УДК 378.094

ПРИМЕНЕНИЕ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

Азарова Н.В., Азарова А.Э.

Донецкий национальный технический университет,
Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры

Розглянуто розв'язання задачі здобуття максимальної програми будівельної організації симплексним методом.

В организации, планировании и экономике строительства возникает ряд организационных и технологических вопросов, для выбора оптимального варианта решения которых необходимо применение математических методов.

Симплексный метод является универсальным методом линейного программирования.

Сущность симплексного метода заключается в последовательном улучшении отправного (базисного) варианта решения (программы) вплоть до получения оптимального решения, которым в одних случаях является минимум линейной формы (целевой функции), в других – максимум.

В задаче, решаемой симплексным методом, каждый шаг (итерация) приводит к приближению линейной формы (целевой функции) к оптимуму.

Алгоритм симплексного метода складывается из следующих операций:

1) нахождение базисного (отправного) плана;

2) определение оптимальности полученного решения;

3) при отсутствии оптимального решения – удаление из базиса одной из переменных и ввод другой;

4) повторная проверка на оптимальность;

5) при отсутствии оптимальности – повторение шагов 3 и 4.

Задача сводится к тому, чтобы найти любое базисное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

В качестве примера задачи, связанной с поиском наилучшего решения, рассмотрим задачу получения максимальной программы строительной организации. Эта задача является типичным примером задачи линейного программирования, решаемой симплексным методом с введением дополнительных переменных.

Описание задачи. Осуществляется строительство поселка. Для его застройки возможно применение двух типов одноквартирных домов А и Б равной площади, но различных по конструктивным решениям. Строительная организация, ведущая работы, имеет два одинаковых экскаватора для рытья траншей под здания и пятнадцать одинаковых кранов для монтажа элементов зданий.

Затраты времени машин на одну квартиру приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Типы домов	Затраты на одну квартиру	
	экскаваторов	кранов
	маш.-см. / кв.	
А	0,18	1,5
Б	0,36	0,9
Время, выделяемое на работу, дн.	180	180

Требуется определить, какие типы квартир и в каком количестве следует построить, чтобы получить максимальное количество квартир.

Математическая модель задачи. Число машино-смен экскаваторов при их двусменной работе составит

$$180 \cdot 2 \cdot 2 = 720\ \textit{маш.} - \textit{см.}$$

Число машино-смен кранов

$$180 \cdot 2 \cdot 15 = 5400\ \textit{маш.} - \textit{см.}$$

Обозначим искомое число квартир в домах типа А через x, в домах типа Б – y.

Запишем ограничения, связанные с наличным парком машин.

Для экскаваторов:

$$0{,}18x + 0{,}36y \le 720. \qquad (1)$$

Для кранов:

$$1{,}5x + 0{,}9y \le 5400. \qquad (2)$$

Целевая функция:

$$x + y \to \max. \qquad (3)$$

Преобразуем эти неравенства в уравнения путем введения в них дополнительных переменных n_1 и n_2, соответствующих объему продукции, который можно изготовить дополнительно при полном использовании арендованных экскаваторов и кранов.

В этом случае неравенства (1) и (2) преобразуются в уравнения:

$$0{,}18x + 0{,}36y + n_1 = 720. \qquad (4)$$

$$1{,}5x + 0{,}9y + n_2 = 5400. \qquad (5)$$

Целевая функция будет иметь вид:

$$x + y + 0 \cdot n_1 + 0 \cdot n_2 \to \max. \qquad (6)$$

<u>Решение задачи.</u> Составим таблицу, характеризующую отправную программу (табл. 2).

Таблица 2.

C	Программа		1	1	0	0
	Наименование продукции	Количество продукции	x	y	n_1	n_2
	1	2	3	4	5	6
0	n_1	720	0,18	**0,36**	1	0
0	n_2	5400	1,5	0,9	0	1
	$Lj - Cj$	0	-1	-1	0	0

В самой верхней строке таблицы 2 записаны коэффициенты целевой функции (6). Дополнительным переменным соответствуют коэффициенты, равные нулю. Эти же коэффициенты, равные нулю, записаны в графе *C* таблицы 2 против каждой дополнительной переменной, введенной в базис. В первой строке таблицы 2 записано уравнение (4), во второй – уравнение (5).

Заполнение строки $Lj - Cj$ производится следующим образом. Величина Lj представляет собой сумму произведений величин столбца C на коэффициенты столбца 2. Так как в первоначальном плане в столбце C только нули, величина Lj для столбца 2 будет равна нулю, а для столбцов 3-6 $Lj - Cj=0 - Cj= - Cj$, поэтому в строке $Lj - Cj$ отправного плана поставлены коэффициенты целевой функции с противоположным знаком.

В таблице 2 показано, какое количество квартир может быть получено, если выпускать только номинальную продукцию. Тогда экскаваторы смогут подготовить котлованы под 720 домов (квартир), а краны смогут смонтировать 5400 домов (квартир).

Проверяем базисную программу на оптимальность. В индексной строке при решении задачи на максимум не должно быть отрицательных величин. В программе, представленной в таблице 2, в последней (индексной) строке в столбцах 3 и 4 имеются отрицательные числа, значит, программа не оптимальна, и ее необходимо улучшать.

Составляем следующий вариант программы. Вводим в программу производство такой продукции, которая дает максимальную величину. В нашем примере в последней строке столбцов 3 и 4 величины одинаковые, так как квартиры одинаковые. Поэтому можем вводить любую продукцию. Введем, например, y (табл. 2, столбец 4).

Чтобы найти элементы второй строки новой таблицы, представляющей второй вариант программы, необходимо каждый элемент выводимой строки, в нашем случае n_1, разделить на генеральный элемент:

$$\frac{720}{0,36} = 2000; \frac{0,18}{0,36} = 0,5; \frac{0,36}{0,36} = 1; \frac{1}{0,36} = 2,78; \frac{0}{0,36} = 0 .$$

Расчет элементов новой матрицы по столбцам 3-6 производим следующим образом.

Элементы тех столбцов новой таблицы, у которых элемент, соответствующий вводимой строке, равен нулю (в нашем случае столбец 6), переносятся в новую таблицу без изменений.

Элементы столбца, которые отражают вводимую продукцию (столбец 4), кроме элемента, соответствующего вводимой строке, переносятся в новую таблицу в виде нулей.

Элементы второй строки столбцов 2, 3 и 5 новой таблицы определяются специальным расчетом. В основе указанного расчета лежит положение о том, что каждый новый элемент равен разности, где уменьшаемое представляет собой очередной элемент рассчитываемого столбца, а вычитаемое – произведение нового элемента рассчитываемого столбца, соответствующего вводимой строке, на очередной элемент старого столбца вводимой продукции.

Значения элементов столбцов 2, 3 и 5 второй строки новой таблицы будут равны:

столбец 2 $5400 - 2000 \cdot 0{,}9 = 3600$;

столбец 3 $1{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 1{,}05$;

столбец 5 $0 - 2{,}78 \cdot 0{,}9 = -2{,}50$.

После вычислений получим вторую симплексную таблицу (табл. 3), соответствующую второму варианту программы. Стрелками показано, какая продукция введена в план на этой итерации (→) и какую предполагается вывести на следующей итерации (←).

Таблица 3.

Программа		x	y	n_1	n_2
Наименование продукции	Количество продукции				
1	2	3	4	5	6
→ y	2000	0,5	1	2,78	0
← n_2	3600	**1,05**	0	-2,5	1
$L'j$ - Cj	2000	-0,5	0	2,78	0

Снова в последней строке таблицы 3 в столбце 3 имеется отрицательная величина. Следовательно, программу можно улучить.

Вместо фиктивной продукции n_2 вводим продукцию x (табл. 3, столбец 3).

Результаты вычислений систематизируем в таблице 4.

В таблице 4 в последней строке отрицательных значений нет. Следовательно, получено оптимальное решение. Смысл этого решения такой: наибольшее количество квартир, которое может быть выстроено при наличном парке машин, составляет 3714, из них число квартир в домах типа А (x) равно 3428, а в домах типа Б (y) – 286.

Таблица 4.

Программа		x	y	n_1	n_2
Наименование продукции	Количество продукции				
1	2	3	4	5	6
y	286	0	1	3,97	-0,475
$\rightarrow x$	3428	1	0	-2,38	0,951
$L''j$ - Cj	3714	0	0	1,59	0,475

Положительные числа в последней строке таблицы 4 в столбцах 5 и 6 показывают, насколько может быть улучшено решение, если увеличить соответствующие пределы ограничения на единицу. Так, число 1,59 (табл. 4, столбец 5) обозначает, что увеличение числа машино-смен экскаваторов на единицу может дать дополнительно 1,59 квартиры. Число 0,475 (табл. 4, столбец 6) показывает, что добавление одной машино-смены крана дает 0,475 квартиры.

Проверим полученное решение. При строительстве 3428 квартир типа А и 286 квартир типа Б использование наличного парка машин будет следующее.

Экскаваторов:

$$0{,}18 \cdot 3428 + 0{,}36 \cdot 286 = 720 \text{ \textit{маш.} -- \textit{см.}}$$

Кранов:

$$3428 \cdot 1{,}5 + 286 \cdot 0{,}9 = 5400 \text{ \textit{маш.} -- \textit{см.}}$$

Итак, следует построить 3428 квартир типа А и 286 квартир типа Б, чтобы получить максимальное количество квартир (3714).

Решение подобных задач знакомит студентов с методами математического исследования прикладных вопросов, дает понятие о разработке математических моделей для решения задач строительства и архитектуры.

Литература

1. Сырцова Е.Д. Математические методы в планировании и управлении строительным производством. Учебное пособие / Е.Д. Сырцова – М.: Высшая школа, 1972. – 336 с.

2. Банди Брайан. Основы линейного программирования / Брайан Банди – М.: Радио и свіязь, 1989. – 176 с.