УДК 517.387

Волков С.В. (старший преподаватель кафедры «Естественных наук» КИИ ДонНТУ)

Голуб Н.И. (студент факультета «Технологии и организации производства» гр. ГС-09-А)

# К ОБОБЩЕНИЮ ПОНЯТИЯ ПОДИНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

*Способность [фантазии] чрезвычайно ценна. Напрасно думают, что она нужна только поэту. Это глупый предрассудок! Даже в математике она нужна, даже открытие дифференциального и интегрального исчислений невозможно было бы без фантазии.* ***Фантазия есть качество величайшей ценности.*** *(В. И. Ленин)*

*В данной работе введен в рассмотрение более общий вид дифференциалов функций. Как следствие, через указанный вид дифференциалов, введен новый вид определенных интегралов, $V-$интегралов. Авторами сформулированы и доказаны условия существования таких интегралов, установлены их свойства, выявлена связь (разработана техника вычислений) $V-$интегралов с интегралами Римана.*

Невозможно переоценить роль определенного интеграла в научно–исследовательской деятельности инженера-теоретика, экономиста и др.. Решение огромного количества прикладных задач стало возможным благодаря именно теории дифференциального и интегрального исчислений. Однако, сложившиеся стереотипы по отношению к понятиям интеграла, дифференциала и другим математическим понятиям в некотором роде ограничивают нас.

Пусть требуется найти площадь криволинейного сектора (см. рис.1), который ограничен произвольной кривой линией $\rho=\rho(\varphi)$ и лучами $\varphi_1,\varphi_2$ (полярные координаты).

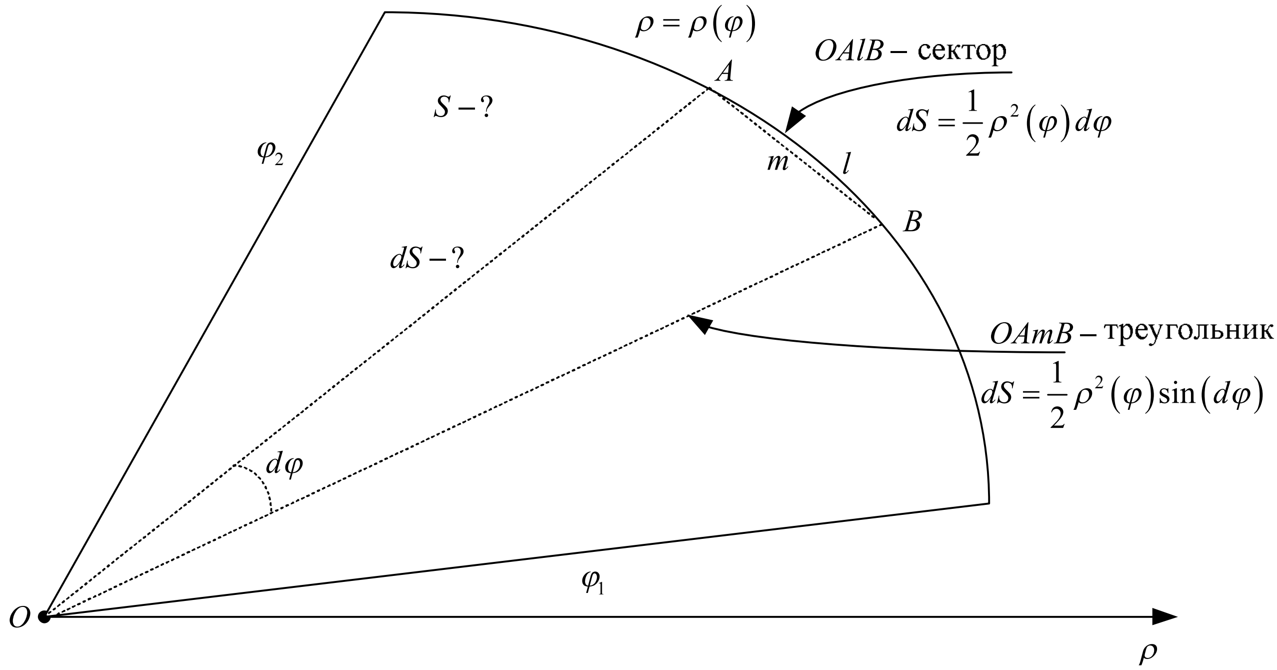


Рисунок 1. Криволинейный сектор.

Разобьем криволинейный сектор на элементарные части и допустим, что форма каждой такой части будет ***круговым сектором***, дифференциал площади которого $dS=\frac{1}{2}\rho^2\left(\varphi\right)d\varphi$, тогда площадь всей фигуры $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\left(\varphi\right)d\varphi$ – что соответствует устоявшемуся представлению о дифференциале и интеграле. Однако, можно допустить, что форма элементарной части не будет круговым сектором, а будет ***равнобедренным треугольником***, дифференциал площади которого $dS=\frac{1}{2}\rho^2\left(\varphi\right)\sin\left(d\varphi\right)$, тогда площадь всей фигуры $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\left(\varphi\right)\sin\left(d\varphi\right)$. Подинтегральное выражение второго интеграла не соответствует сложившимся стереотипам и кажется казусом. У студентов возникает недоумение: как верные рассуждения привели к интегралу, структура которого не позволяет применить к нему известные им правила интегрирования?

Логично рассмотреть возможность нахождения таких интегралов, общий вид которых представим

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)V\left(dx\right), \tag{1}$$

и установить, представляется ли возможность их вычисления, какова их связь с обычными интегралами Римана $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$. Понятно, что все эти ответы, в какой – то мере, будут зависеть от функции $V(x)$, ее поведения и структурных свойств.

Для начала введем понятие $V$ – интегралов, интегралов вида (1).

Пусть на отрезке $\left[a,b\right]$ задана некоторая непрерывная функция $f\left(x\right)$ и в окрестности нуля задана некоторая непрерывная функция $V\left(x\right)$, назовем ее производящей функцией.

Возьмем произвольное $T$ – разбиение данного отрезка

$$T: a=x_0<x_1<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_n=b.$$

Длину частичного интервала обозначим $\Delta x_k, k=\overline{0,n-1}$, возьмем внутри каждого частичного интервала точку $c_k$, $k=\overline{0,n-1}$ и составим сумму

$$I_n=\sum_{k=0}^{n-1}f\left(c_k\right)V\left(\Delta x_k\right). \tag{2}$$

Определенным $V$ – интегралом функции $f\left(x\right)$ в пределах от $a$ до $b$ будем называть предел, если он существует, к которому стремится сумма (2) при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала, то есть

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)V\left(dx\right)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(c_k\right)V\left(\Delta x_k\right), \tag{3}$$

где $\lambda=\max\limits_k\left(\Delta x_k\right), k=\overline{0,n-1}$.

В результате изучений поведения пределов (3), получены условия существования интеграла (1) и установлена его связь с соответствующим интегралом Римана.

Для существования интеграла (1) необходимо и достаточно:

- непрерывности функции $f(x)$ на $[a,b]$;
- бесконечной дифференцируемости функция $V(x)$ в окрестности нуля, и ограниченности этих производных;
- $V(0)=0$;

при этом имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)V(dx)=V'(0)\int_a^b f(x)dx, \qquad (4)$$

которое устанавливает прямую связь между $V-$интегралами и интегралами Римана.

Основные свойства $V-$интегралов аналогичны свойствам определенного интеграла. Авторы советуют доказательство основных свойств $V-$интегралов провести читателям самостоятельно, используя технику доказательств аналогичных свойств определенных интегралов и формулы (3,4).

Равенство (4) позволяет расширить область применения теории интегрального и дифференциального исчислений. Появляется возможность вычисления новых видов интегралов.

Например:

1. $\int_a^b (dx)^2=\left(x^2\right)'\Big|_{x=0}\int_a^b dx=0$.
2. $\int_a^b \ln(1+2dx)=\left(\ln(1+2x)\right)'\Big|_{x=0}\int_a^b dx=2(b-a)$.
3. $\int_a^b \sqrt{dx}=\left(\sqrt{x}\right)'\Big|_{x=0}\int_a^b dx=\infty$.
4. $\int_a^b \sqrt{1+2dx}=\left(\sqrt{1+2x}\right)'\Big|_{x=0}\int_a^b dx=b-a$.
5. $\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\sin(d\varphi)=\frac{1}{2}(\sin x)'\Big|_{x=0}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi$.

Наибольший интерес будет представлять нахождение несобственных интегралов с производящей функцией. Так, например несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$, очевидно, расходится

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\ln x\big|_1^b\right)=\lim_{b\to\infty}(\ln b)=\infty,$$

однако, можно подобрать производящую $V-$интеграл функцию и получить сходящийся $V-$интеграл. Найдем такую производящую функцию среди степенных $V(x)=x^r$, $r>1$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}(dx)^r=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}(dx)^r=\lim_{b\to\infty}\left(\lim_{\alpha\to 0}r\alpha^{r-1}\left(\ln x\big|_1^b\right)\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\lim_{\alpha\to 0}r\alpha^{r-1}\cdot\ln b\right)=\lim_{b\to\infty}\left(r\cdot\frac{\ln b}{b^{r-1}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{r}{1-r}\cdot\frac{\frac{1}{b}}{b^{r-2}}\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{r}{1-r}\cdot\frac{1}{b^{r-1}}\right)=0\ (\forall r>1).$$

Как видим, любая производящая функция вида $V(x)=x^r, r>1$, образует сходящийся к нулю несобственный интеграл.

В перспективе авторы будут:

- вести работу над доказательством дополнительных свойств $V-$интегралов, связанных со структурными характеристиками производящей функции $V(x)$;
- вводить в рассмотрение новые виды дифференциальных уравнений и искать способы их интегрирования;
- искать новые возможностей по применению $V-$интегралов.

Литература:


1. Андре Анго Математика для электро– и радиоинженеров. – М.: «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 780с.