ЧАБАН Є. О. КОБІВНИК А. Р., ВОЛКОВ С.В.

ВСТАНОВЛЕННЯ ВПЛИВУ СТРУКТУРНИХ ЗМІН В ОЗНАЧЕННІ МАТЕМАТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ НА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКУ (НА ПРИКЛАДІ ВИЗНАЧНИКІВ)

Способность [фантазии] чрезвычайно ценна. Напрасно думают, что она нужна только поэту. Это глупый предрассудок! Даже в математике она нужна, даже открытие дифференциального и интегрального исчислений невозможно было бы без фантазии. ***Фантазия есть качество величайшей ценности.***

В. И. Ленин

У роботі введено до розгляду новий математичний об'єкт, тедермінант, отриманий в результаті трансформації означення вже відомого об'єкта визначника. Сформульовані, доведені авторами, властивості – теореми отриманого об'єкта та проведена аналогія з відповідними характеристиками визначників.

Визначник (або детермінант) – один з основних об'єктів лінійної алгебри. Багатьом відомо його визначення для квадратних матриць першого, другого, третього порядків і спосіб зниження порядку, теорема Лапласа. Однак, не всі користуються загальним визначенням визначника, за яким визначник квадратної матриці довільного порядку визначається як многочлен від елементів даної матриці за формулою:

$$\Delta[A_n] = \det[A_n] = \sum_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n} (-1)^{N(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)} \cdot a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{\beta_n n}, \quad (1)$$

де $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ – перестановка чисел від 1 до n, за якими йде підсумовування;

$N(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – число інверсій в перестановці.

Таким чином, у визначник увійде $n!$ доданків, які називають „членами визначника".

Автори пропонують розглянути новий об'єкт (тедермінант), змінивши конструкцію формули по знаходженню визначника. А саме: замінити операцію множення елементів матриці на їх додавання, а операцію додавання цих добутків на їх множення. Як далі буде зазначено, така трансформація означення визначника призведе до своєрідної трансформації його властивостей за своїм родом контраналогією властивостей визначника.

Тедермінантом квадратної матриці $A_n = A(a_{ij})$ $(i, j = \overline{1,n})$, порядку n, у якої $\sum_{i=1}^{n} a_{\alpha_i,i} \neq 0$, назвемо многочлен від її елементів, отриманий за формулою:

$$\operatorname{ted}[A_n] = \operatorname{ted}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{\beta_i,i} \right)^{(-1)^{N(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}}, \quad (2)$$

де $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ – перестановка чисел від 1 до n, за якими йде множення;

$N(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – число інверсій у перестановці.

Отже, у тедермінант увійде $n!$ множників, які також будемо називати „членами тедермінанта”.

Нехай задані квадратні матриці A_n. Запишемо формули для обчислення тедермінанта матриць $n=1,2,3$ порядку. Так, згідно формули (2) матимемо:

- для матриці першого порядку тедермінантом є сам елемент цієї матриці:

$$\operatorname{ted}[A_1]=\operatorname{ted}(a_{11})=a_{11}$$

- для матриці другого порядку тедермінант визначається так:

$$\operatorname{ted}[A_2]=\operatorname{ted}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\frac{a_{11}+a_{22}}{a_{12}+a_{21}}$$

- формула обчислення тедермінанта матриці третього порядку така:

$$\operatorname{ted}[A_3]=\operatorname{ted}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\frac{(a_{11}+a_{22}+a_{33})(a_{12}+a_{23}+a_{31})(a_{21}+a_{32}+a_{13})}{(a_{31}+a_{22}+a_{13})(a_{32}+a_{23}+a_{11})(a_{21}+a_{12}+a_{33})}$$

Порівняння властивостей тедермінантів та визначників

<table>
<tr><td>1.а</td><td colspan="2">Тедермінант матриці, транспонованої до даної, дорівнює тедермінанту даної матриці.</td><td>$\operatorname{ted}[A^T]=\operatorname{ted}[A]$</td></tr>
<tr><td>1.б</td><td colspan="2">Визначник матриці, транспонованої до даної, дорівнює визначнику даної матриці.</td><td>$\det[A^T]=\det[A]$</td></tr>
<tr><td>2.а</td><td rowspan="2">Якщо в даній матриці змінимо порядок двох довільних рядків (стовпців) – отримаємо матрицю A^*, то:</td><td>тедермінант утвореної матриці буде значенням оберненим до тедермінанта даної матриці.</td><td>$\operatorname{ted}[A^*]=\dfrac{1}{\operatorname{ted}[A]}$</td></tr>
<tr><td>2.б</td><td>визначник утвореної матриці буде значенням протилежним до визначника даної матриці.</td><td>$\det[A^*]=-\det[A]$</td></tr>
<tr><td>3.а</td><td colspan="2">Тедермінат даної матриці не зміниться, якщо всі її елементи збільшити в k разів.</td><td>$\operatorname{ted}[A(k\cdot a_{ij})]=\operatorname{ted}[A]$</td></tr>
<tr><td>3.б</td><td colspan="2">Визначник даної матриці зміниться в k^n раз, якщо всі її елементи збільшити в k разів (n – порядок матриці).</td><td>$\det[A(k\cdot a_{ij})]=k^n\det[A]$</td></tr>
<tr><td>4.а</td><td colspan="3">Тедермінат матриці не зміниться, якщо всі елементи довільного рядка (стовпця) даної матриці збільшити, а іншого рядка (стовпчика) зменшити на одне й те саме число.</td></tr>
<tr><td>4.б</td><td colspan="3">Визначник матриці не зміниться, якщо всі елементи довільного рядка (стовпця) даної матриці збільшити в k раз, а іншого рядка (стовпчика) зменшити в k раз.</td></tr>
<tr><td>5.а</td><td colspan="3">Тедермінант даної матриці дорівнює одиниці, якщо різниці відповідних елементів пари рядків (стовпців) даної матриці рівні.</td></tr>
<tr><td>5.б</td><td colspan="3">Визначник даної матриці дорівнює нулю, якщо відношення відповідних елементів пари рядків (стовпців) даної матриці рівні.</td></tr>
</table>

6.а	Тедермінант даної матриці дорівнює одиниці, якщо елементи, хоча б пари рядків (стовпців) даної матриці є членами арифметичної прогресії з однаковою різницею (наслідок властивості 5.а).
6.б	Визначник даної матриці дорівнює нулю, якщо елементи хоча б пари рядків (стовпців) даної матриці є членами геометричної прогресії з однаковим знаменником (наслідок властивості 5.б).
7.а	Тедермінант матриці з хоча б двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює одиниці (наслідок властивості 5.а).
7.б	Визначник матриці з хоча б двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює нулю (наслідок властивості 5.б).

Для формулювання наступних властивостей тедермінантів, знадобляться поняття мінора та алгебраїчного доповнення елементів.

Нехай задана квадратна матриця $A_n = A(a_{ij})\quad (i, j = \overline{1,n})$. Мінор елемента a_{ij} позначимо M_{ij} і будемо знаходити його як тедермінант матриці, отриманої з даної A_n, за виключенням того рядку і стовпця, на перетині яких знаходиться обраний елемент. Тоді алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} позначимо A_{ij} і визначимо так:

$$A_{ij} = \left(M_{ij}\right)^{(-1)^{i+j}}. \tag{3}$$

У вищенаведених позначеннях справедливі властивості – теореми, які є аналогами теореми Лапласа та її наслідків, сформульованих для визначників.

<u>*ТЕОРЕМА 1.*</u> (Про розклад тедермінанта) Для $\forall m,k = \overline{1,n}$ справедлива формула:

$$\operatorname{ted}[A_n] = \prod_{j=1}^{n}\left(A_{mj} \oplus a_{mj}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(A_{ik} \oplus a_{ik}\right) \tag{4}$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}, а знак $\oplus$ необхідно розуміти як операцію додавання елемента a_{ij} одночасно до кожного множника A_{ij}

<u>*ТЕОРЕМА 2.*</u> Для довільної квадратної матриці $A_n = A(a_{ij})$ справедлива рівність:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(A_{ij} \oplus a_{kj}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(A_{ji} \oplus a_{jk}\right) = \operatorname{ted}^{\delta_{ik}}[A_n] \tag{5}$$

де δ_{ik} – символ Кронекера, $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & k = i; \\ 0 & k \neq i. \end{cases}$

Відмітимо, що згідно (5) добуток сум $(\oplus)$ елементів довільного рядку (стовпця) даної матриці на відповідні алгебраїчні доповнення, рівний тедермінанту даної матриці, а добуток сум $(\oplus)$ елементів довільного рядку (стовпця) даної матриці на алгебраїчні доповнення іншого, рівний одиниці.

Перевіримо виконання властивостей на прикладах.

Завдання 1. Знайти тедермінант матриці $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&1&0\\2&2&3\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Використаємо формулу обчислення тедермінанта матриці третього порядку:

$$\operatorname{ted}[A_3]=\operatorname{ted}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\frac{(a_{11}+a_{22}+a_{33})(a_{12}+a_{23}+a_{31})(a_{21}+a_{32}+a_{13})}{(a_{31}+a_{22}+a_{13})(a_{32}+a_{23}+a_{11})(a_{21}+a_{12}+a_{33})}\Rightarrow$$

$$\operatorname{ted}\begin{pmatrix}1&4&2\\3&1&0\\2&2&3\end{pmatrix}=\frac{(1+1+3)(4+0+2)(3+2+2)}{(2+1+2)(2+0+1)(3+4+3)}=\frac{\cancel{5}\cdot\overset{2}{\cancel{6}}\cdot 7}{\cancel{5}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{10}_5}=\frac{7}{5}$$

Відповідь: $\operatorname{ted}[A]=\frac{7}{5}$.

Завдання 2. Використовуючи матрицю A, попереднього прикладу, перевірити властивість 4.a.

Розв'язання:

Знайдемо тедермінант матриці $B=\begin{pmatrix}3&6&4\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, яка отримана з A у результаті збільшення кожного елемента першого і зменшення кожного елемента третього рядка на 2.

$$\operatorname{ted}\begin{pmatrix}3&6&4\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\frac{(3+1+1)(6+0+0)(3+0+4)}{(4+1+0)(3+0+0)(6+3+1)}=\frac{\cancel{5}\cdot\overset{2}{\cancel{6}}\cdot 7}{\cancel{5}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{10}_5}=\frac{7}{5}$$

Відповідь: $\operatorname{ted}[B]=\frac{7}{5}$.

Як бачимо $\operatorname{ted}[A]=\operatorname{ted}[B]$, що свідчить про справедливість властивості 4.a.

Завдання 3. Перевірити властивість 1.a.

Розв'язання:

Знайдемо тедермінант матриці $C=B^T$ тобто $C=\begin{pmatrix}3&3&0\\6&1&0\\4&0&1\end{pmatrix}$.

$$\operatorname{ted}\begin{pmatrix}3&3&0\\6&1&0\\4&0&1\end{pmatrix}=\frac{(3+1+1)(3+0+4)(6+0+0)}{(0+1+4)(0+0+3)(3+6+1)}=\frac{\cancel{5}\cdot 7\cdot\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{5}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{10}_5}=\frac{7}{5}$$

Відповідь: $\operatorname{ted}[C]=\frac{7}{5}$.

Як бачимо $\operatorname{ted}[B]=\operatorname{ted}[C]$, що свідчить про справедливість властивості 1.a,.

Завдання 4. Перевірити властивість 5.а.

Розв'язання:

Знайдемо тедермінант матриці $D=\begin{pmatrix}1&1&2\\5&4&6\\2&1&3\end{pmatrix}$ у якої різниці відповідних елементів другого та третього рядків рівні.

$$\mathrm{ted}\begin{pmatrix}1&1&2\\5&4&6\\2&1&3\end{pmatrix}=\frac{(1+4+3)(1+6+2)(5+1+2)}{(2+4+2)(5+1+2)(1+6+2)}=\frac{\cancel{8}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{8}}{\cancel{8}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{9}}=1$$

Відповідь: $\mathrm{ted}[D]=1$.

Даний приклад свідчить про справедливість властивості 5.а.

Завдання 5. Знайти тедермінант матриці $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&1&0\\2&2&3\end{pmatrix}$ використовуючи його розклад по другому рядку та першому стовпчику (ТЕОРЕМА 1.).

Розв'язання:

- Запишемо формулу 4 при $m=2$:

$$\mathrm{ted}\begin{pmatrix}1&4&2\\3&1&0\\2&2&3\end{pmatrix}=(A_{21}\oplus a_{21})(A_{22}\oplus a_{22})(A_{23}\oplus a_{23}).$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення відповідних елементів використовуючи формулу 3:

$$a_{21}=3,\quad M_{21}=\mathrm{ted}\begin{pmatrix}4&2\\2&3\end{pmatrix}=\frac{7}{4}\Rightarrow A_{21}=\frac{4}{7};\quad a_{22}=1,\quad M_{22}=\mathrm{ted}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=\frac{4}{4}\Rightarrow A_{22}=\frac{4}{4};$$

$$a_{23}=0,\quad M_{23}=\mathrm{ted}\begin{pmatrix}1&4\\2&2\end{pmatrix}=\frac{3}{6}\Rightarrow A_{23}=\frac{6}{3};$$

$$\mathrm{ted}\begin{pmatrix}1&4&2\\3&1&0\\2&2&3\end{pmatrix}=\left(\frac{4}{7}\oplus 3\right)\left(\frac{4}{4}\oplus 1\right)\left(\frac{6}{3}\oplus 0\right)=\frac{7}{{}_{5}\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{3}}=\frac{7}{5}.$$

- Розкладемо тедермінант по першому стовпчику:

$$\mathrm{ted}\begin{pmatrix}1&4&2\\3&1&0\\2&2&3\end{pmatrix}=\left(\frac{1+3}{2+0}\oplus 1\right)\left(\left(\frac{4+3}{2+2}\right)^{-1}\oplus 3\right)\left(\frac{4+0}{1+2}\oplus 2\right)=\frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}\cdot\frac{7}{{}_{5}\cancel{10}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{5}}=\frac{7}{5}$$

Відповідь: $\mathrm{ted}[A]=\frac{7}{5}$.

Очевидно, значення тедермінанта отримані в результаті його розкладів співпадають зі значенням отриманим в першому завданні, що підтверджує справедливість ТЕОРЕМИ 1.

Завдання 6. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ знайти

$$(A_{21} \oplus a_{i1})(A_{22} \oplus a_{i2})(A_{23} \oplus a_{i3}) \quad i = 1,3$$

Розв'язання:

$$i = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{7} \oplus 1\right)\left(\frac{4}{4} \oplus 4\right)\left(\frac{6}{3} \oplus 2\right) = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{8}{5} = 1;$$

$$i = 3 \Rightarrow \left(\frac{4}{7} \oplus 2\right)\left(\frac{4}{4} \oplus 2\right)\left(\frac{6}{3} \oplus 3\right) = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{9}{6} = 1$$

Розглянуті приклади 5 та 6 свідчать про справедливість ТЕОРЕМИ 2.

Як відомо застосування визначників є звичним для багатьох розділів, як математики:

«Лінійна алгебра» – розв'язання систем, знаходження обернених матриць;

«Векторна олгебра» – знаходження векторного та мішаного добутків векторів, встановлення колінеарності і компланарності векторів;

«Аналітична геометрія» – знаходження рівнянь прямих ліній та площин;

«Інтегральне числення» – перетворення координат (Якобіан);

«Диференціальні рівняння» – встановлення лінійної незалежності розв'язків, (визначник Вронского);

і т. д. так і інших наук. Враховуючи різноманіття застосування визначників, що базується на їх властивостях, які контраналогічні властивостям тедермінанта, інтуїтивно розуміємо про наявність великого спектру можливого застосування і тедермінанів. На даний час автори працюють над пошуками шляхів можливого застосування введеного до розгляду об'єкту.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 192с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы 1966г. – 576 с.
3. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы 1971г. – 272 с.
4. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы 1982г. – 272 с.