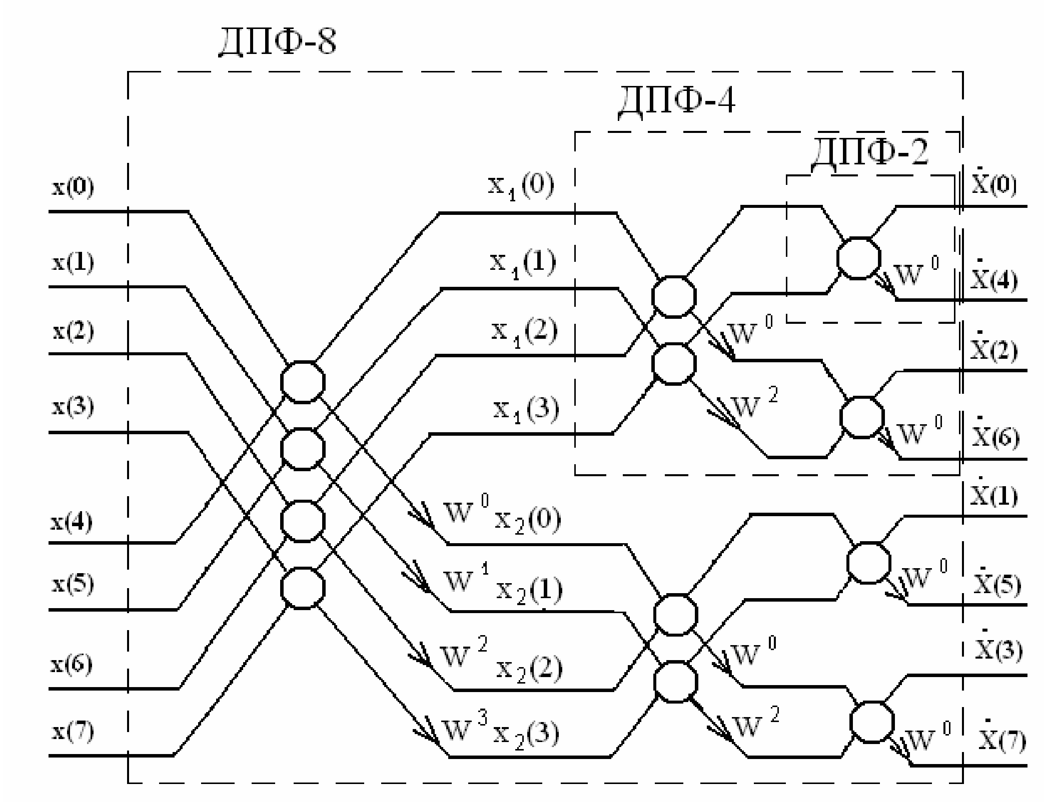

Рис.11 ШПФ-8 з послідовною децимацією за частотою в 2 рази

Для **зворотного ШПФ із децимацією за частотою:**

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\dot{X}(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N/2-1}\dot{X}(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}+\sum_{k=N/2}^{N-1}\dot{X}(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right]=$$

$$=\frac{1}{N}\left[\sum_{m=0}^{N/2-1}\dot{X}(m)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nm}+\sum_{m=0}^{N/2-1}\dot{X}\left(m+\frac{N}{2}\right)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}n\left(m+\frac{N}{2}\right)}\right]$$

У результаті:

- для парних відліків: $x(2n)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1}\left[\dot{X}(m)+\dot{X}\left(m+\frac{N}{2}\right)\right]\cdot W_{N/2}^{-nm}$,

- для непарних відліків: $x(2n+1)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1}\left[\left(\dot{X}(m)-\dot{X}\left(m+\frac{N}{2}\right)\right)\cdot W_{N}^{-m}\right]\cdot W_{N/2}^{-nm}$,

$k=0, \ldots, N/2-1$

Якщо ДПФ реалізується відповідно до виражень із множником $1/\sqrt{N}$, то множник ураховується як при прямому, так і при зворотному ДПФ. Як наслідок, алгоритми розрізняються тільки знаком у ступені експоненти.

Ділити вихідну послідовність можна на будь-яку кількість частин. Кількість фрагментів, на які розбивається одна послідовність на кожному кроці, називається *підставою ШПФ* (у попередніх прикладах підстава дорівнює 2).

Кількість вхідних відліків визначає *розмір (блок) ШПФ* (у попередніх прикладах розмір ШПФ дорівнює 8 (ШПФ-8)).

Найбільше прискорення обчислень досягається при розмірі блоку ДПФ, рівному ступені 2, при якому блоки ДПФ можна перетворювати до одержання блоків ДПФ-2. При розбивці вхідної послідовності на інші частини (розкладанні числа N на інші множники) прискорення обчислень також можливо.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА З ТЕМИ

1. *Сергиенко А.Б.. Цифровая обработка сигналов.-СПб.:Питер,2011.-768с.*
2. *Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов.-М.:"Бином-Пресс",2007.-656с.*
3. *Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов.–М.:Мир,1989.–448с.*