МІНІСТЕРСТВО НАУКИ І УТВОРЕННЯ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні рекомендації і завдання до самостійної роботи з комп'ютерного моделювання економічних процесів

(для економічних спеціальностей студентів очної та заочної форми навчання)

Донецьк 2009

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ І УТВОРЕННЯ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні рекомендації і завдання до самостійної роботи з комп'ютерного моделювання економічних процесів

(для економічних спеціальностей студентів очної та заочної форми навчання)

Затверджено на засіданні навчально-видавничої ради ДонНТУ
Протокол № 6 від 21 грудня 2009 р.

Донецьк 2009

УДК 004.942

Методичні рекомендації і завдання до самостійної роботи з комп'ютерного моделювання економічних процесів (для економічних спеціальностей студентів очної та заочної форми навчання) / укладач Тарабаєва І.В. Донецьк, ДОННТУ, 2009. – 66 с.

Методичні вказівки призначені для опанування навиків математичного моделювання в середовищі Microsoft Excel. Приведені завдання по чотирьох темах, кожна тема містить 12 варіантів. Розраховано на студентів економічних спеціальностей і інших користувачів ПК.

Автор: Тарабавева, ст. вик. ВМ і П.

Рецензент: Павлиш В.М., проф., зав.каф. ВМ і П

Зміст

Вступ

Дані методичні рекомендації призначені для розвитку у студентів практичних навиків вживання методів економіко-математичного моделювання при вирішенні конкретних економічних завдань з використанням комп'ютерних технологій.

У методичних рекомендаціях викладені деякі математичні методи моделювання економічних процесів, розглянута можливість їх вживання за допомогою табличного процесора Microsoft Excel. Microsoft Excel дозволяє реалізовувати деякі методи оптимізації і кореляційно-регресійного аналізу. Не дивлячись на наявність інших пакетів, у тому числі спеціалізованих, цей продукт є найбільш доступним, тому його застосовують при вирішенні багатьох прикладних завдань.

У першій частині методичних рекомендацій розглянуті основні поняття математичного моделювання економічних систем. У другій частині методичних рекомендацій розглянута технологія вирішення завдань оптимального використання ресурсів і спеціальних завдань лінійного програмування (транспортне завдання, завдання про призначення) за допомогою табличного процесора Microsoft Excel. У третій частині методичних рекомендацій дані приклади побудови моделей лінійної і нелінійної регресії. У цій частині розглянуті можливості Excel для аналізу і побудови моделей лінійної і нелінійної регресії. Приклади вирішення завдань включають фрагменти робочих документів Excel, забезпечені коментарями і короткими вказівками, що допомагають реалізувати рішення задачі на комп'ютері.

Додаткові теоретичні відомості для глибшого вивчення того або іншого розділу можна отримати з книг, приведених в списку літератури.

Методичні рекомендації включає теоретичну частину, практичні рекомендації за рішенням кожного типа завдань, завдання для лабораторних робіт.

1. Основні поняття математичного моделювання економічних систем

Моделювання – один із способів дослідження систем. **Модель** – образ реальної системи (об'єкту, процесу) в матеріальній або теоретичній формі. Цей образ відображає істотні властивості об'єкту, він заміщає реальний об'єкт в ході дослідження і управління. Моделювання ґрунтується на принципі аналогії, тобто можливості вивчення реального об'єкту (системи) не безпосередньо, а опосередковано, через розгляд подібного до нього і доступнішого об'єкту (моделі). *Метою моделювання* є підвищення ефективності управління економікою на різних рівнях управління.

Система – це комплекс взаємозв'язаних підсистем і їх елементів разом із стосунками між ними. Перерахуємо основні властивості системи:

- цілісність системи (принципова незвідність властивостей системи до суми властивостей її елементів);
- наявність мети і критерію дослідження безлічі елементів;
- наявність зовнішнього по відношенню до системи середовища;
- можливість виділення в системі взаємозв'язаних частин (підсистем).

До основних функцій управління економічними об'єктами (системами) відносяться:

- збір і обробка інформації про об'єкт управління;
- аналіз і оцінка інформації про об'єкт управління;
- прогнозування розвитку об'єкту;
- програмування розвитку об'єкту;
- планерування розвитку об'єкту;
- регулювання розвитку об'єкту.

Практичними завданнями економіко-математичного моделювання є:

- аналіз економічних об'єктів і процесів;
- прогнозування економічних процесів;
- вироблення управлінських рішень на всіх рівнях господарської діяльності.

Математичною моделлю об'єкту управління називається одне або декілька математичних рівнянь, які задають зв'язки між найбільш істотними для управління показниками об'єкту.

За змістом розрізняють *економіко-математичні* і *економіко-статистичні* методи і моделі. Відмінність між ними полягає у вирішуваних з їх допомогою завданнях і вживаних методах.

Економіко-математичні моделі включають цільові критерії, рівняння, нерівності і обмеження, що описують функціонування об'єкту, а також співвідношення між показниками, обумовлені існуючими економічними залежностями між ними.

Для розробки економіко-математичних моделей використовують апарат математичного програмування, теорії планерування і управління і ін.

Економіко-статистичні моделі пов'язані з аналізом статистичних даних про об'єкт управління. Ці моделі встановлюють статистичні зв'язки, що існують між показниками об'єкту. Для розробки економіко-статистичних моделей використовують апарат математичної статистики і теорії вірогідності.

До *економіко-математичних методів* відносяться методи лінійної алгебри, математичного (лінійного і нелінійного) програмування, теорії вірогідності і математичної статистики, методи економічної кібернетики, методи теорії ігор і ухвалення рішень і ін.

2. Економіко-математичні методи і моделі

2.1. Економіко-математична модель оптимізаційного моделювання

У економіці *оптимізаційні завдання* виникають у зв'язку з розробкою планів підприємств, галузей або народного господарства на коротко -, середньо - або довгостроковий періоди часу. *Оптимізаційні завдання* можуть бути сформульовані не лише для підприємств реального сектора економіки, але також і для торгівлі, банківської і страхової діяльності.

Оптимізаційні (екстремальні) моделі в економіці виникають при практичній реалізації ***принципу оптимальності в управлінні***.

Типовими оптимізаційними завданнями є, наприклад:

- асортимент продукції – максимізація випуску товарів при обмеженні на сировині для виробництва товарів;
- штатний розклад – складання штатного розкладу для досягнення найкращих результатів при найменших витратах;
- планерування перевезень – мінімізація витрат на транспортування товарів;
- складання суміші – досягнення заданої якості суміші при найменших витратах;
- розмір ємкості – визначення розмірів деякої ємкості з врахуванням вартості матеріалу для досягнення максимального об'єму;
- інші всілякі завдання оптимального розподілу ресурсів і оптимального проектування і так далі

Суть *принципу оптимальності* полягає в прагненні вибрати таке управлінське рішення $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де x_j, $j = 1, ..., n$, - його компоненти, яке щонайкраще враховувало б внутрішні можливості і зовнішні умови виробничої діяльності господарюючого суб'єкта.

«Щонайкраще» тут означає вибір деякого критерію оптимальності, тобто деякого економічного показника, що дозволяє порівнювати ефективність тих або інших управлінських рішень. Традиційні критерії оптимальності в екстремальних моделях — «максимум прибули», «мінімум витрат», «максимум об'єму робіт (послуг)» і ін.

«Враховувало б внутрішні можливості і зовнішні умови виробничої діяльності» означає, що на вибір управлінського рішення (поведінка) накладається ряд умов, тобто вибір X здійснюється з деякої області можливих (допустимих) вирішень D.

Таким чином, реалізувати на практиці принцип оптимальності в планеруванні і управлінні — це означає вирішити екстремальне завдання вигляду:

$$F = f(x_j) \to \max(\min, const) \qquad j = \overline{1,n} \qquad (2.1)$$

$$d_j \le x_j \le D_j \qquad j = \overline{1,n} \qquad (2.2)$$

$$g(x_j) \le (=;\ge) b_i \qquad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

$$x_j = \overline{1,k} \le n \text{ - целые (для задачи целочисленного программирования);} \qquad (2.3)$$

$$0 \le x_j \le 1, j = \overline{1,k} \text{ - для задач с белевымми переменными}$$

де $f(x_j)$ - математичний запис критерію оптимальності – **цільова функція**;

D_j - область можливих (допустимих) рішень з яких здійснюється вибір x_j - **граничні умови**;

$g(x_j) \le (=;\ge) b_i$ - умови, які накладаються на вибір управлінського рішення – **обмеження**.

Цільова функція (1) показує, в якому сенсі рішення задачі має бути оптимальним, тобто найкращим. Можливі три види цільової функції: максимізація, мінімізація і призначення заданого значення. ***Граничні умови*** (2.2) показують, в яких межах можуть бути значення шуканих змінних в оптимальному рішенні. ***Обмеження*** (2.3) – встановлюють залежності між змінними.

Рішення задачі (2.1-2.3), що задовольняє всім обмеженням і граничним умовам, називається *допустимим*. Важлива характеристика завдання оптимізації – її розмірність, яка визначається числом змінних n і числом обмежень m. При $n<m$ завдання рішення не мають. Необхідною вимогою завдань оптимізації є умова $n>m$. Систему рівнянь, для яких $n=m$ розглядають як завдання оптимізації, що має одне допустиме рішення.

Отже, завдання має оптимальне рішення, якщо вона задовольняє вимогам:

1. має більш за одне рішення;
2. є критерій, що показує, в якому сенсі рішення, що приймається, має бути оптимальним, тобто найкращим з допустимих.

2.1.1. Побудова математичної моделі оптимізаційного завдання

Робота за рішенням деякого оптимізаційного завдання завжди починається з побудови математичної моделі. Процес побудови моделі можна почати з відповіді на наступні три питання:

1. Для визначення, яких величин будується модель (тобто які змінні моделі)?
2. У чому полягає мета, для досягнення якої з безлічі всіх допустимих значень змінних вибираються оптимальні?
3. Яким обмеженням повинні задовольняти невідомі?

Необхідно пам'ятати, що при конструюванні математичної моделі формулювання обмежень є найвідповідальнішою частиною конструкції. В деяких випадках обмеження очевидні, наприклад, обмеження на кількість сировини. Інші ж обмеження можуть бути менш очевидні і можуть бути вказані невірно. Наприклад:

- у моделі з декількома періодами часу величина матеріального ресурсу на початок наступного періоду повинна дорівнювати величині цього ресурсу на кінець попереднього періоду;
- багато величин в моделі по своєму фізичному сенсу не можуть бути негативними, наприклад, кількість отриманих одиниць товару.

При побудові математичної моделі необхідно також враховувати, що при максимізації цільової функції область допустимих значень має бути обмежена зверху, при мінімізації – обмежена знизу.

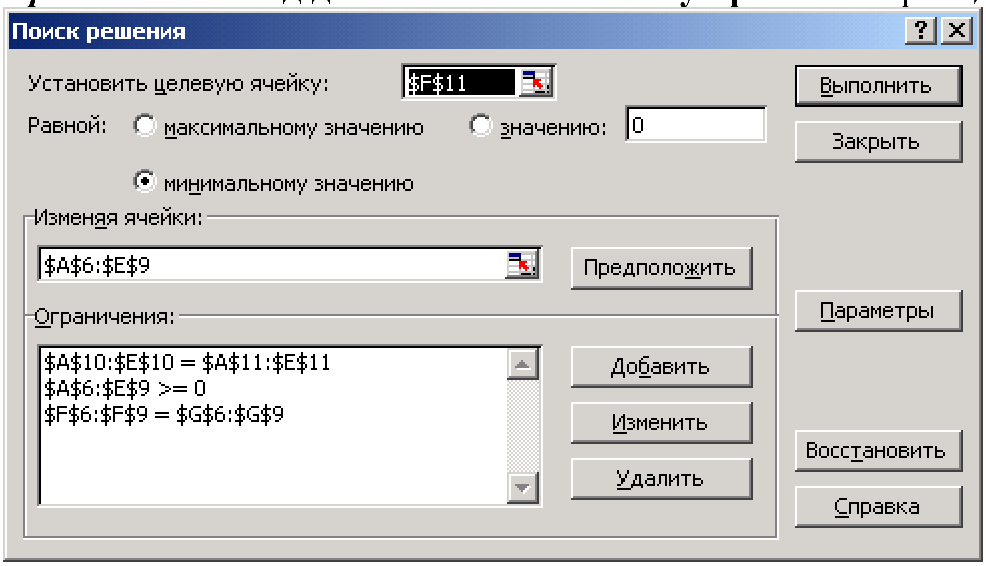
Отже, першим етапом рішення оптимізаційної задачі, є побудова її математичної моделі. На цьому етапі необхідно зробити виводи про вихідні дані, шукані змінних, про межі, в яких можуть знаходитися значення шуканих величин; встановити залежності між змінними; визначити критерій, по якому необхідно знайти оптимальне рішення

2.2. Використання EXCEL для вирішення оптимізаційного завдання

Вирішити деяке оптимізаційне завдання в MS Excel можна за допомогою надбудови **Пошук рішення.** Цей інструмент аналізу варіантів дозволяє знайти рішення, оптимальне в деякому розумінні при декількох вхідних значеннях і наборі обмежень на рішення. Диспетчер сценаріїв запам'ятає декілька рішень, знайдених даним засобом і згенерує на цій основі звіт. За допомогою надбудови **Пошук рішення** можна вирішувати як лінійні завдання (завдання лінійного, цілочисельного і стохастичного програмування), так і нелінійні (завдання нелінійного програмування).

2.2.1. Надбудова Пошук рішення

Відкрити діалогове вікно **Пошук рішення** можна за допомогою опцій **СервісПоїськ рішення. Якщо в меню Сервіс відсутній опція Пошук рішення**, то необхідно скористатися опціями **СервісНадстройки** і встановити прапорець ***Пошук рішення*.** Вигляд діалогового вікна **Пошук рішення** приведений на мал. 1.

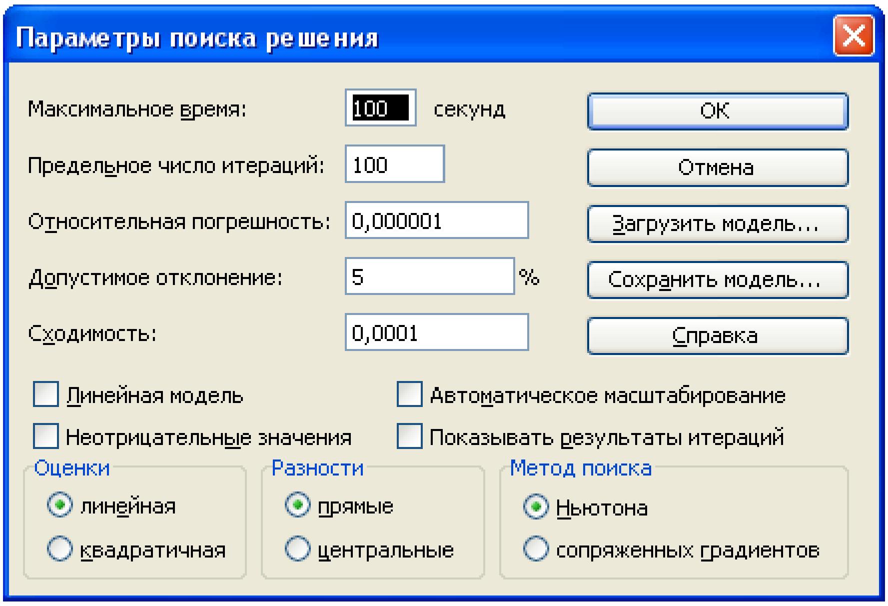


Мал. 1

У ньому представлені наступні елементи:

- ***Встановити цільове осередок*** **–** вказується адреса осередку, що містить цільову функцію даного завдання. Значення цього осередку можна максимізувати або мінімізувати, або зробити рівним конкретному значенню.
- ***Рівною*** **–** група перемикачів, яка визначає, що необхідно зробити із значенням цільового осередку (із значенням функції): максимізувати*, мінімізувати або зробити рівним конкретному значенню.*
- ***Змінюючи осередки*** – вказуються осередки, які повинні зміняться в процесі пошуку рішення задачі (тобто осередки, які є змінними завдання).
- ***Передбачити*** **–** ця кнопка відшукує всі не формульні осередки, прямо або непрямо залежні від формули у осередку, встановленому в полі **Встановити цільове *осередок***, і поміщає їх заслання у вікно **Змінюючи** осередки.
- ***Обмеження*** – відображуються обмеження, що накладаються на змінні завдання. Обмеження перераховуються у вигляді осередків або інтервалів осередків, що зазвичай містять формулу, яка залежить від однієї або декількох змінних осередків. Допускаються обмеження у вигляді рівності, нерівностей, а також – вимоги цілочисельності змінних. Обмеження додаються поодинці за допомогою кнопки **Додати**
- ***Додати, Змінити, Видалити*** **–** кнопки, які дозволяють додати, змінити або видалити обмеження.
- ***Параметри*** **–** кнопка, яка дозволяє змінювати умови і варіанти пошуку рішень досліджуваної задачі, а також завантажувати і зберігати моделі, що оптимізуються. Значення і стани елементів управління, використовувані за умовчанням, личать для вирішення більшості завдань.
- ***Відновити*** **–** кнопка, яка очищає поля діалогового вікна і відновлює значення, використовувані за умовчанням.
- ***Виконати*** **–** кнопка, яка запускає процес рішення поставленої задачі.
- ***Закрити*** **–** кнопка, яка закриває вікно діалогу, не вирішуючи проблеми. При цьому зберігаються установки зроблені у вікнах діалогу, що з'являлися після натиснень на кнопки **Параметри**, **Додати**, **Змінити** або **Видалити**.

При натисненні кнопки **Параметри** у вікні **Пошук рішення** відкривається **Параметри пошуку рішення.** Вигляд діалогового вікна приведений на мал. 2.



Мал. 2

Опції цього вікна:

- **Максимальний час** – Обмежує час, що відпускається на пошук рішення задачі
- **Граничне число ітерацій –** Обмежує число проміжних обчислень
- **Відносна погрішність і Допустиме відхилення –** Визначають точність, з якою шукається рішення. Рекомендація. Після знаходження рішення з величинами даних параметрів, заданими за умовчанням, повторите обчислення з більшою точністю і меншим допустимим відхиленням і порівняєте з первинним рішенням. Використання даної перевірки особливо рекомендується для завдань з вимогою цілочисельності змінних.
- **Лінійна модель –** Служить для пошуку рішення лінійної задачі оптимізації або лінійної апроксимації нелінійного завдання. В разі нелінійного завдання прапорець Лінійна модель має бути скинутий, в разі лінійного завдання — встановлений, оскільки інакше можливе здобуття невірного результату.
- **Показувати результати ітерацій –** Для призупинення пошуку рішень і перегляду окремих ітерацій.
- **Автоматичне масштабування –** Призначений для включення автоматичної нормалізації вхідних і вихідних значень, що якісно розрізняються по величині. Наприклад, при максимізації прибули у відсотках **по відношенню до вкладень, що обчислюються в мільйонах рублів.**
- **Оцінки –** Служить для вибору методу екстраполяції
- **Різниці –** Група призначена для вибору методу чисельного диференціювання
- **Метод пошуку –** Служить для вибору алгоритму оптимізації.

Збереження (завантаження) різних даних для пошуку рішення здійснюється, відповідно, за допомогою кнопок **Зберегти модель** і **Завантажити модель** вікна **Параметри пошуку рішення**.

2.2.2. Рішення задачі за допомогою надбудови Пошук рішення

Для того, щоб вирішити оптимізаційне завдання за допомогою надбудови **Пошук рішення** необхідно скласти математичну модель завдання, а потім підготувати робочий аркуш MS Excel — коректно розмістити на нім всі вихідні дані, грамотно ввести необхідні формули для цільової функції і для інших залежностей, вибрати місце для значень змінних. А потім правильно ввести всі обмеження, змінні, цільову функцію і інші значення у вікно **Пошук рішення**.

Великою частиною завдань оптимізації є завдання *лінійного програмування*, тобто такі, в яких критерій оптимізації і обмеження — лінійні *функції.* В цьому випадку для вирішення завдання слід встановити прапорець Лінійна **модель** у вікні Параметри **пошуку рішення.** Це забезпечить вживання симплекс-методу. Інакше навіть для вирішення лінійного завдання використовуватимуться загальніші (тобто повільніші) методи.

Пошук рішення може працювати також і з нелінійними залежностями і обмеженнями. Це, як правило, завдання нелінійного програмування або, наприклад, вирішення системи нелінійних рівнянь. Для успішної роботи засобу **Пошук рішення** слід прагнути до того, аби залежності були гладкими або, принаймні, безперервними. Найчастіше розривні залежності виникають при використанні функції ЕСЛИ(), серед аргументів якої є змінні величини моделі. Проблеми можуть виникнути також і при використанні в моделі функцій типа ABS(), ОКРУГЛ() і т. д.

Вирішуючи завдання з нелінійними залежностями, слідує:

• ввести заздалегідь гадані значення шуканих змінних (інколи легко отримати графічне представлення рішення і зробити приблизні виводи про рішення);

• у вікні **Параметри пошуку рішення** зняти (якщо встановлений) прапорець **Лінійна модель.**

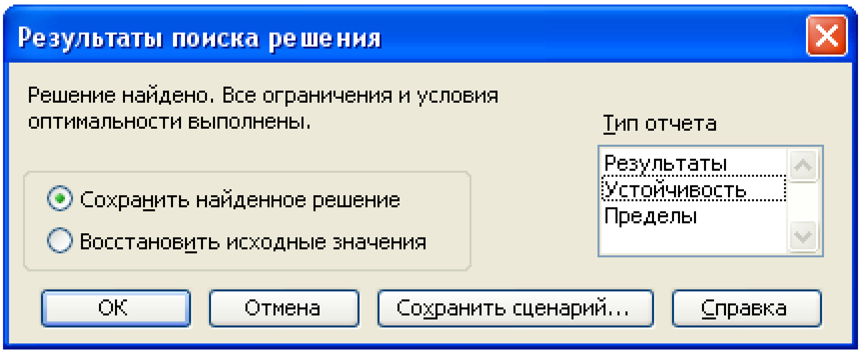
Вирішуючи завдання цілочисельного програмування, не слід забувати також про вимоги цілочисельності і булевості.

2.2.3. Аналіз рішення задачі оптимізації

При необхідності проводиться аналіз рішення. Часто додають також представлення рішення у вигляді графіків або діаграм.

Можна отримати і звіт про пошук рішення. Звіти бувають трьох типів: **Результати, Стійкість**, **Межі**. Тип звіту вибирається після закінчення пошуку рішення у вікні **Результати пошуку рішення** (мал. 3) в списку *Тип звіту* (можна вибрати відразу два або три типи).

- Звіт типа ***Результати*** містить остаточні значення параметрів завдання цільової функції і обмежень.
- Звіт типа ***Стійкість*** показує результати малих змін параметрів пошуку рішення.
- Звіт типа ***Межі*** показує зміни рішення при почерговій максимізації і мінімізації кожної змінної при незмінних інших змінних.



Мал. 3

2.3. Модель оптимізації структури виробництва

Завдання 1: Компанія спеціалізується на випуску хокейних ключок і наборів шахів. Кожна ключка приносить компанії прибуток у розмірі $2, а кожен шаховий набір - у розмірі $4. На виготовлення однієї ключки потрібно чотири години роботи на ділянці А і дві години роботи на ділянці В. Шаховий набір виготовляється з витратами шести годинників на ділянці А, шести годинників на ділянці В і однієї години на ділянці С. Доступна виробнича потужність ділянки А складає 120 н-часовв день, ділянки В - 72 н-часаі ділянка З - 10 н-часов.

Скільки гаків і шахових наборів повинна випускати компанія щодня, аби отримувати максимальний прибуток?

Умови завдань вказаного класу зручно представляти в табличній формі (див. мал. 4).

Виробничі ділянки	витрати часу на одиницю продукції, н-час		доступний фонд времени, н-час
	гаки	набори шахів	
A	4	6	120
B	2	6	72
C		1	10
прибуток на одиницю продукції $	2	4	

Мал. 4

Рішення задачі.

Побудуємо математичну модель: Хай: x1 - кількість що випускаються щодня хокейних гаків, x2 - кількість що випускаються щодня шахових наборів. Тепер визначимо мету, для досягнення якої з безлічі всіх допустимих значень змінних вибираються оптимальні:

$$f(\bar{x}) = 2x1 + 4x2 \rightarrow \max \qquad (2.4)$$

А тепер визначимо, яким обмеженням повинні задовольняти змінні моделі.

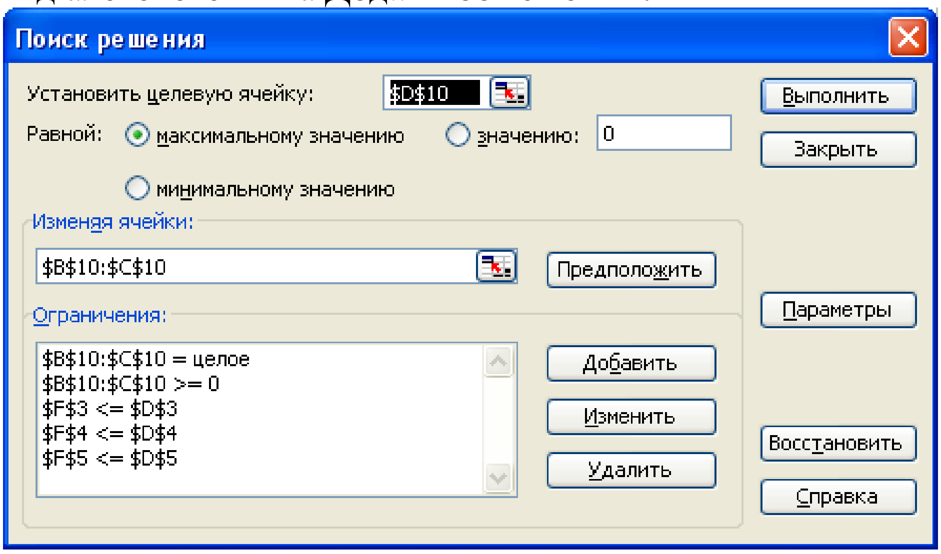
$$\begin{aligned} &4x1 + 6x2 \le 120 \\ &2x1 + 6x2 \le 72, \\ &x2 \le 10 \qquad (2.5) \\ &x1 \ge 0, \\ &x2 \ge 0. \end{aligned}$$

Будуємо комп'ютерну модель: Підготуємо робочий аркуш Excel, як показано на мал. 5

	A	B	C	D	E	F	G
1	**производственные**	**затраты времени на единицу продукции, н-час**		**доступный фонд**		ограничения	
2	**участки**	клюшки	наборы шахмат	**времени, н-час**			
3	А	4	6	120		0	=B3*B10+C3*C10
4	В	2	6	72		0	=B4*B10+C4*C10
5	С	-	1	10		1	=C5
6	**прибыль на единицу продукции, $**	2	4				
7							
8		количество выпускаемых ежедневно		максимальная прибыль			
9		клюшки	наборы шахмат				
10				0	=B6*B10+C6*C10		

Мал. 5

Виберемо в меню **Сервіс** опцію **Пошук рішення.** Заповнимо діалогове вікно **Пошук рішення,** як показано на мал. 6. Додамо обмеження за допомогою кнопки **Додати** і діалогового вікна **Додати обмеження.**



Мал. 6

За допомогою кнопки **Параметри** і діалогового вікна Параметри пошуку рішення (мал. 2) виберемо опцію *Лінійна модель.*

Завершуємо рішення задачі клацанням по кнопці **Виконати** діалогового вікна **Пошук рішення.**

Результати рішення задачі приведені на мал. 7. Таким чином, щодня необхідно випускати 24 ключки і 4 набори шахів, і тоді прибуток складе 64 умов. одн. з врахуванням обмежень на витрати часу по виробництву продукції

	A	B	C	D	E	F
1	**производственные**	**затраты времени на единицу продукции, н-час**		**доступный фонд**		ограничения
2	**участки**	клюшки	наборы шахмат	**времени, н-час**		
3	A	4	6	120		120
4	B	2	6	72		72
5	C	-	1	10		1
6	**прибыль на единицу продукции, $**	2	4			
7						
8		количество выпускаемых ежедневно		максимальная прибыль		
9		клюшки	наборы шахмат			
10		24	4	64		

Мал. 7

Завдання 2: Фірма займається комп'ютерними послугами. Витрати часу на 1 людини на кожну послугу, вартість послуги і мінімальний денний попит приведені в таблиці (див. мал. 8). Робочий день людини складає 8 годин. Знайти денний план роботи, що максимізував дохід.

Послуга	Витрати часу	Мінімальний попит	Вартість послуги
Запис CD-диска	10	5	2,5
Запис DVD-диска	25	10	3,5
Друк чорно-білий	0,1	100	0,5
Друк кольоровий	0,1	20	1
Ксерокопія	0,25	500	0,25

Мал. 8

Рішення задачі.

Побудуємо математичну модель: Визначимо для знаходження, яких величин будується математична модель, тобто які змінні моделі. Хай x1 –це к-ть записаних дисків CD; x2 – це к-ть записаних дисків DVD; x3 – це к-ть роздрукованих чорно-білих листів; x4 – це к-ть роздрукованих кольорових листів; x5 – це к-ть отксерокопированих сторінок.

Тепер визначимо мету, для досягнення якої з безлічі всіх допустимих значень змінних вибираються оптимальні.

$$2{,}5\,x_1+3{,}5\,x_2+0{,}5\,x_3+x_4+0{,}25\,x_5\to\max \tag{2.6}$$

А тепер визначимо, яким обмеженням повинні задовольняти змінні моделі.

$$\begin{aligned}&10\,x_1+25\,x_2+0{,}1\,x_3+0{,}1\,x_4+0{,}25\,x_5\le 480\\ &x_1\ge 5\\ &x_2\ge 10\\ &x_3\ge 100\\ &x_4\ge 20\\ &x_5\ge 500\\ &x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0,\textit{целое}\end{aligned} \tag{2.7}$$

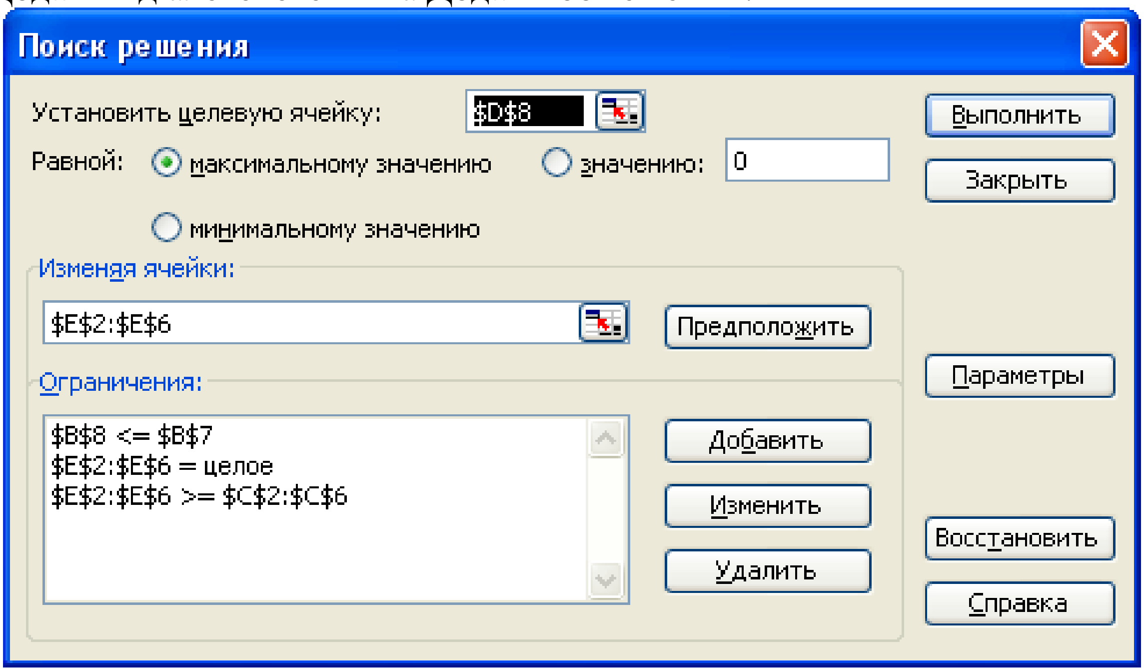
Будуємо комп'ютерну модель: Підготуємо робочий аркуш Excel для обчислень (див. мал. 9).

B7 | fx | =8*60

	A	B	C	D	E
1	Услуга	Затраты времени	Минимальный строс	Стоимость услуги	Количество оказываемых услуг
2	Запись CD-диска	10	5	2,5	
3	Запись DVD-диска	25	10	3,5	
4	Печать черно-белая	0,1	100	0,5	
5	Печать цветная	0,1	20	1	
6	Ксерокопия	0,25	500	0,25	
7	Ресурс времени	480			
8		0		0	
9		=СУММПРОИЗВ($E$2:$E$6;B2:B6)		=СУММПРОИЗВ($E$2:$E$6;D2:D6)	

Мал. 9

Виберемо в меню **Сервіс** опцію **Пошук рішення.** Заповнимо діалогове вікно **Пошук рішення,** як показано на мал. 10. Додамо обмеження за допомогою кнопки **Додати** і діалогового вікна **Додати обмеження**.



Мал. 10

За допомогою кнопки **Параметри** і діалогового вікна Параметри пошуку рішення (мал. 2) виберемо опцію *Лінійна модель.*

Завершуємо рішення задачі клацанням по кнопці **Виконати** діалогового вікна **Пошук рішення .**

Результати рішення задачі приведені на мал. 11. Таким чином, денний план роботи фірми: записати 5 CD-дисків, 10 DVD-дисків; роздрукувати 100 чорно-білих листів і 450 кольорових листів; зробити 500 листів ксерокопій, дозволяє отримати дохід 672,5 усл. грошові од., з врахуванням обмежень на витрати часу по наданню послуг і попиту на кількість послуг, що надаються.

	A	B	C	D	E
1	Услуга	Затраты времени	Минимальный строс	Стоимость услуги	**Количество оказываемых услуг**
2	Запись CD-диска	10	5	2,5	**5**
3	Запись DVD-диска	25	10	3,5	**10**
4	Печать черно-белая	0,1	100	0,5	**100**
5	Печать цветная	0,1	20	1	**450**
6	Ксерокопия	0,25	500	0,25	**500**
7	Ресурс времени	480			
8		480		672,5	

Мал. 11

2.4. Лабораторна робота №1. Побудови економіко-математичної моделі і пошук оптимального рішення задачі планування виробництва

Варіант 1

Підприємство випускає продукцію трьох видів П1, П2 і П3, використовуючи три види сировини С1, С2 і С3, запаси яких обмежені. Витрата сировини кожного виду на виробництво одиниці продукції П1, П2 і П3, прибуток підприємства від продажу одиниці готовій продукції кожного виду приведені в таблиці:

Сировина	Витрата сировини га виробництво виробу			Загальні запаси сировини
	П1	П2	П3	
С1	1	2	1	14
С2	3	2	1	9
С3	4	6	4	23
Прибуток від продажів	7	4	5	

Визначити план випуску для здобуття максимального прибутку.

Варіант 2

Фірма займається пошиттям п'яти моделей взуття. Для виготовлення взуття використовується 3 матеріали, запаси яких обмежені. Витрата матеріалу і його запаси, мінімальний тижневий попит моделей і їх відпускна ціна приведені в таблиці.

Модель взуття	Витрата матеріалу на 1 пара			Відпускна ціна	Мінімальний попит
	Матеріал 1	Матеріал 2	Матеріал 3		
Модель 1	2	2	0	560	10
Модель 2	1,5	3	1	500	5
Модель 3	2	2	1	450	5
Модель 4	4	2	4	800	10
Модель 5	2	0	4	950	Не обмежений
Ресурс	200	200	100		

Визначити план випуску взуття для здобуття максимального доходу.

Варіант 3

Цех випускає три види виробів, причому добова програма випуску складає: І виріб - 90 одиниць, ІІ – 70 і ІІІ – 60. Добові виробничі можливості цеху і норми витрат виробничих ресурсів на одиницю різних видів виробів приведені в таблиці:

Ресурси	Норми витрат на одиницю виробу			Виробничі можливості
	I	II	III	
Устаткування (ч)	2	3	4	780
Сировина (т)	1	4	5	860
Електроенергія (кВт-ч)	3	4	2	970
Оптова ціна, грн.	8	7	6	
Програма випуску (не менше), шт.	90	70	60	

Скласти план виробництва продукції, що забезпечує максимальний дохід від реалізації виробів, що випускаються понад план.

Варіант 4

Процес виготовлення двох видів промислових виробів полягає в послідовній обробці кожного з них на трьох верстатах. Час використання цих верстатів для виробництва обмежений 10-у годинами в добу. Час обробки і прибуток від продажу одного виробу кожного виду приведені в таблиці. Знайти оптимальний обсяг виробництва виробів кожного виду.

Виріб	Час обробки одного виробу, мін			Питомий прибуток, грн.
	Верстат 1	Верстат 2	Верстат 3	
Виріб 1	10	6	8	2
Виріб 2	5	20	15	3

Варіант 5

Для виробництва трьох продуктів потрібно два матеріали. Підкупна ціна і витрата матеріалів приведені в таблиці

Сировина	Витрата матеріалу, кг			Фонд матеріалу	План реалізації, грн
	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3		
Матеріал 1	2	3	2	600	
Матеріал 2	3	1	4	650	
Підкупна ціна, грн.	3	5	2		900
Собівартість, грн.	2	3	1,5		

Знайти план, при якому загальна собівартість буде мінімальною (при виконанні плану продажів).

Варіант 6

Підприємство випускає радіоприймачі трьох різних моделей М1, М2 і М3. Кожна модель характеризується певним часом на виготовлення відповідних деталей, часом збірки виробу і його упаковки:

Виріб	Збірка, ч	Виготовлення, ч	Упаковка, ч	Дохід	Мінімальний випуск
М1	0,1	0,2	0,1	0,8	200
М2	0,2	0,4	0,2	0,15	75
М3	1	0,8	0,1	0,25	100
Ресурс часу на тиждень	200	240	60		

Визначити план випуску радіоприймачів з метою здобуття максимального прибутку.

Варіант 7

Цех для виробництва двох видів продукції використовує чотири групи устаткування:

Група виробничого устаткування	Норми витрат проізв. устаткування на один комплект виробів (станко-час)		Фонд часу роботи устаткування (станко-час)
	Продукція 1	Продукція 2	
А	2	2	12
Б	1	2	8
В	4	0	16
Г	0	4	12
Прибуток в тис. грн. на ед. продукції	2	2	

Знайти варіант завантаження устаткування, що забезпечує максимальний прибуток.

Варіант 8

Фірма виготовляє два види продукції А і В Дані по тому, що витрачається вогкість, підкупній ціні і мінімальному об'єму збуту приведені в таблиці:

Продукція	Витрата сировини на одиницю продукції, кг		Ціна продукції, грн	Об'єм збуту, кг
	Сировина 1	Сировина 2		
A	2	2,5	20	50
B	3,5	1	40	50
Добовий запас, кг	400	200		

Визначити план випуску продукції A і B, що забезпечує максимальний прибуток.

Варіант 9

Видавничий будинок видає два журнали: «Садівник» і «Молодь», які друкуються в трьох друкарнях, де загальна кількість годинника, відведена для друку і продуктивність друку однієї тисячі екземплярів обмежені і представлені в наступній таблиці:

Друкарня	Час друку 1 екземпляра		Ресурс часу, відведений друкарнею, година
	Садівник	Молодь	
Друкарня 1	0,01	0,01	112
Друкарня 2	0,01	0,015	70
Друкарня 3	0,02	0,015	80
Попит не менш екземплярів/місяць	12000	7500	
Оптова ціна, грн/шт	16	12	

Визначити оптимальну кількість видаваних журналів, яка забезпечить максимальну виручку від продажу.

Варіант 10

Ательє шиє 3 види виробів (плаття, блуза, спідниця). На пошиття використовується 3 види матеріалу, витрата і запаси яких приведені в таблиці:

Виріб	Витрата тканини на виріб			Прибуток від реалізації
	1 матеріал	2 матеріал	3 матеріал	
Плаття	6,5	0,5	0	25
Блуза	1,5	1,5	1	18
Спідниця	2	0	0,3	16
Максимальний добовий запас	200	50	100	

Потрібно визначити оптимальний план пошиття виробів, що забезпечує максимальний прибуток.

Варіант 11

Підприємство електронної промисловості випускає 2 моделі радіоприймачів, причому кожна модель виробляється на окремій технологічній лінії. Добовий обсяг виробництва лінії, витрата електронних схем (2-х типів) і прибуток від реалізації приведені в таблиці:

	Добовий об'єм	Витрата елементів електронних схем		Прибуток від реалізації
		1 типа	2 типа	
1 модель	20	5	10	30
2 модель	15	9	8	20
Максимальний добовий запас		600	800	

Визначити добовий обсяг виробництва першої і другої моделей, аби прибуток був максимальним.

Варіант 12

Цех може виробляти стільці і столи.

Виріб	К-ть матеріалу, що витрачається, ед.		Ресурс, людино-година	Прибуток $
	Матеріал 1	Матеріал 2		
Стіл	5	8	10	45
Стілець	20	4	15	80
Запас ресурсів	400	250	450	

Скільки треба зробити стільців і столів, аби отримати максимальний прибуток?

2.5. Модель оптимізації транспортних перевезень (транспортна задача)

У загальному вигляді транспортне завдання можна сформулювати таким чином: у m пунктах відправлення $A_1...,A_m$ знаходиться однорідний вантаж, кількість якого рівна відповідно $a_1...,a_m$ одиниць. Даний вантаж необхідно доставити споживачам $B_1,...,B_n$, попит яких — $b_1,...,bn$.. Вартість перевезення одиниці вантажу з i-го (i = 1,m пункту відправлення в j-й j=1,n) пункт призначення рівна $c_{i,j.}$ Необхідно скласти план перевезень, який повністю задовольняє попит споживачів у вантажі, і при цьому сумарні транспортні витрати мінімальні.

Математично транспортне завдання можна записати так:

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, i=\overline{1,m}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, j=\overline{1,n} \tag{2.9}$$

$$x_{ij}\geq 0,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n} \tag{2.10}$$

Таким чином, дана система обмежень (2) за умови (3) і лінійна функція (1). Потрібний серед безлічі вирішень системи (2) знайти таке ненегативне рішення, яке доставляє мінімум лінійної функції (1).

Модель транспортного завдання називають закритою (збалансованою), якщо сумарний об'єм вантажу, що є у постачальників, дорівнює сумарному попиту споживачів, тобто виконується рівність:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (2.11)$$

Якщо для транспортного завдання виконується одна з умов:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (2.12)$$

то модель завдання називають відкритою (незбалансованою).

Для вирішуваної транспортне завдання з відкритою моделлю слід перетворити в закриту.

- Так, якщо виконується умова, то необхідно ввести фіктивний (n+1) -й пункт призначення Bn+1, тобто в матрицю завдання вводиться додатковий стовпець. Попит фіктивного споживача приймається $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Вартість перевезень продукції вважається однаковою, найчастіше рівною нулю (якщо не задана вартість складування продукції), тобто $c_{i,n+1} = 0, \;\; i = \overline{1,m}$.
- Так, якщо виконується умова $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то необхідно ввести фіктивний (m+1) -го постачальника Am+1, тобто в матрицю завдання вводиться додатковий рядок. Запас вантажу даного постачальника приймається $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Вартість перевезень продукції вважається однаковою, найчастіше рівною нулю (якщо не задана вартість штрафів за недопоставку продукції), тобто $c_{m+1,j} = 0, \;\; \mathrm{j} = \overline{1,n}$.

При перетворенні відкритого завдання в закриту цільова функція не міняється, оскільки всі доданки, відповідні додатковим перевезенням, дорівнюють нулю.

Завдання: Виробництво продукції здійснюється на 4-х підприємствах, а потім розвозиться в 5 пунктів вжитку. Підприємства можуть випускати в день 235, 175, 185 і 175 одиниць продукції. Пункти вжитку готові приймати щодня 125, 160, 60, 250 і 175 одиниць продукції. Зберігання на підприємстві одиниці продукції обходиться в 2 у.о. в день, штраф за продукцію, що недопостачає, — 3,5 у.о. в день. Вартість перевезення одиниці продукції (у в. е.) з підприємств в пункти вжитку приведена на мал. 12.

Необхідно мінімізувати сумарні транспортні витрати по перевезенню продукції.

Предприятия	Пункты потребления				
	1	2	3	4	5
1	3,2	3	2,35	4	3,65
2	3	2,85	2,5	3,9	3,55
3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4
4	4	2	2,1	4,1	3,4

Мал. 12

Рішення задачі.

Перевірка збалансованості моделі завдання — модель є збалансованою, оскільки сумарний об'єм вироблюваної продукції в день дорівнює сумарному об'єму потреби в ній:

235 + 175 + 185 + 175 = 125 + 160 + 60 + 250 + 175.

Тому при рішенні цієї задачі не враховуються витрати, пов'язані із складуванням і недопоставкою продукції.

Побудуємо математичну модель: Невідомими в цьому завданні є об'єми перевезень. Хай x_{ij} — об'єм перевезень з i-го підприємства в j-й пункт вжитку. Сумарні транспортні витрати — це функціонал якості (критерій мети):

де c_{ij} — вартість перевезення одиниці продукції з i-го підприємства В j-й пункт споживання.

Невідомі в цьому завданні повинні задовольняти наступним обмеженням:

• об'єми перевезень не можуть бути негативними;

• оскільки модель збалансована, то вся продукція має бути вивезена з підприємств, а потреби всіх пунктів вжитку мають бути повністю задоволені.

Отже

- функція мети :

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\to \min \qquad (2.13)$$

- обмеження

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij}=a_i, i=\overline{1,4}$$
$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij}=b_j, j=\overline{1,5} \qquad (2.14)$$
$$x_{ij}\ge 0, \quad i=\overline{1,5}, \quad j=\overline{1,4}$$

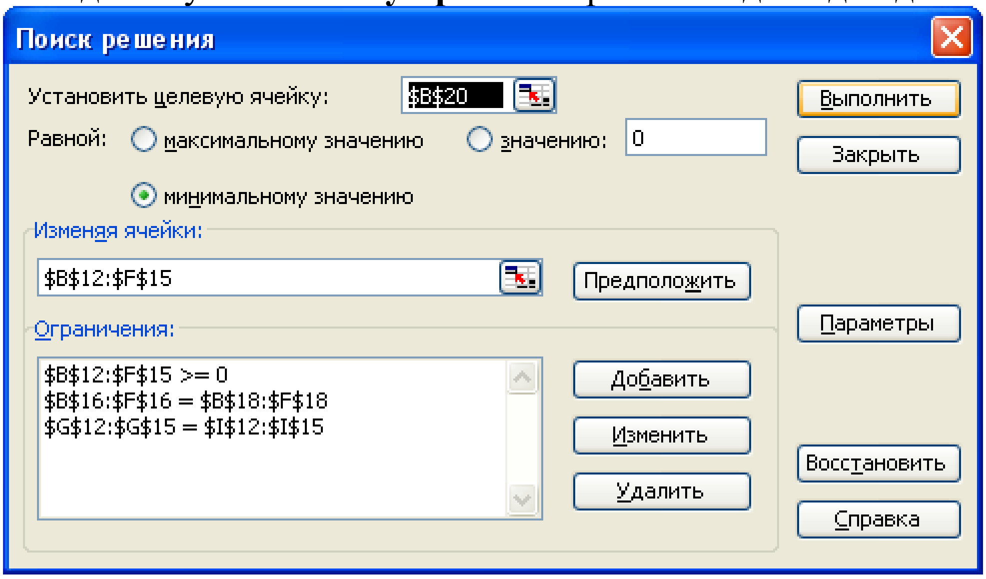
де a_i - обсяг виробництва на i-м підприємстві b_j - попит в j–м пункті споживання

Будуємо комп'ютерну модель: Підготовку робочого аркуша для завдання здійснюємо відповідно до мал. 13.

1									
2		*Пункты потребления*							
3	*Предприятия*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**			
4			**Стоимость перевозок**						
5	**1**	3,2	3	2,35	4	3,65			
6	**2**	3	2,75	2,5	3,9	3,55			
7	**3**	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4			
8	**4**	4	2	2,1	4,1	3,4			
9									
10			**Неизвестные - объемы перевозок**						**Объемы**
11		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**			**производства**
12	**1**						0	=СУММ(B12:F12)	235
13	**2**						0	=СУММ(B13:F13)	175
14	**3**						0	=СУММ(B14:F14)	185
15	**4**						0	=СУММ(B15:F15)	175
16		0	0	0	0	0			
17		=СУММ(B12:B15)	=СУММ(C12:C15)	=СУММ(D12:D15)	=СУММ(E12:E15)	=СУММ(F12:F15)			
18	**Потребность в продукции**	125	160	60	250	175			
19									
20	**Целевая функция**	0	=СУММПРОИЗВ(B5:F8;B12:F15)						
21									

Мал. 13

Введення даних у вікно **Пошук рішення** робимо відповідно до мал. 14;



Мал. 14

Не слід забувати також про опції Лінійна модель, Відносна погрішність вікна **Параметри пошуку рішення,** що викликається кнопкою Параметри у вікні Пошук рішення (див. мал. 14). Отримане оптимальне рішення представлене на мал. 15. Таким чином, транспортні витрати на перевезення продукції будуть мінімальними і складуть 2373,5 у.о., якщо підприємство 1 перевозитиме 60 од. продукції в 3-ий пункт вжитку, 65 од. продукції в 4-й пункт вжитку і 110 од. продукції в 5-й пункт вжитку; підприємство 2 перевозитиме 125 од. продукції в 1-й пункт вжитку і 150 од. продукції в 5-й пункт вжитку; підприємство 3 перевозитиме 185 од. продукції в 4-й пункт вжитку; підприємство 4 перевозитиме 160 од. продукції в 2-ой пункт вжитку і 15 од. продукції в 5-й пункт вжитку продукції.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		*Пункты потребления*							
3	*Предприятия*	1	2	3	4	5			
4				Стоимость перевозок					
5	1	3,2	3	2,35	4	3,65			
6	2	3	2,75	2,5	3,9	3,55			
7	3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4			
8	4	4	2	2,1	4,1	3,4			
9									
10				Неизвестные - объемы перевозок					Объемы
11		1	2	3	4	5			производства
12	1	*0*	*0*	*60*	*65*	*110*	*235*	=СУММ(B12:F12)	235
13	2	*125*	*0*	*0*	*0*	*50*	*175*	=СУММ(B13:F13)	175
14	3	*0*	*0*	*0*	*185*	*0*	*185*	=СУММ(B14:F14)	185
15	4	*0*	*160*	*0*	*0*	*15*	*175*	=СУММ(B15:F15)	175
16		*125*	*160*	*60*	*250*	*175*			
17		=СУММ(B12:B15)	=СУММ(C12:C15)	=СУММ(D12:D15)	=СУММ(E12:E15)	=СУММ(F12:F15)			
18	Потребность в продукции	125	160	60	250	175			
19									
20	Целевая функция	2373,5	=СУММПРОИЗВ(B5:F8;B12:F15)						
21									

Мал. 15

2.6. Лабораторна робота №2. Побудови економіко-математичної моделі і пошук оптимального рішення транспортної задачі

Є n пунктів виробництва і m пунктів розподілу продукції. Вартість перевезення одиниці продукції з i-го пункту виробництва в j-й центр вжитку c_{ij} приведена в таблицях, де під рядком розуміється пункт виробництва, а під стовпцем — пункт вжитку. Крім того, в таблицях в i-ому рядку вказаний обсяг виробництва в i-м пункті, а в j-м стовпці вказаний попит в j-м центрі вжитку. Зберігання продукції на підприємстві обходиться в 1,6 у.о. в день, а штраф за прострочене постачання одиниці продукції, що замовленій споживачем в пункті вжитку, але там не знаходиться, рівний 3,4 у.о. в добу. Скласти план перевезень по доставці необхідній продукції в пункти вжитку, що мінімізує сумарні транспортні витрати. Необхідні дані для вирішення завдань узяти з відповідних таблиць, приведених далі.

Варіант 1

Предприятия	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	Пункты потребления				
	1	2	3	4	
A	4,2	10	5	9	17
B	5	8	5	9	33
C	6	4	4	7,3	20
D	7	5	11	4	12
E	3	11	8	5	20
Объемы потребления	35	20	30	15	

Варіант 2

Предприятия	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	Пункты потребления				
	1	2	3	4	
A	6,3	8	5	11	12
B	4	11	7	9	24
C	7	3	5	8	32
D	9	5,5	10	1	32
E	5	8	11	5	30
Объемы потребления	60	10	30	10	

Варіант 3

Предприятия	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	Пункты потребления				
	1	2	3	4	
A	7,3	9	3	10	14
B	3	10	5	9	30
C	7	11	3	2	20
D	8	5	9	2	32
E	4,8	9	10	5	16
Объемы потребления	60	10	20	10	

Варіант 4

Предприятия	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	Пункты потребления				
	1	2	3	4	
A	6,3	8,6	1	5	15
B	2,5	7	5	7	30
C	4	5	11	8	40
D	1	5	4	5	35
Объемы потребления	44	30	26	42	

Варіант 5

Предприятия	Стоимость перевозки единицы продукции. Пункты потребления				Объем производства
	1	2	3	4	
A	4	9	4	7,4	20
B	2	8	5	1	10
C	7	2,2	1	4	30
D	2,5	6	10	6	40
Объемы потребления	48	10	35	12	

Варіант 6

Предприятия	Стоимость перевозки единицы продукции. Пункты потребления				Объем производства
	1	2	3	4	
A	4	9	1	3	38
B	2	5	5	6	20
C	2	5	10	4	30
D	3	7	2	6	32
Объемы потребления	18	50	22	35	

Варіант 7

Предприятия	Стоимость перевозки единицы продукции. Пункты потребления				Объем производства
	1	2	3	4	
A	6,2	1	4,2	5	17
B	2	4	5,1	8	30
C	5	8	3	4	17
D	2	4	9	2	20
E	4	2,75	2	1	23
Объемы потребления	45	30	25	20	

Варіант 8

Предприятия	Стоимость перевозки единицы продукции. Пункты потребления				Объем производства
	1	2	3	4	
A	6	2	4,8	3	20
B	8	4	5	8	30
C	5,5	2	3	7	14
D	5	6	8,2	4	23
E	1,8	9	7	6	30
Объемы потребления	40	30	48	12	

Варіант 9

Предприятия	Стоимость перевозки единицы продукции. Пункты потребления				Объем производства
	1	2	3	4	
A	1,7	3	4	6	23
B	5,2	2,6	9,8	3	27
C	3	2	1	4	52
D	6	5	2,5	7	18
Объемы потребления	32	18	60	15	

Варіант 10

Предприятия	Стоимость перевозки единицы продукции. Пункты потребления				Объем производства
	1	2	3	4	
A	4	2	4,1	6	17
B	5	2,5	2	3	73
C	3	4	3	4,2	52
D	5,1	3	2	7	38
Объемы потребления	20	25	80	20	

Варіант 11

Предприятия	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	Пункты потребления				
	1	2	3	4	
A	2,3	7	6	8	15
B	2	1,3	1	2,5	55
C	4,9	4	4	1	12
D	2	8	1	4	18
E	3	2,1	1,2	5	17
Объемы потребления	35	35	15	25	

Варіант 12

Предприятия	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	Пункты потребления				
	1	2	3	4	
A	5	1,8	6	6	30
B	1	5,1	8	2	42
C	3,5	6	3	3,1	10
D	2,2	4,9	1,3	4	16
E	3	7	8,95	1	10
Объемы потребления	20	38	30	22	

2.7. Модель графіка зайнятості (завдання про призначення)

Завдання про призначення – це розподільне завдання, в якому для виконання кожної роботи потрібний один і лише один ресурс (одна людина, одна автомашина і так далі), а кожен ресурс може бути використаний на одній і лише одній роботі. Іншими словами *ресурси не ділені між роботами, а роботи не ділені між ресурсами.* Завдання про призначення має місце при призначенні людей на посади або роботи, автомашин на маршрути, водіїв на машини, при розподілі груп по аудиторіях, наукових тим по науково-дослідних лабораторіях і тому подібне

Вихідні параметри моделі завдання про призначення

1. $\boldsymbol{n}$ – кількість ресурсів, $\boldsymbol{m}$ – кількість робіт.

2. $\boldsymbol{a}_i = 1$ – одинична кількість ресурсу Aі ($\boldsymbol{i} = 1,n$), наприклад: один працівник; один транспортний засіб; одна наукова тема і так далі

3. = 1 – одинична кількість роботи $\boldsymbol{B}$j ($\boldsymbol{j}$ = 1,m),, наприклад: одна посада; один маршрут; одна лабораторія.

4. c_{ij} – характеристика якості виконання роботи B_j за допомогою ресурсу A_i. Наприклад, компетентність і-го працівника при роботі на j-й посаді; час, за яке і-й транспортний засіб перевезе вантаж по j-му маршруту; міра кваліфікації і-ї лабораторії при роботі над j-ю науковою темою.

Шукані параметри

1. x_{ij} – факт призначення або не призначення ресурсу A_i на роботу B_j

$$x_{ij}=\begin{cases}0,\text{ если i - ресурс не назначен на j - ю работу}\\ 1,\text{ если i - ресурс назначен на j - ю работу}\end{cases} \qquad (2.15)$$

2. $\boldsymbol{L(x)}$ – загальна (сумарна) характеристика якості розподілу ресурсів по роботах

Загальний вигляд транспортної матриці завдання про призначення

Ресурси, A_i	Роботи, B_j				Кількість ресурсів
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	1
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	1
Кількість робіт	1	1	…	1	$\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{j=1}^{m} b_j$

Математична модель задачі про призначення

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min,$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\left(j=\overline{1,m}\right)\\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij}=1,\left(i=\overline{1,n}\right)\\ x_{ij}=\begin{cases}0,\\1,\end{cases}\left(i=\overline{1,n}\,;\,j=\overline{1,m}\right)\end{cases} \qquad (2.16)$$

Процес приведення **задачі про призначення** до збалансованого вигляду має свої особливості в порівнянні з ТЗ. Якщо умова збалансованості завдання (1) не виконується із-за браку робіт або виконавців в кількості $\boldsymbol{k}_{ab}$, то для створення балансу треба ввести таку ж кількість $\boldsymbol{k}_{ab}$, фіктивних рядків або стовпців.

Особливістю рішення даної задачі є моделювання системи переваг, що склалася в керівництва підприємства по описаному в умові завдання кадровому питанню.

У завданні про призначення звільнення колишнього співробітника або неприйняття на роботу нового співробітника моделюється попаданням одиниці у фіктивний стовпець матриці рішень задачі, тому для заборони або дозволу таких ситуації необхідно використовувати відповідні «тарифи».

Значення «тарифи» c_{ij}^3 вибираються залежно від напряму оптимізації цільової функції завдання про призначення (***L***(x) →max або ***L***(x)→min). При цьому керуються принципом «невигідності» заборонених призначень. Так, якщо ***L(x)*** – це загальна компетентність працівників, то як забороняють треба вибирати нульові компетентності c_{ij}^3 . А якщо L(x) – це загальний час проходження машинами транспортних маршрутів, то як забороняють треба вибирати значення c_{ij}^3 , що перевершують по величині максимальні реальні значення c_{ij}..

Завдання: Для виконання чотирьох видів робіт виділено чотири люди. Час виконання кожної роботи кожним виконавцем заданий матрицею, номер рядка якої відповідає номеру виконавця, номер стовпця – номеру роботи:

Виконавці	Роботи			
	1	2	3	4
1	***3***	***6***	*7*	***10***
2	***5***	***6***	***3***	***8***
3	***2***	***8***	***4***	***8***
4	***8***	***6***	***5***	***9***

Необхідно так розподілити виконавців по роботах, аби витрати часу були мінімальними.

Рішення задачі.

Перевірка збалансованості моделі завдання: Це завдання є збалансованим, оскільки кількість виконавців дорівнює кількості робіт.

Побудуємо математичну модель: Хай x_{ij} – факт призначення або не призначення виконавця і на роботу j:

$$x_{ij}=\begin{cases}0, \text{ если i - исполнитель не назначен на j - ю работу}\\ 1, \text{ если i - исполнитель назначен на j - ю работу}\end{cases}, \qquad (2.17)$$

де $i=\overline{1,4}$ і $j=\overline{1,4}$.

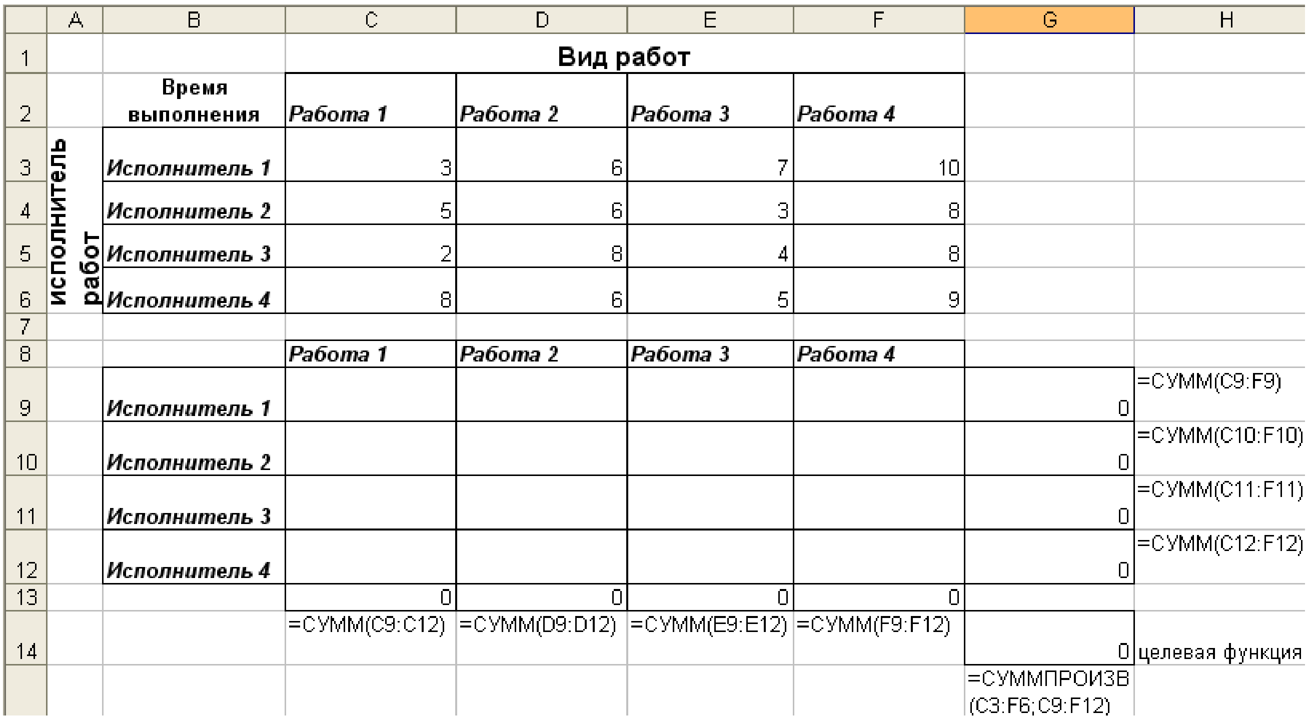
Позначимо цільову функцію (загальні витрати часу) через L, побудуємо математичну модель:

$$L(=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}\to \min,$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{4n} x_{ij}=1, (j=\overline{1,4})\\ \sum\limits_{j=1}^{4} x_{ij}=1, (i=\overline{1,4})\\ x_{ij}=\begin{cases}0,\\1,\end{cases} (i=\overline{1,4};\ j=\overline{1,4})\end{cases}, \qquad (2.18)$$

де c_{ij} - час виконання кожної роботи кожним виконавцем.

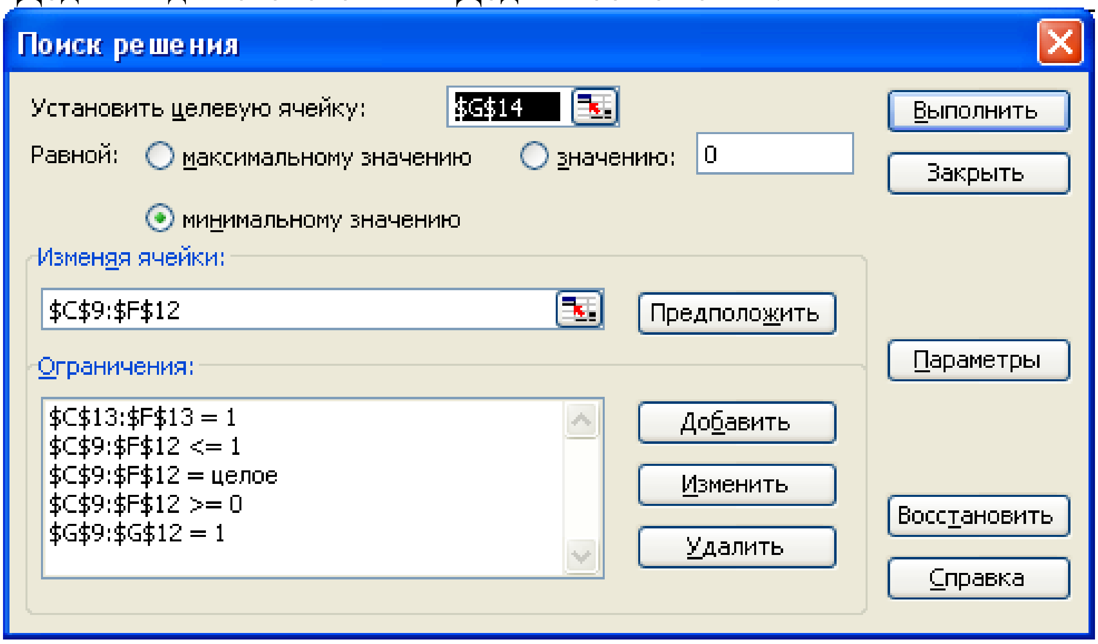
Будуємо комп'ютерну модель: Підготуємо робочий аркуш Excel для обчислень (див. мал.16)



	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Вид работ					
2		Время выполнения	*Работа 1*	*Работа 2*	*Работа 3*	*Работа 4*		
3	исполнитель работ	***Исполнитель 1***	3	6	7	10		
4		***Исполнитель 2***	5	6	3	8		
5		***Исполнитель 3***	2	8	4	8		
6		***Исполнитель 4***	8	6	5	9		
7								
8			*Работа 1*	*Работа 2*	*Работа 3*	*Работа 4*		
9		***Исполнитель 1***					0	=СУММ(C9:F9)
10		***Исполнитель 2***					0	=СУММ(C10:F10)
11		***Исполнитель 3***					0	=СУММ(C11:F11)
12		***Исполнитель 4***					0	=СУММ(C12:F12)
13			0	0	0	0		
14			=СУММ(C9:C12)	=СУММ(D9:D12)	=СУММ(E9:E12)	=СУММ(F9:F12)	0	целевая функция
							=СУММПРОИЗВ (C3:F6;C9:F12)	

Мал. 16

Виберемо в меню **Сервіс** опцію **Пошук рішення.** Заповнимо діалогове вікно **Пошук рішення,** як показано на мал. 17. Додамо обмеження за допомогою кнопки **Додати** і діалогового вікна **Додати обмеження**.



Мал. 17

За допомогою кнопки **Параметри** і діалогового вікна Параметри пошуку рішення (мал. 2) виберемо опцію *Лінійна модель.*

Завершуємо рішення задачі клацанням по кнопці **Виконати** діалогового вікна **Пошук рішення .**

Результати рішення задачі приведені на мал. 18. Таким чином, необхідно розподілити першого виконавця на другу роботу, другого виконавця на третю роботу, третього виконавця на першу роботу і четвертого виконавця на четверту роботу, аби витрати часу були мінімальними і склали 20.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Вид работ					
2		Время выполнения	*Работа 1*	*Работа 2*	*Работа 3*	*Работа 4*		
3	исполнитель работ	*Исполнитель 1*	3	6	7	10		
4		*Исполнитель 2*	5	6	3	8		
5		*Исполнитель 3*	2	8	4	8		
6		*Исполнитель 4*	8	6	5	9		
7								
8			*Работа 1*	*Работа 2*	*Работа 3*	*Работа 4*		
9		*Исполнитель 1*	0	1	0	0	1	=СУММ(C9:F9)
10		*Исполнитель 2*	0	0	1	0	1	=СУММ(C10:F10)
11		*Исполнитель 3*	1	0	0	0	1	=СУММ(C11:F11)
12		*Исполнитель 4*	0	0	0	1	1	=СУММ(C12:F12)
13			1	1	1	1		
14			=СУММ(C9:C12)	=СУММ(D9:D12)	=СУММ(E9:E12)	=СУММ(F9:F12)	20	целевая функция
15							=СУММПРОИЗВ(C3:F6;C9:F12)	

Мал. 18

2.8. Лабораторна робота №3. Побудови економіко-математичної моделі і пошук оптимального рішення задачі про призначення

Оплата праці працівника i на робочому місці j визначається коефіцієнтом a_{ij} (див. матрицю А, згідно варіанту). Знайти одне з оптимальних призначень, при якому сумарні витрати на виробництво будуть мінімальними.

Варіант 1

$$A = \begin{vmatrix} 17 & 18 & 16 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & 39 & 18 & 47 & 45 & 48 & 55 \\ 26 & 30 & 18 & 58 & 59 & 62 & 66 \\ 25 & 29 & 18 & 50 & 51 & 54 & 61 \\ 30 & 37 & 18 & 33 & 57 & 60 & 64 \\ 30 & 34 & 18 & 33 & 34 & 60 & 64 \\ 39 & 40 & 18 & 39 & 43 & 40 & 74 \end{vmatrix}$$

Варіант 2

$$A = \begin{vmatrix} 21 & 21 & 37 & 29 & 30 & 33 & 45 \\ 16 & 16 & 48 & 43 & 38 & 44 & 56 \\ 19 & 16 & 42 & 46 & 44 & 50 & 59 \\ 25 & 16 & 29 & 50 & 48 & 54 & 66 \\ 24 & 16 & 34 & 29 & 42 & 48 & 57 \\ 16 & 15 & 16 & 16 & 16 & 15 & 16 \\ 36 & 16 & 46 & 38 & 36 & 36 & 75 \end{vmatrix}$$

Варіант 3

$$A = \begin{vmatrix} 20 & 19 & 19 & 16 & 19 & 19 & 19 \\ 19 & 39 & 49 & 19 & 49 & 51 & 53 \\ 28 & 34 & 56 & 19 & 56 & 58 & 57 \\ 25 & 31 & 26 & 19 & 47 & 49 & 48 \\ 29 & 38 & 42 & 19 & 63 & 65 & 64 \\ 34 & 37 & 38 & 19 & 38 & 69 & 68 \\ 36 & 36 & 46 & 19 & 40 & 39 & 66 \end{vmatrix}$$

Варіант 4

$$A = \begin{vmatrix} 36 & 36 & 47 & 37 & 44 & 41 & 58 \\ 28 & 47 & 43 & 42 & 49 & 49 & 60 \\ 23 & 23 & 36 & 35 & 39 & 42 & 56 \\ 17 & 23 & 23 & 11 & 23 & 23 & 23 \\ 23 & 35 & 34 & 27 & 48 & 48 & 62 \\ 23 & 29 & 25 & 24 & 25 & 42 & 56 \\ 23 & 42 & 47 & 37 & 41 & 35 & 80 \end{vmatrix}$$

Варіант 5

$$A = \begin{vmatrix} 30 & 32 & 31 & 46 & 40 & 30 & 50 \\ 21 & 23 & 28 & 43 & 40 & 21 & 47 \\ 21 & 17 & 33 & 45 & 45 & 17 & 55 \\ 21 & 17 & 17 & 12 & 17 & 11 & 17 \\ 33 & 32 & 37 & 37 & 57 & 17 & 67 \\ 28 & 24 & 26 & 32 & 29 & 17 & 57 \\ 37 & 39 & 35 & 44 & 38 & 17 & 72 \end{vmatrix}$$

Варіант 6

$$A = \begin{vmatrix} 24 & 36 & 32 & 24 & 30 & 39 & 43 \\ 24 & 53 & 58 & 24 & 47 & 56 & 63 \\ 24 & 33 & 42 & 24 & 40 & 46 & 56 \\ 28 & 40 & 39 & 24 & 52 & 58 & 65 \\ 25 & 34 & 33 & 24 & 39 & 45 & 52 \\ 24 & 24 & 24 & 19 & 24 & 14 & 24 \\ 32 & 44 & 34 & 24 & 29 & 35 & 63 \end{vmatrix}$$

Варіант 7

$$A = \begin{vmatrix} 15 & 15 & 23 & 35 & 36 & 39 & 34 \\ 16 & 15 & 41 & 41 & 45 & 48 & 46 \\ 19 & 15 & 44 & 47 & 51 & 51 & 46 \\ 15 & 13 & 15 & 18 & 15 & 15 & 15 \\ 30 & 15 & 38 & 38 & 63 & 63 & 61 \\ 30 & 15 & 32 & 38 & 36 & 63 & 61 \\ 28 & 15 & 30 & 39 & 34 & 37 & 54 \end{vmatrix}$$

Варіант 8

$$A = \begin{vmatrix} 30 & 36 & 35 & 42 & 37 & 51 & 42 \\ 24 & 29 & 34 & 41 & 39 & 47 & 41 \\ 13 & 23 & 20 & 23 & 23 & 23 & 23 \\ 24 & 30 & 32 & 44 & 42 & 53 & 47 \\ 23 & 23 & 31 & 26 & 42 & 53 & 47 \\ 23 & 34 & 33 & 34 & 32 & 69 & 63 \\ 23 & 34 & 27 & 31 & 26 & 37 & 48 \end{vmatrix}$$

Варіант 9

$$A = \begin{vmatrix} 12 & 26 & 26 & 26 & 19 & 23 & 23 \\ 28 & 56 & 49 & 48 & 28 & 54 & 57 \\ 27 & 38 & 59 & 52 & 27 & 52 & 58 \\ 26 & 31 & 30 & 44 & 26 & 50 & 56 \\ 26 & 34 & 36 & 26 & 26 & 43 & 49 \\ 27 & 32 & 31 & 27 & 23 & 45 & 51 \end{vmatrix}$$

Варіант 10

$$A = \begin{vmatrix} 15 & 18 & 14 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 19 & 30 & 18 & 40 & 44 & 42 & 47 \\ 28 & 33 & 18 & 53 & 54 & 55 & 60 \\ 25 & 30 & 18 & 41 & 45 & 46 & 51 \\ 27 & 29 & 18 & 30 & 57 & 58 & 63 \\ 28 & 30 & 18 & 28 & 32 & 54 & 59 \end{vmatrix}$$

Варіант 11

$$A = \begin{vmatrix} 24 & 36 & 32 & 24 & 30 & 39 & 43 \\ 24 & 53 & 58 & 24 & 47 & 56 & 63 \\ 24 & 33 & 42 & 24 & 40 & 46 & 56 \\ 28 & 40 & 39 & 24 & 52 & 58 & 65 \\ 25 & 34 & 33 & 24 & 39 & 45 & 52 \\ 24 & 24 & 24 & 19 & 24 & 14 & 24 \\ 32 & 44 & 34 & 24 & 29 & 35 & 63 \end{vmatrix}$$

Варіант 12

$$A = \begin{vmatrix} 20 & 19 & 19 & 16 & 19 & 19 & 19 \\ 19 & 39 & 49 & 19 & 49 & 51 & 53 \\ 28 & 34 & 56 & 19 & 56 & 58 & 57 \\ 25 & 31 & 26 & 19 & 47 & 49 & 48 \\ 29 & 38 & 42 & 19 & 63 & 65 & 64 \\ 34 & 37 & 38 & 19 & 38 & 69 & 68 \\ 36 & 36 & 46 & 19 & 40 & 39 & 66 \end{vmatrix}$$

3. Економіко-статистичні методи і моделі

3.1 Регресійне моделювання

В процесі моделювання і прогнозування процесів економічного розвитку використовується властивість тенденційності економічних систем і прагнення до збереження свого стану в короткостроковий період. Слід зазначити, що прогнозування найефективніше тоді, коли:

- розвиток економічного явища, що вивчається, відбувається відповідно до принципу інерції, тобто є всі підстави вважати, що закономірності, виявлені в періоді, що вивчається, зберігатимуться в майбутньому;
- правильно вибраний минулий період, по якому визначена закономірність розвитку, і вірно визначений період, на який зроблений прогноз, а також правильно вибрані моделі прогнозу факторних ознак і параметрів рівняння регресії, що дозволяють об'єктивно вирішувати питання про адекватність побудованих моделей;
- чинники, включені в модель, мають конкретний економічний зміст, що відображають основні напрями економічного розвитку.

Головне завдання, яке вирішується за допомогою регресійного аналізу, – створення математичних моделей економічних об'єктів або процесів на основі спостережуваних (статистичних) значень економічних показників.

Хай є два економічні показники X і Y, що характеризують економічний об'єкт. Де X і Y - це масиви економічних показників. Показник Y – називається з'ясовним (вихідним або ендогенним), показник X – що пояснює (вхідним, чинником або екзогенним).

*Залежність однієї випадкової величини від значень, які приймає інша випадкова величина, в статистиці називається **регресією.*** Якщо цій залежності надано аналітичному вигляду, то таку форму подання зображують **рівнянням регресії**.

Процедура пошуку передбачуваної залежності між різними числовими сукупностями зазвичай включає наступні етапи:

- встановлення значущості зв'язку між ними;
- можливість подання цієї залежності у формі математичного вираження (рівняння регресії).

Перший етап у зазначеному статистичному аналізі стосується виявлення так званої *кореляції, або кореляційної залежності*. *Кореляція* характеризує силу взаємозв'язку в даних. Якщо це стосується взаємозв'язку двох числових масивів x_i і yi, то таку кореляцію називають *парною*.

При пошуку кореляційної залежності зазвичай виявляється вірогідний зв'язок однієї виміряної величини x (для якогось обмеженого діапазону її зміни, наприклад від x_1 до x_n) з іншою виміряною величиною в (що також змінюється в якомусь інтервалі y_1 … y_n). В такому разі ми матимемо справу з двома числовими послідовностями, між якими і належить встановити наявність статистичного (кореляційною) зв'язку.

Таким чином, кореляційний аналіз дозволяє зробити висновок про силу взаємозв'язку між парами даних x і* y*, а регресійний аналіз використовується для прогнозування однієї змінної (y) на підставі іншої (x).

Кореляцію і регресію прийнято розглядати як сукупний процес статистичного дослідження, тому їх використання в статистиці часто іменують *кореляційно-регресійним аналізом.*

Аби виявити наявність якісного кореляційного зв'язку між двома досліджуваними числовими наборами експериментальних даних, застосовується кількісна оцінка зв'язку за допомогою розрахунку **коефіцієнт кореляції r** і **індексу кореляції R**.

Якщо між досліджуваними даними передбачається наявність лінійного зв'язку, то тісноту цього зв'язку визначають за допомогою коефіцієнта кореляції. **Коефіцієнт кореляції r** - це безрозмірна величина, вона може мінятися від 0 до ±1. Якщо **r** =±1, то існує функціональна залежність між досліджуваними величинами, якщо **r** =0, то функціональна залежність відсутня. Чим ближче по модулю значення коефіцієнта **кореляції** до одиниці (неважливо, з яким знаком), тим з більшою упевненістю можна стверджувати, що між двома розглянутими сукупностями змінних існує лінійний зв'язок. *Позитивне значення* **коефіцієнта кореляції** свідчить про наявність прямого зв'язку між змінними, негативне значення - про зворотну, тобто коли зростає одна змінна, інша зменшується.

Існують різні аналітичні прийоми визначення коефіцієнта r. Відома така формула:

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M_x\right)\left(y_i-M_y\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M_x\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-M_y\right)^2}} \tag{3.1}$$

де

n - число спостережень (кількість елементів в досліджуваних масивах економічних показників);

x_i - значення факторного показника (Масив X);

M_x - середнє значення факторного показника;

y_i - фактичне значення результативного (з'ясовного) показника (Масив Y);

M_y - середнє значення результативних показників.

Знаючи коефіцієнт кореляції, можна дати якісно-кількісну оцінку тісноти лінійного зв'язку. Використовуються, наприклад, спеціальні табличні співвідношення (таблиця 1):

Таблица 1

Качественная оценка тесноты связи

Величина коэффициента парной корреляции	Характеристика силы связи
До 0,3	Практически отсутствует
0,3–0,5	Слабая
0,5–0,7	Заметная
0,7–0,9	Сильная
0,9–0,99	Очень сильная

Такі оцінки носять загальний характер і не претендують на статистичну строгість, оскільки не дають гарантій на імовірнісну достовірність. Тому в статистиці прийнято використовувати надійніші критерії для оцінки тісноти зв'язку, ґрунтуючись на розрахованих значеннях коефіцієнта парної кореляції (КПК).

Статистичну оцінку КПК проводять шляхом порівняння його абсолютної величини з табличним (або критичним) показником $r_{крит}$, значення якого відшукуються із спеціальної таблиці.

Якщо виявиться, що $|r_{расч} > r_{крит}$, то із заданою мірою вірогідності (зазвичай 95 %) можна стверджувати, що між тими, що розглядаються числовими сукупностями існує значимий лінійний зв'язок. Або по-іншому гіпотеза про значущість лінійного зв'язку не відкидається.

У разі ж зворотного співвідношення, тобто при $|r_{расч} < r_{крит}$, робиться висновок про відсутність значимого лінійного зв'язку.

Якщо між досліджуваними даними передбачається наявність криволінійного зв'язку, то тіснота такого зв'язку аналізується за допомогою індексу кореляції (R).

Індекс кореляції R - це безрозмірна величина, вона може мінятися від 0 до ±1. Якщо **R**=±1, то існує функціональна залежність між досліджуваними величинами, якщо **R**=0, то функціональна залежність відсутня. Чим по модулю ближче значення індексу кореляції до одиниці (неважливо, з яким знаком), тим з більшою упевненістю можна стверджувати, що між двома розглянутими сукупностями змінних існує криволінійний зв'язок.

Існує наступна формула для визначення індексу кореляції:

$$R=\sqrt{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-Y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-M_y\right)^2}} \qquad (3.2)$$

де

n - число спостережень (кількість елементів в досліджуваних масивах економічних показників);

y_i - фактичне значення результативного (з'ясовного) показника (Масив Y);

M_y - середнє значення результативних показників;

Y_i - теоретичне (розрахункове) значення результативного показника.

Якщо коефіцієнт кореляції є мірою тісноти зв'язку лише для лінійної форми зв'язку, то індекс кореляції – і для лінійної і для криволінійної. При прямолінійному зв'язку коефіцієнт кореляції по своїй абсолютній величині дорівнює індексу кореляції.

Якщо між двома досліджуваними масивами економічних показників встановлений значимий зв'язок, то необхідне перейти до другого етапу кореляційно-регресійного аналізу: представленню цьому зв'язку в математичній формі з використанням апроксимуючого вираження (математичною функції - рівнянням регресії).

Дослідження такої ситуації і *є завданням регресійного аналізу*, який дає передбачення (прогнозування) одній змінній на підставі іншої. Змінна, яка прогнозується (функція), позначається як y, а змінна, яка використовується для такого прогнозування (аргумент або чинник), це x.

Таким чином, в разі виявлення кореляції дається спроба відповісти на питання: «Чи існує зв'язок?» Метою регресійного аналізу є пошук відповіді на вже складніше питання: «Який вигляд цього зв'язку? Що на що впливає?»

Зазвичай під апроксимацією (від латів. наближення) розуміють заміну одного об'єкту іншим (F), відомішим і простішим (f), проте вельми близьким до початкового за своїм змістом (F ? f).

При вивченні зв'язку показників економічної діяльності застосовуються різного вигляду рівняння прямолінійного і криволінійного зв'язку. Формально можуть виникати ситуації двох типів:

1. Вигляд функціональної залежності невідомий. В цьому випадку потрібно вирішити заздалегідь завдання, направлене на відшукання відповідної функціональної залежності.

2. Вигляд функціональної залежності відомий і потрібно лише знайти її параметри (коефіцієнти регресії).

Терміном ***парний лінійний регресійний аналіз*** позначають таке прогнозування, яке описується лінійним взаємозв'язком між досліджуваними змінними: $y=b_0+b_1 \cdot x$.

В разі ***парних криволінійних (нелінійних) залежностей*** застосовуються математичні функції наступного вигляду:

гіперболічна $y=b_0+\frac{b_1}{x}$;

показова $y=b_0+b_{1^x}$;

статечна $y=b_0 x^{b_1}$;

параболічна $y=b_0+b_1 x+b_2 x^2$;

логарифмічна $y=b_0+b_1 \cdot \lg x$;

експоненціальна $y=b_0 e^{b_1 x}$

поліноміальна $y=b_0+b_1 x+b_2 x^2+\ldots b_m x^m$.

функції зворотної пропорційності :

$$y = 1/(b_0+b_1x);$$
$$y = b_0 + b_1x + b_2\,(1/x);$$
$$y = 1/(b_0 + b_1x + b_2x^2);$$
$$y = b_0/(1 + b_1e^{-b2x})$$

та інші.

Визначення математичних рівнянь зв'язку передбачає обчислення за вихідними даними їх параметрів (вільного член b_0 а і коефіцієнтів регресії b_0, b_1, … .).

Апроксимуючі рівняння можуть бути всілякими, оскільки при виборі аналітичної залежності керуються не якимись строгими теоріями (фізичними або економічними), а ставлять лише одне умову - можливо близька відповідність значень, обчислених за формулою дослідним даним. Таким чином, формальний опис одного і того ж процесу можна дати різними по вигляду рівняннями. Їх придатність оцінюється лише по одному критерію - найбільш точне передбачення експериментального результату.

Параметри рівняння парної регресії визначають на підставі методу найменших квадратів (МНК), який вимагає мінімізації суми квадратів відхилень (помилок) спостережуваних значень від розрахункових.

Побудовану модель парної регресії перевіряють на адекватність по критерію Фішера. За допомогою F-критерію Фішера перевіряється гіпотеза про неадекватність моделі. Для цього порівнюються середній квадрат відхилень, який можна пояснити, виходячи з рівняння регресії, і середній квадрат помилок.

Тоді нульова і конкуруюча гіпотези формулюються таким чином: H_0 – побудована модель неадекватна і спостережувані значення змінних краще описувати середнім значенням y; H_1 – побудована модель адекватна і відповідає дійсності, тобто добре описує експериментальні дані.

Спостережувані значення критерію розраховуємо по формулі:

$$F_{набл}(m\text{-}1\,;n\text{-}1)=\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-M_y)^2}{m-1}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-y_i)^2}{n-m}} \qquad (3.3)$$

де

m - загальне число оцінюваних параметрів;

n - число спостережень (кількість елементів в досліджуваних масивах економічних показників);

Y_i - теоретичне (розрахункове) значення результативного показника;

y_i - фактичне значення результативного (з'ясовного) показника (Масив Y);

M_y - середнє значення результативних показників.

По рівню значущості α (наприклад, для α =0,05) і числу мір свободи m – 1 і n – m по таблиці критичних точок Фішера визначуваний $F_{крит}$ У випадку якщо $F_{набл} > F_{крит}$, то побудована регресійна модель вважається адекватною і її можна використовувати для прогнозів.

3.1.1. Метод найменших квадратів

Хай є ряд спостережуваних значень показників (Y, X), отриманих двома способами:

1) у різні періоди часу для одного об'єкту;
2) у один період часу для різних однотипних об'єктів.

Вихідні дані зведені в таблицю.

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	…	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	…	y_n

Необхідно побудувати аналітичну залежність вигляду $Y = f(x, a_0\ a_1, ..., a_k)$, що найближче описує спостережувані значення економічних показників. Підібрану методом найменших квадратів залежність прийнято називати такою, що апроксимує.

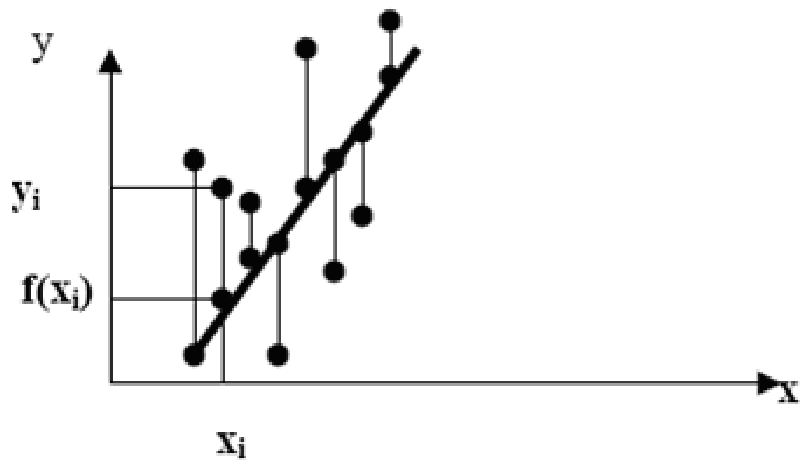
Завдання підбору експериментальної залежності методом найменших квадратів складається з двох етапів:

- на першому етапі за експериментальними даними вибирається вигляд залежності (пряма, парабола, експонента і так далі);
- на другому – підбираються параметри (коефіцієнти) вибраної залежності.

Ідея методу МНК полягає в тому, що функцію $Y = f(x, a_0\ a_1, ..., a_k)$ необхідно підібрати так, щоб сума квадратів відхилень експериментальних значень y_i від розрахункових $Y_i = f(x, a_0\ a_1, ..., a_k)$, (теоретичних) була найменшою:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-f(x_i,a_0,a_1,\ldots,a_k)\right]^2\rightarrow \min \qquad (3.1)$$

Геометрична інтерпретація цього методу представлена на мал. 19.



Мал. 19

Завдання зводиться до визначення коефіцієнтів a_i з умови (3.1). Необхідно знайти значення $a_0, a_1, \ldots, a_k$ при яких функція S досягає мінімального значення.

Особливості МНК:

1. Цей метод не дає відповіді на питання про те, якого вигляду функція краще всього апроксимує конкретні експериментальні крапки. Вигляд функції, що цікавить нас, має бути заданий на основі якихось економічних міркувань (або

спеціальним чином відшуканий). МНК дозволяє лише вибрати, яка з прямих (парабол, експонент) є кращій прямій (параболою, експонентою) для прогнозування.

2. Обчислення по МНК є досить громіздкими, тому основне навантаження - на комп'ютерні програми.

3. МНК є досить точним прийомом і дозволяє отримати сповна надійні результати. Одночасно він є інтерполяційним методом, оскільки забезпечує з певною вірогідністю передбачення будь-яких значень y_i в інтервалі вивчених значень x_i.

3.2. Реалізація регресійного моделювання в MS Excel

3.2.1. Лінійна регресія в Excel

Для розрахунку **коефіцієнта кореляції** в Excel використовують функцію **КОРРЕЛ (масив1, масив2)**, де Массив1 і Массив2 – це масиви експериментальних даних.

Завдання відшукання функціональної залежності дуже важливе, тому для її вирішення в **Excel** введений набір функцій, заснованих на методі найменших квадратів.

Функція **ЛИНЕЙН** розраховує статистику для ряду із застосуванням методу найменших квадратів, обчислюючи пряму лінію, яка щонайкраще апроксимує наявні дані. Функція повертає масив, який описує отриману пряму.

Синтаксис функції **ЛИНЕЙН**:

ЛИНЕЙН (*відомі_значення_у*; *відомі_значення_х*; *конст*; *статистика*)

де

відомі_значення_у **-** це множина значень ***у***, які вже відомі для співвідношення ***у =Ах+В***;

відомі_значення_х **-** це множина відомих значень ***х***. Якщо цей аргумент опущений, то передбачається, що це масив {1; 2; 3; ...} такого ж розміру, як і ***відомі_значення_у***;

конст **-** це логічне значення, яке вказує, чи потрібне, аби константа ***b*** дорівнювала 0. Якщо воно має значення НЕПРАВДА, то ***b*** вважається рівним 0 і значення ***А*** підбираються так, щоб виконувалося співвідношення ***у=Ах***;

статистика це логічне значення, яке вказує, чи потрібно видати додаткову статистику по регресії. Додаткова регресійна статистика виводитиметься в порядку:

Значення коефіцієнта b	Значення коефіцієнта a
Середньоквадратичне відхилення b	Середньоквадратичне відхилення a
Коефіцієнт детермінації	Середньоквадратичне відхилення y
F – статистика	Число мір свободи
Регресійна сума квадратів	Залишкова сума квадратів

Оскільки функція **ЛИНЕЙН** повертає масив значень, то перед її викликом необхідно:

1. виділити блок з п'яти рядків і двох стовпців, якщо виводимо повну статистику (третій і четвертий аргументи істина);
2. виділити блок з двох горизонтальних осередків, якщо виводимо лише значення коефіцієнтів рівняння регресії.

Після завершення введення аргументів функції **ЛИНЕЙН необхідно одночасно натискувати клавіші** уведення аргументів функції **ЛИНЕЙН необхідно одночасно** нажати клавіші ***Ctrl***+***Shift***+***Enter*. В результаті в перше вічко діапазону буде виведено значення коефіцієнта А, в другу значення коефіцієнта В (Рів-ня у =*Ax*+*B)***

Значення коефіцієнтів для рівняння лінійної регресії ***в =Ax+B*** можна обчислити за допомогою функцій **НАКЛОН** і **ОТРЕЗОК**, не удаючись до функції **ЛИНЕЙН**. Назви цих функцій відповідають геометричному сенсу коефіцієнтів регресії: ***A*** - це тангенс кута нахилу прямої регресії, а ***B*** - відрізок, що відсікається цією прямою на осі ординат.

Синтаксис функцій :

НАКЛОН (*відомі_значення_y*; *відомі_значення_x*);

ОТРЕЗОК(*відомі_значення_x*; *відомі_значення_y*).

3.2.2. Підбір коефіцієнтів для рівняння регресії, що описує рівняння криволінійного зв'язку

Побудова різних апроксимуючих залежностей в MS Excel реалізована за допомогою надбудови **Пошук рішення** і у вигляді властивості діаграми – **лінії тренду**.

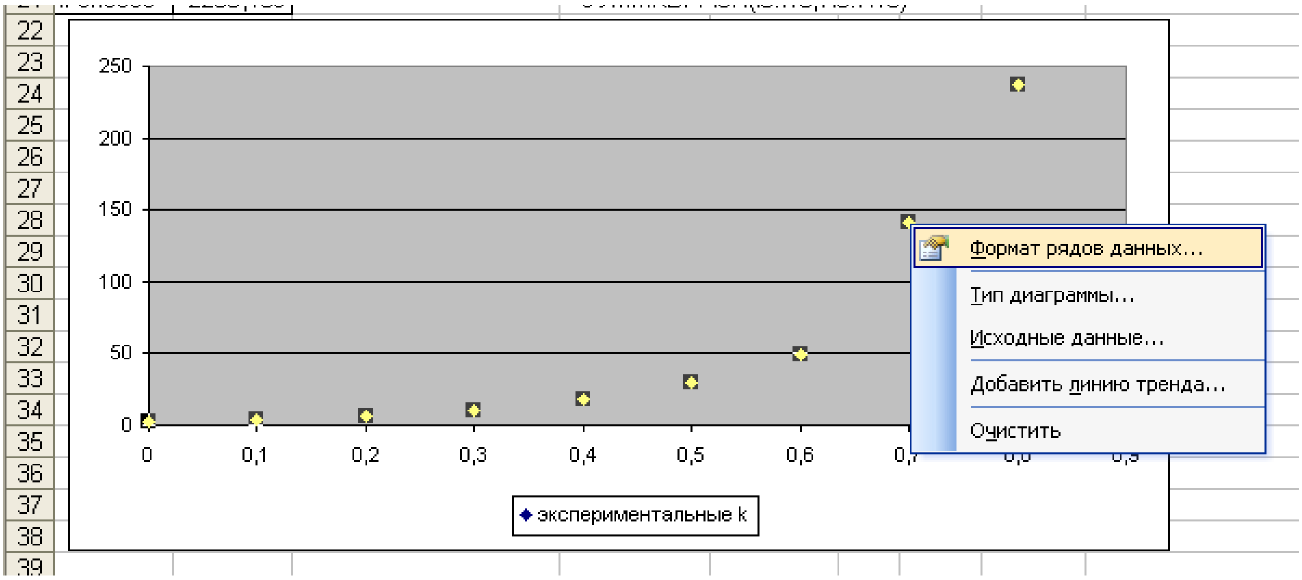
За допомогою ***лінії тренду*** можна побудувати апроксимуючі залежності наступних видів:

- логарифмічна $y = b_0 + b_1 \cdot \lg x$
- поліноміальна $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots b_m x^m$ (3.2)
- статечна $y = b_0 x^{b_1}$;
- експоненціальна $y = b_0 e^{b_1 x}$.

За допомогою лінії тренду можна також визначити коефіцієнти лінійної залежності.

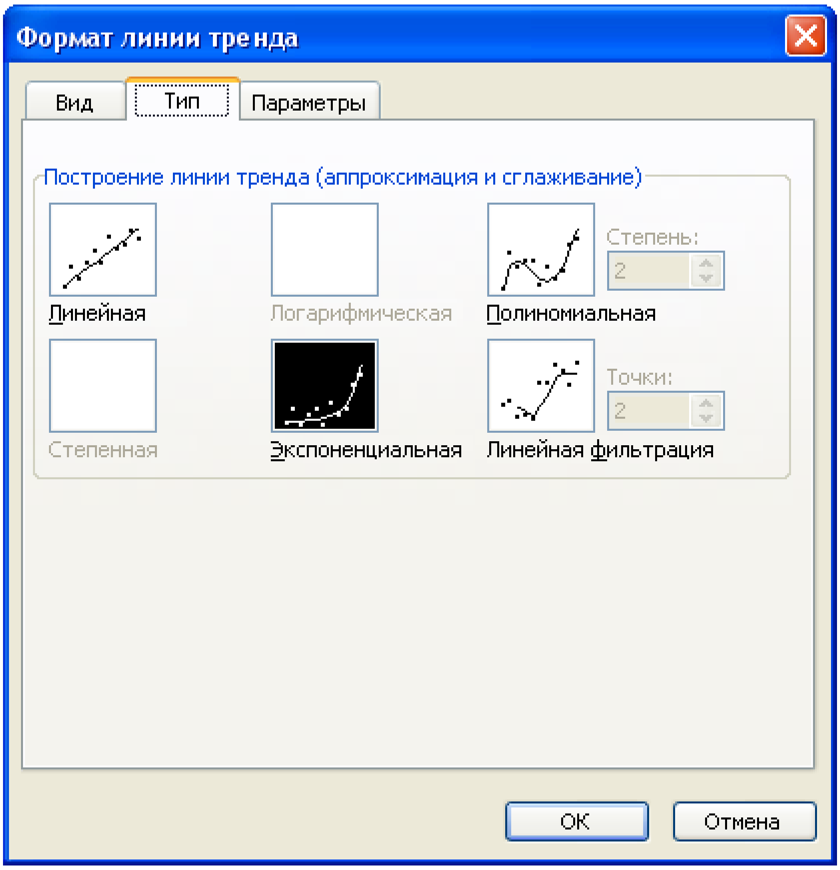
Побудова апроксимуючої залежності описаних вище типів за допомогою лінії тренду, здійснюється таким чином:

1. за вихідними даними будують точкову діаграму.
2. до побудованого ряду даних додають лінію тренду (мал. 5 – мал. 8)

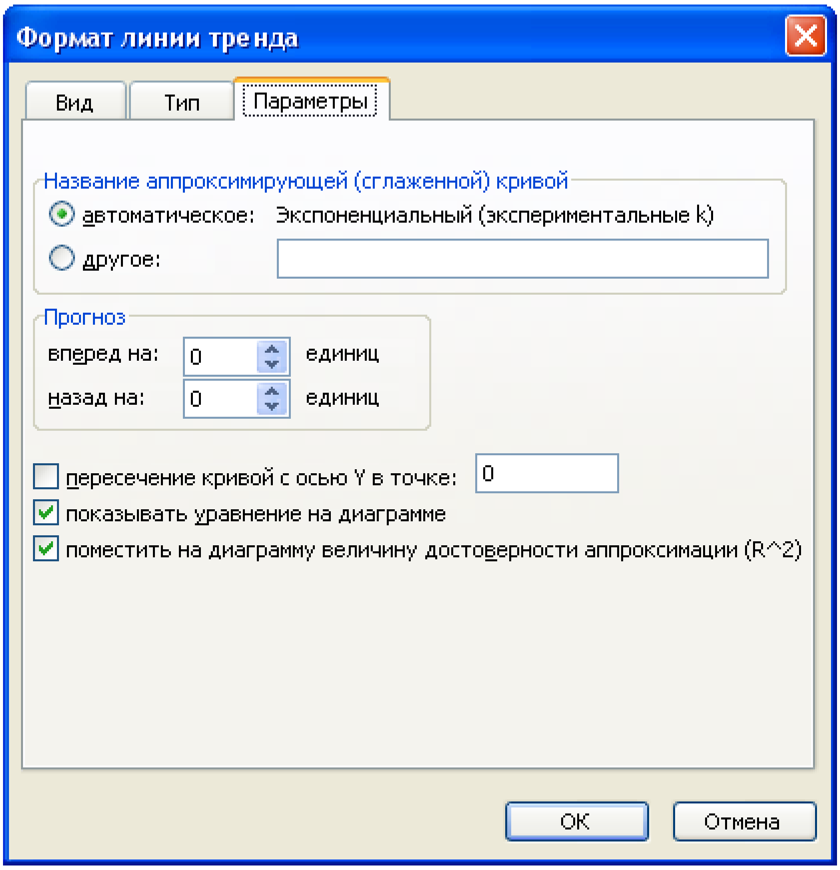


Мал. 5

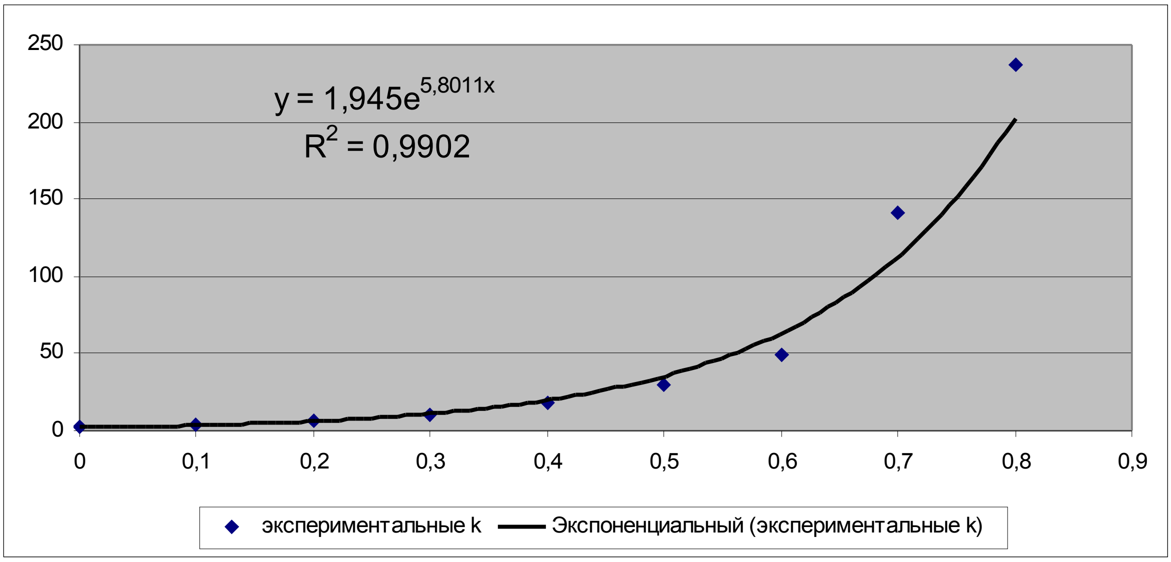
За допомогою надбудови **Пошук рішення** можна побудувати апроксимуючу залежність будь-якого вигляду.



Мал. 6



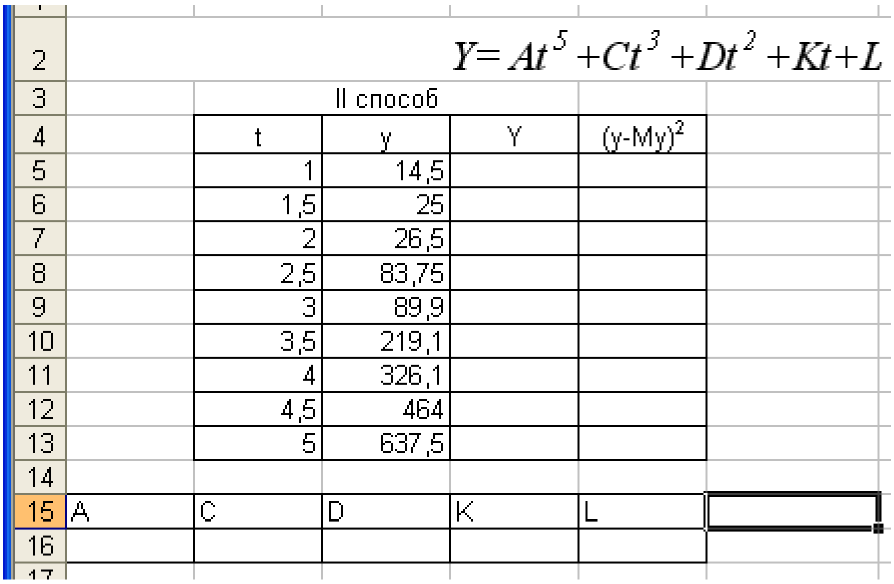
Мал. 7



Мал. 8

Побудова апроксимуючої залежності за допомогою надбудови **Пошук рішення,** здійснюється таким чином:

1. вводять на аркуш Excel вихідні дані і визначають осередкі аркуша, де зберігатимуться шукані коефіцієнти (параметри) аналітичної залежності (мал. 9).



$$Y = At^5 + Ct^3 + Dt^2 + Kt + L$$

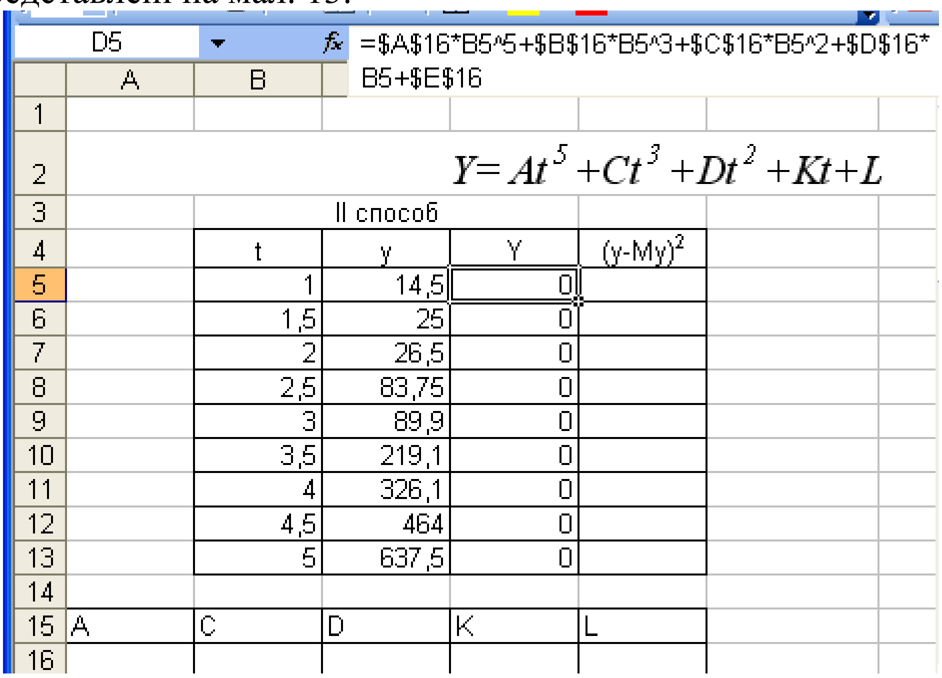
ІІ способ

t	y	Y	(y-My)^2
1	14,5		
1,5	25		
2	26,5		
2,5	83,75		
3	89,9		
3,5	219,1		
4	326,1		
4,5	464		
5	637,5		

A	C	D	K	L

Мал. 9

2. вводять рівняння аналітичної залежності на аркуш Excel (мал. 10)
3. за допомогою функції СУММКВРАЗН() визначають суму квадратів відхилень експериментальних значень y_i від розрахункових $Y_i = f(x, a_0\ a_1, ..., a_k)$, тобто визначають **сумарну квадратичну помилку** (мал. 11).
4. вибирають **Сервіс➢Пошук рішення, і** в діалоговому вікні, що з'явилося, в полі **Встановити цільовий осередок** вказують осередок з обчисленим сумарним квадратичним осередком. Потім вибирають її **рівною мінімальному значенню,** а в полі **Змінюючи осередки** вказують діапазон осередків в якому мають бути обчислені коефіцієнти рівняння регресії (аналітичній залежності), клацають на кнопці **Виконати (мал. 12).**
5. коефіцієнти апроксимуючої залежності вигляду: $Y = At^5+Ct^3+Dt^2+Kt+L$ представлені на мал. 13.



D5 =$A$16*B5^5+$B$16*B5^3+$C$16*B5^2+$D$16*B5+$E$16

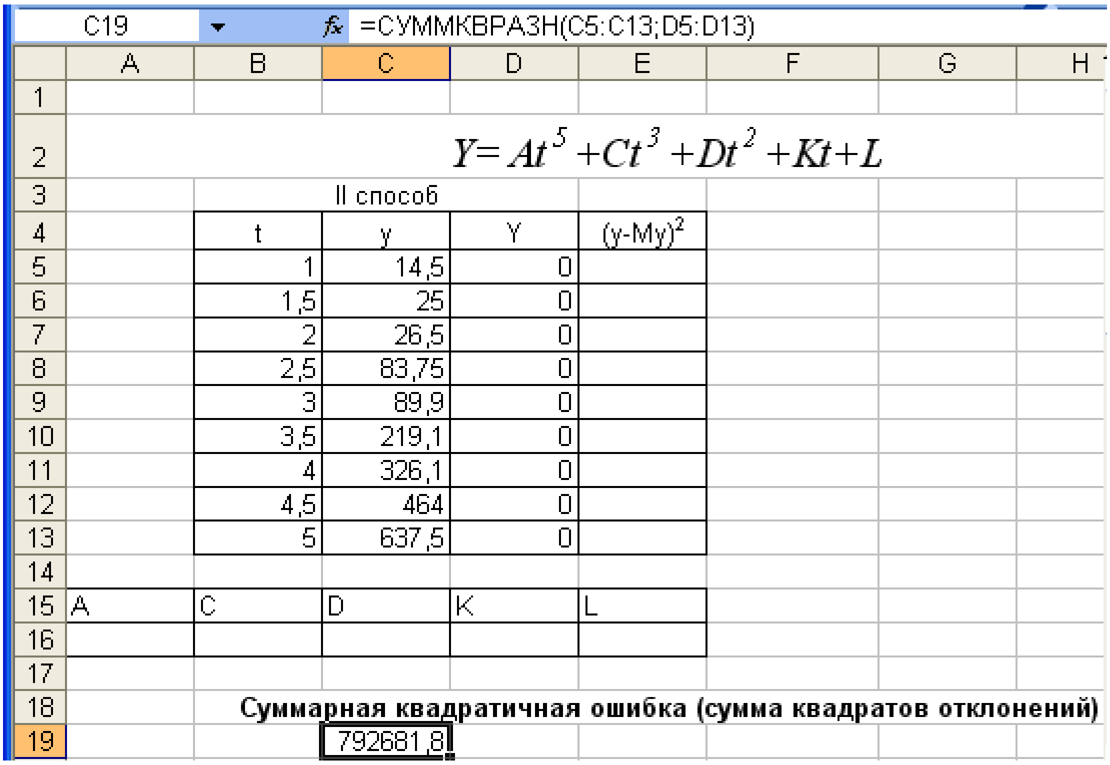
$$Y = At^5 + Ct^3 + Dt^2 + Kt + L$$

ІІ способ

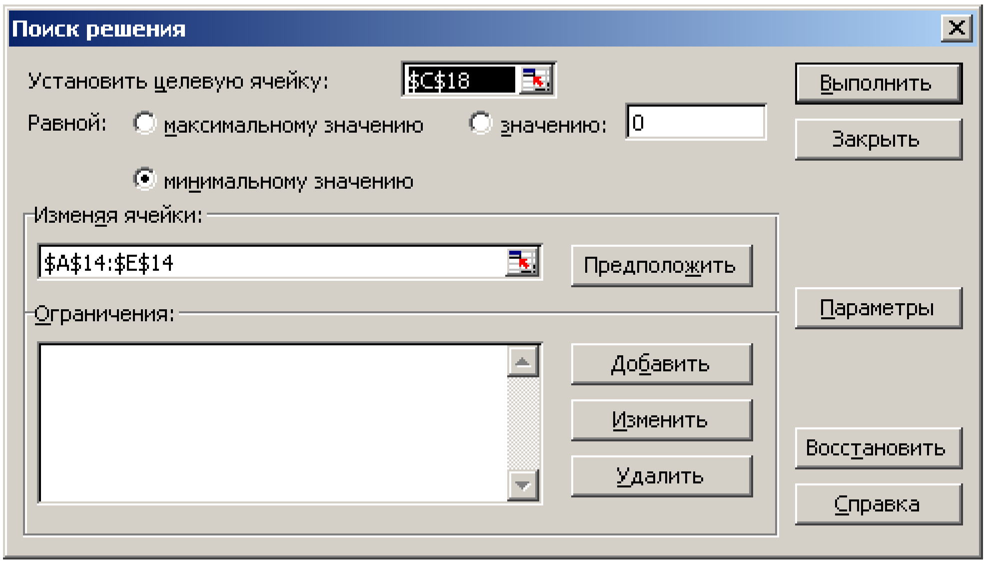
t	y	Y	(y-My)^2
1	14,5	0	
1,5	25	0	
2	26,5	0	
2,5	83,75	0	
3	89,9	0	
3,5	219,1	0	
4	326,1	0	
4,5	464	0	
5	637,5	0	

A	C	D	K	L

Мал. 10


C19
=СУММКВРАЗН(C5:C13;D5:D13)
A B C D E F G H
$Y = At^5 + Ct^3 + Dt^2 + Kt + L$
II способ
t y Y (y-My)2
1 14,5 0
1,5 25 0
2 26,5 0
2,5 83,75 0
3 89,9 0
3,5 219,1 0
4 326,1 0
4,5 464 0
5 637,5 0
A C D K L
Суммарная квадратичная ошибка (сумма квадратов отклонений)
792681,8

Мал. 11


Поиск решения
Установить целевую ячейку: $C$18
Равной: максимальному значению значению: 0
минимальному значению
Изменяя ячейки:
$A$14:$E$14
Предположить
Ограничения:
Добавить
Изменить
Удалить
Выполнить
Закрыть
Параметры
Восстановить
Справка

Мал. 12

H15 | f_x =(СУММ(F5:F13)/(2-1))/(СУММ(E5:E13)/(9-2))

	A	B	C	D	E	F	
1							
2				$Y = At^5 + Ct^3 + Dt^2 + Kt + L$			
3			II способ				
4		t	y	Y	(y-My)^2	(Y-My)^2	
5		1	14,5	14,9754	38061,84	37876,5743	
6		1,5	25	22,77579	34075,11	34901,20848	
7		2	26,5	34,6275	33523,58	30613,43031	
8		2,5	83,75	63,10512	15836,82	21459,12128	
9		3	89,9	117,6953	14326,76	8445,458638	
10		3,5	219,1	204,0246	90,35559	31,0233596	
11		4	326,1	323,0877	13573,54	12880,729	
12		4,5	464	470,4755	64722,19	68058,90706	
13		5	637,5	635,6025	183103,2	181482,8674	
14							
15	A	C	D	K	L		F
16	-0,20587	23,19942	-88,9608	130,5204	-49,5778		F
17							
18		Суммарная квадратичная ошибка (сумма квадрат					
19			1551,891				

Мал. 13

3.3. Приклади побудови регресійних моделей

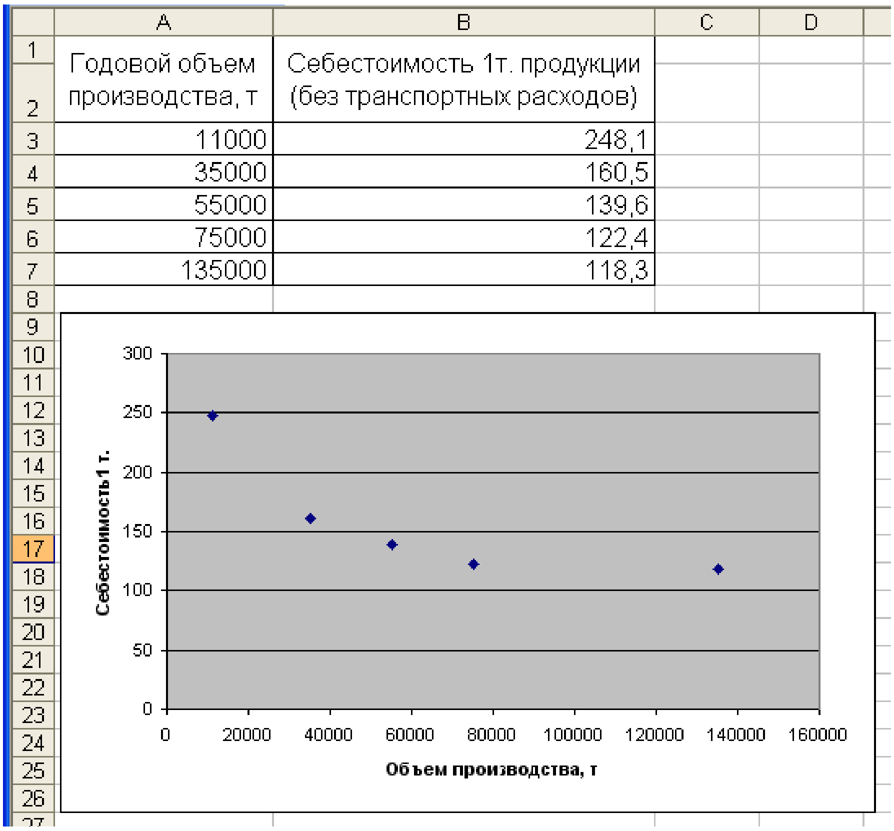
Візьмемо п'ять підприємств з різним обсягом виробництва однорідної продукції, і випишемо їх основні звітні показники (таблиця 2).

Таблиця 2

Годовой объем производства, т	Себестоимость 1т продукции (без транспортных расходов)	Удельные транспортные расходы
11000	248,1	14,7
35000	160,5	23,8
55000	139,6	26,3
75000	122,4	29,7
135000	118,3	39,8

Для розширення круга альтернативних варіантів підприємств визначимо моделі, що характеризують залежність собівартості продукції і транспортних витрат від обсягу виробництва.

Спочатку визначимо характер залежності від обсягу виробництва собівартості одиниці продукції. Для цієї мети побудуємо графік, що характеризує дану залежність (рис.14).



Годовой объем производства, т	Себестоимость 1т. продукции (без транспортных расходов)
11000	248,1
35000	160,5
55000	139,6
75000	122,4
135000	118,3

Мал. 14

Визначимо наявність якісного кореляційного зв'язку між двома досліджуваними наборами даних, за допомогою розрахунку **коефіцієнт кореляції r**. Для цієї мети скористаємося статистичною функцією Excel **КОРРЕЛ** (див. мал. 15). Отримана величина коефіцієнта кореляції дозволяє передбачати наявність сильного прямолінійного зв'язку між досліджуваними наборами даних.

Перейдемо до другого етапу кореляційно-регресійного аналізу: представленню зв'язку між двома досліджуваними наборами даних в математичній формі з використанням апроксимуючого вираження (математичною функції - рівняння регресії).

Як видно з побудованого графіка, емпірична лінія регресії по своєму характеру близька до прямої лінії або кривої типа гіперболи і може бути описана рівняннями:

$$Y = A_1 x + B_1 \tag{3.3}$$

$$Y = A + \frac{B}{x} \tag{3.4}$$

I10 fx =КОРРЕЛ(A3:A7;B3:B7)

	A	B	H	I	J
1					
2	Годовой объем производства, т	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов)	y=a1x+b1	(Y-y)^2	(Y-My)^2
3	11000	248,1	203,3141	2005,77404	2073,35711
4	35000	160,5	181,97	460,96121	585,156449
5	55000	139,6	164,1832	604,335551	41,0014467
6	75000	122,4	146,3965	575,830438	129,584819
7	135000	118,3	93,03616	638,261754	4191,76518
8	Σ			4285,163	7020,865
9	My	157,78			
10			коэф корр	-0,7880255	

Мал. 15

Для визначення параметрів представлених рівнянь скористаємося деякими засобами, що надаються пакетом програм MS Excel.

Коефіцієнти парної лінійної регресії (3.3) визначимо за допомогою функції ЛИНЕЙН так, як це показано на малюнку 16. А потім визначимо розрахункові показники собівартості, як це показано на малюнку 17.

I12 fx {=ЛИНЕЙН(B3:B7;A3:A7;;1)}

	A	B	H	I	J
1					
2	Годовой объем производства, т	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов)	y=a1x+b1	(Y-y)^2	
3	11000	248,1	203,3141	2005,77404	
4	35000	160,5	181,97	460,96121	
5	55000	139,6	164,1832	604,335551	
6	75000	122,4	146,3965	575,830438	
7	135000	118,3	93,03616	638,261754	
8	Σ			4285,163	
9	My	157,78			
10			коэф корр	-0,7880255	
11				A1	B1
12				-0,0008893	213,096855
13				0,00040114	30,1367229
14				0,62098422	37,7940163
15			Fнабл	4,91523777	3
16				7020,865	4285,163

Мал. 16

Побудовану модель парної лінійної регресії перевіримо на адекватність по критерію Фішера. $F_{набл}$ можна визначити за результатами обчислень функції ЛИНЕЙН (див. мал. 17) Отже, $F_{набл}$=4,92. $F_{крит}$ можна визначити за допомогою відповідних таблиць або скористатися статистичною функцією Excel **FРАСПОБР.** Вхідними параметрами функції є рівень значущості (вірогідність, наприклад 0,05**) і число ступенів свободи 1 і 2.** Для моделі парної регресії число мір свободи відповідно дорівнює 1 (одна пояснююча змінна) і n - k – 1 (де до = 1 - число пояснюючих змінних).n - 2 = 5 – 2 = 3. Отже, Отже, $F_{крит}$=10,13 (див. мал. 18).

H3 | =$I$12*A3+$J$12

	A	B	H	I	J
1–2	Годовой объем производ ства, т	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов)	y=a1x+b1	(Y-y)^2	
3	11000	248,1	203,3141	2005,77404	
4	35000	160,5	181,97	460,96121	
5	55000	139,6	164,1832	604,335551	
6	75000	122,4	146,3965	575,830438	
7	135000	118,3	93,03616	638,261754	
8	Σ			4285,163	
9	My	157,78			
10			коэф корр	-0,7880255	
11				A1	B1
12				-0,0008893	213,096855
13				0,00040114	30,1367229
14				0,62098422	37,7940163
15			Fнабл	4,91523777	3
16				7020,865	4285,163

Мал. 17

D18 | =FPACПОБР(0,05;1;3)

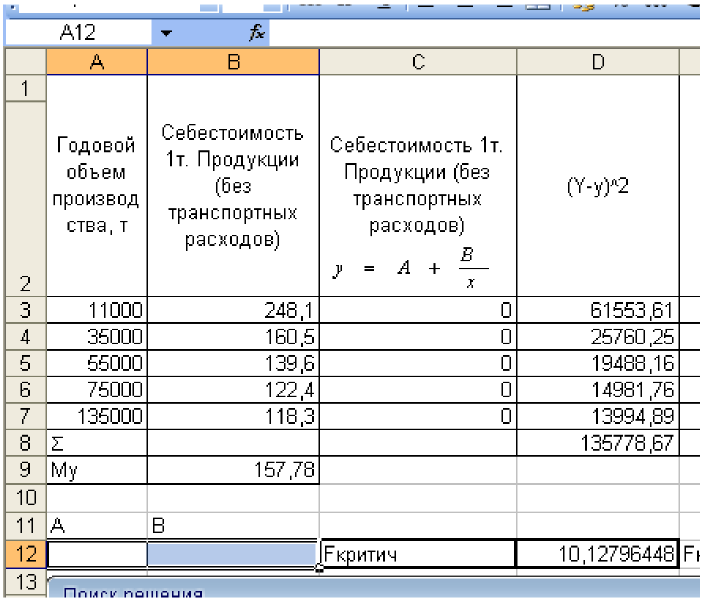
	A	B	C	D
1–2	Годовой объем производ ства, т	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов)		
3	11000	248,1		
4	35000	160,5		
5	55000	139,6		
6	75000	122,4		
7	135000	118,3		
8	Σ			
9	My	157,78		
10				
11				
12			Fкритич	10,12796448

Мал. 18

Оскільки отримані значення $F_{набл} < F_{крит}$, то побудована регресійна модель вважається неадекватною і її не можна використовувати для прогнозів.

Коефіцієнти парної криволінійної залежності вигляду (3.4) визначимо за допомогою засобу **Пошук рішення:**

1. визначимо осередок аркуша, де зберігатимуться шукані коефіцієнти (параметри) аналітичної залежності (мал. 19).

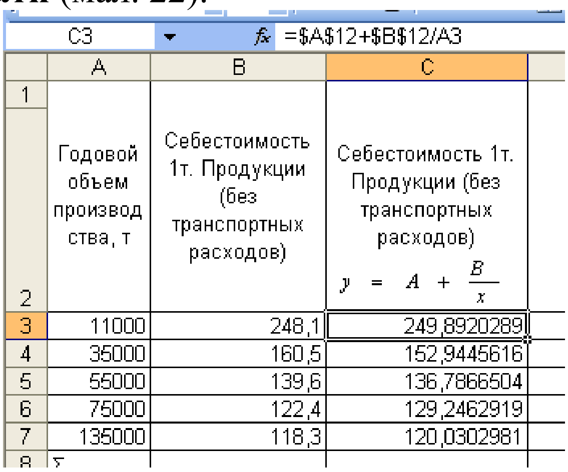


A12 | f_x

	A	B	C	D
1				
2	Годовой объем производ ства, т	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов)	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов) $y = A + \frac{B}{x}$	(Y-y)^2
3	11000	248,1	0	61553,61
4	35000	160,5	0	25760,25
5	55000	139,6	0	19488,16
6	75000	122,4	0	14981,76
7	135000	118,3	0	13994,89
8	Σ			135778,67
9	My	157,78		
10				
11	A	B		
12			Fкритич	10,12796448
13	Поиск решения			

Мал. 19

2. введемо рівняння аналітичної залежності на аркуш Excel (мал. 20)
3. за допомогою наступних обчислень визначимо суму квадратів відхилень експериментальних значень y_i від розрахункових $Y_i = f(x, a_0\ a_1, ..., a_k)$, тобто визначають **сумарну квадратичну помилку** (мал. 21).
4. вибирають **Сервіс➢Пошук рішення**, і в діалоговому вікні, що з'явилося, у **поле Встановити цільовий** осередок указують осередок з обчисленим сумарним квадратичним осередком. Потім **вибирають її рівної мінімальному значенню, а** в поле **Змінюючи осередки** вказують діапазон осередків у якому повинні бути обчислені коефіцієнти рівняння регресії (аналітичної залежності), клацають на кнопці **Виконати** (мал. 22).



C3 | f_x =$A$12+$B$12/A3

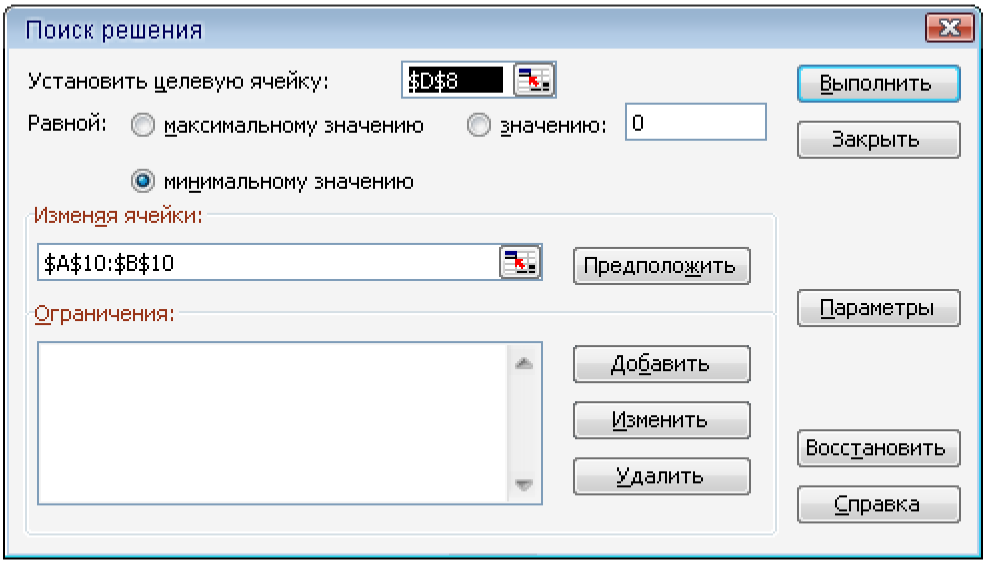
	A	B	C
1			
2	Годовой объем производ ства, т	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов)	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов) $y = A + \frac{B}{x}$
3	11000	248,1	249,8920289
4	35000	160,5	152,9445616
5	55000	139,6	136,7866504
6	75000	122,4	129,2462919
7	135000	118,3	120,0302981
8	Σ		

Мал. 20

D3 =(C3-B3)^2

	A	B	C	D	E
1					
2	Годовой объем производства, т	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов)	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов) $y = A + \frac{B}{x}$	(Y-y)^2	(Y-My)^2
3	11000	248,1	0	61553,61	24894,5284
4	35000	160,5	0	25760,25	24894,5284
5	55000	139,6	0	19488,16	24894,5284
6	75000	122,4	0	14981,76	24894,5284
7	135000	118,3	0	13994,89	24894,5284
8	Σ			135778,67	124472,642
9	My	157,78			=СУММ(D3:D7)

Мал. 21



Мал. 22

А тепер визначимо розрахункові показники собівартості, як це показано на малюнку 23.

D3 =(C3-B3)^2

	A	B	C	D	E
1					
2	Годовой объем производства, т	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов)	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов) $y = A + \frac{B}{x}$	(Y-y)^2	(Y-My)^2
3	11000	248,1	249,8920289	3,211367672	8484,625873
4	35000	160,5	152,9445616	57,08464871	23,38146407
5	55000	139,6	136,7866504	7,914935784	440,720726
6	75000	122,4	129,2462919	46,87171233	814,1724998
7	135000	118,3	120,0302981	2,99393139	1425,039996
8	Σ			118,0765959	11187,94056
9	My	157,78			=СУММ(D3:D7)
10					
11	A	B			
12	108,5103	1555198,954	Fкритич	10,12796448	Fнабл

Мал. 23

Для побудованої моделі парної криволінійної регресії визначимо індекс кореляції. Для цього за допомогою функції СРЗНАЧ визначимо середнє значення собівартості 1 т. продукції (див. осередок B9 на мал. 23) і суму квадратів різниць між спостережуваними (факторними) значенням собівартості продукції і її середнім значенням (серед спостережуваних значень) як показано на малюнку 24. Тоді індекс кореляції можна обчислити за формулою представленою на малюнку 25. Отримана величина індексу кореляції дозволяє говорити про існування дуже сильного криволінійного зв'язку між двома досліджуваними сукупностями даних.

F3 | f_x =(B3-$B$9)^2

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Годовой объем производства, т	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов)	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов) $y = A + \frac{B}{x}$	(Y-y)^2	(Y-My)^2	(y-my)^2	
3	11000	248,1	249,8920289	3,211367672	8484,625873	8157,7024	
4	35000	160,5	152,9445616	57,08464871	23,38146407	7,3984	
5	55000	139,6	136,7866504	7,914935784	440,720726	330,5124	
6	75000	122,4	129,2462919	46,87171233	814,1724998	1251,7444	
7	135000	118,3	120,0302981	2,99393139	1425,039996	1558,6704	
8	Σ			118,0765959	11187,94056	11306,028	
9	My	157,78	=СУММ(D3:D7)		=СУММ(E3:E7)	=СУММ(F3:F7)	
10							

Мал. 24

B32 | f_x =(1-D8/F8)^(1/2)

	A	B	C
32	индек коррел	0,994764452	
33			

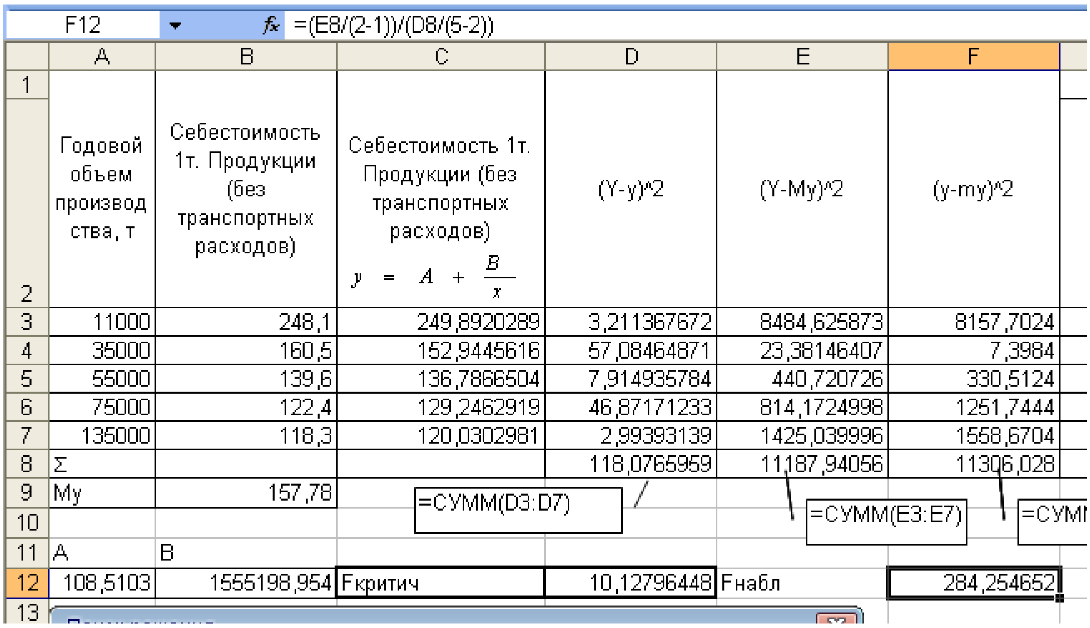
Мал. 25

Побудовану модель парної криволінійної регресії перевіримо на адекватність по критерію Фішера. $F_{набл}$ можна визначити, як показано на малюнках 26 і 27. Отже, $F_{набл}$=284,25..

E3 | f_x =(C3-$B$9)^2

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Годовой объем производства, т	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов)	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов) $y = A + \frac{B}{x}$	(Y-y)^2	(Y-My)^2	(y-my)^2	
3	11000	248,1	249,8920289	3,211367672	8484,625873	8157,7024	
4	35000	160,5	152,9445616	57,08464871	23,38146407	7,3984	
5	55000	139,6	136,7866504	7,914935784	440,720726	330,5124	
6	75000	122,4	129,2462919	46,87171233	814,1724998	1251,7444	
7	135000	118,3	120,0302981	2,99393139	1425,039996	1558,6704	
8	Σ			118,0765959	11187,94056	11306,028	
9	My	157,78	=СУММ(D3:D7)		=СУММ(E3:E7)	=СУММ(F3:F7	
10							
11	A	B					

Мал. 26



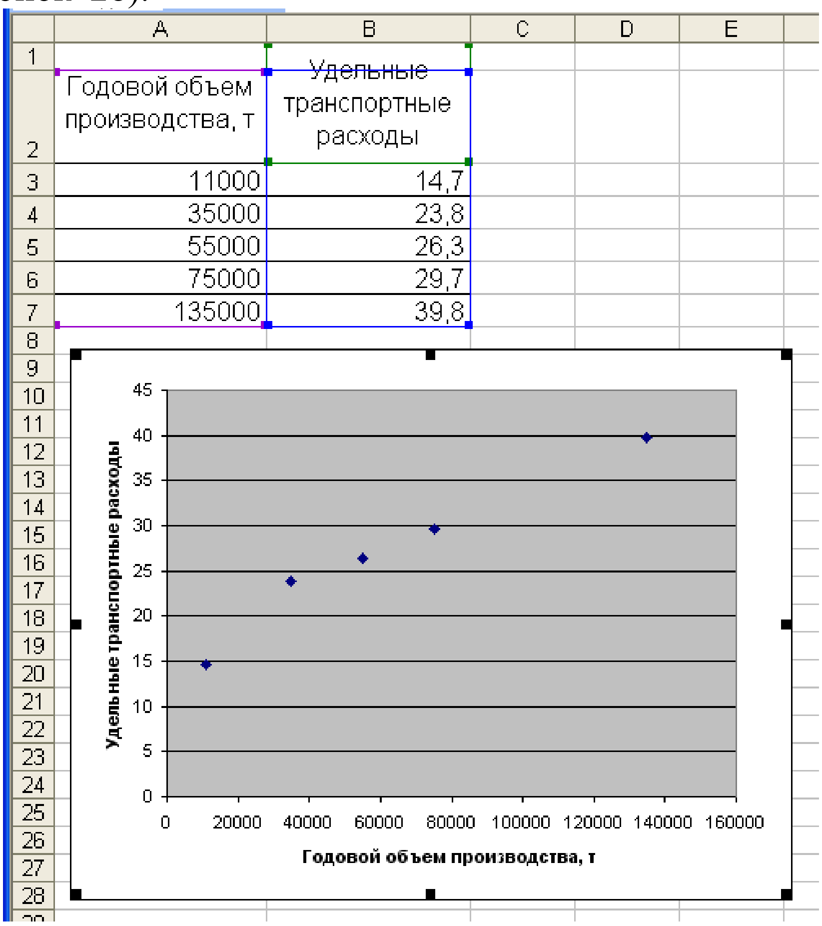
F12 =(E8/(2-1))/(D8/(5-2))

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Годовой объем производства, т	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов)	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов) $y = A + \frac{B}{x}$	(Y-y)^2	(Y-My)^2	(y-my)^2
3	11000	248,1	249,8920289	3,211367672	8484,625873	8157,7024
4	35000	160,5	152,9445616	57,08464871	23,38146407	7,3984
5	55000	139,6	136,7866504	7,914935784	440,720726	330,5124
6	75000	122,4	129,2462919	46,87171233	814,1724998	1251,7444
7	135000	118,3	120,0302981	2,99393139	1425,039996	1558,6704
8	Σ			118,0765959	11187,94056	11306,028
9	My	157,78				
10						
11	A	B				
12	108,5103	1555198,954	Fкритич	10,12796448	Fнабл	284,254652

Мал. 27

Тому що отримані значення $F_{набл} > F_{крит}$, то побудована регресійна модель вважається адекватною і її можна використовувати для прогнозів.

Далі перейдемо до визначення моделі для розрахунку транспортних витрат. Для цього змалюємо графічно залежність транспортних витрат від обсягу виробництва (малюнок 28).

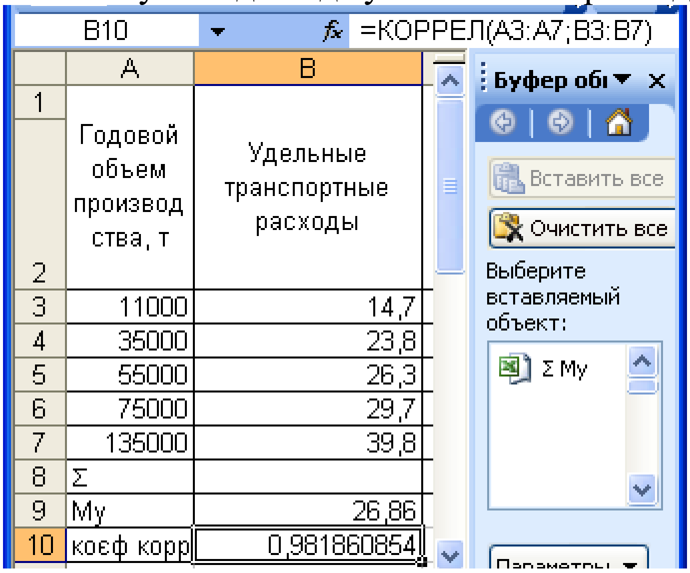


	A	B
2	Годовой объем производства, т	Удельные транспортные расходы
3	11000	14,7
4	35000	23,8
5	55000	26,3
6	75000	29,7
7	135000	39,8

Мал. 28

Визначимо наявність якісного кореляційного зв'язку між двома досліджуваними наборами даних, за допомогою розрахунку **коефіцієнт кореляції**

r. Для цієї мети скористаємося статистичною функцією Excel **КОРРЕЛ** (див. мал. 29). Отримана величина коефіцієнта кореляції дозволяє передбачати наявність сильного прямолінійного зв'язку між досліджуваними наборами даних.



	A	B
1–2	Годовой объем производства, т	Удельные транспортные расходы
3	11000	14,7
4	35000	23,8
5	55000	26,3
6	75000	29,7
7	135000	39,8
8	Σ	
9	My	26,86
10	коеф корр	0,981860854

Мал. 29

Перейдемо до другого етапу кореляційно-регресійного аналізу: представленню зв'язку між двома досліджуваними наборами даних в математичній формі з використанням апроксимуючого вираження (математичною функції - рівняння регресії).

Як видно з побудованого графіка, емпірична лінія регресії по своєму характеру близька до прямої лінії або кривої логарифмічного типа і може бути описана рівняннями:

$$Y = Ax + B \tag{3.5}$$

$$Y = A_1 Ln(x) + B_1 \tag{3.6}$$

Для визначення параметрів представлених рівнянь скористаємося деякими засобами, що надаються пакетом програм MSExcel.

Коефіцієнти парної лінійної регресії (3.5) визначимо за допомогою функцій НАКЛОН і ОТРЕЗОК так, як це показано на малюнку 30. А потім визначимо розрахункові показники питомих транспортних витрат, як це показано на малюнку 31.

B12 | f_x =ОТРЕЗОК(B3:B7;A3:A7)

	A	B	C
1, 2	Годовой объем производства, т	Удельные транспортные расходы	$y = Ax + B$ Удельные транспортные расходы
3	11000	14,7	17,1224945
4	35000	23,8	21,6869502
5	55000	26,3	25,4906633
6	75000	29,7	29,2943763
7	135000	39,8	40,7055155
8	Σ		
9	My	26,86	
10	коєф корр	0,981860854	
11	A	B	
12	0,00019	15,03045242	

A12 | f_x =НАКЛОН(B3:B7;A3:A7)

	A	B	C
1, 2	Годовой объем производства, т	Удельные транспортные расходы	$y = Ax + B$ Удельные транспортные расходы
3	11000	14,7	17,1224945
4	35000	23,8	21,6869502
5	55000	26,3	25,490663
6	75000	29,7	29,2943763
7	135000	39,8	40,705515
8	Σ		
9	My	26,86	
10	коєф корр	0,981860854	
11	A	B	
12	0,00019	15,03045242	

Мал. 30

C3 | f_x =$A$12*A3+$B$12

	A	B	C
1, 2	Годовой объем производства, т	Удельные транспортные расходы	$y = Ax + B$ Удельные транспортные расходы
3	11000	14,7	17,12249459
4	35000	23,8	21,68695025
5	55000	26,3	25,4906633
6	75000	29,7	29,29437635
7	135000	39,8	40,7055155
8	Σ		
9	My	26,86	
10	коєф корр	0,981860854	
11	A	B	
12	0,00019	15,03045242	

Мал. 31

Побудовану модель парної лінійної регресії перевіримо на адекватність по критерію Фішера. $F_{набл}$ можна визначити за результатами обчислень функції ЛИНЕЙН (див. мал. 32) Отже, $F_{набл}$=80,45. $F_{крит}$ можна визначити за допомогою відповідних таблиць або скористатися статистичною функцією Excel **FРАСПОБР.** Вхідними параметрами функції є рівень значущості (вірогідність, наприклад 0,05) і число ступенів свободи 1 і 2. Для моделі парної регресії число мір свободи відповідно дорівнює 1 (одна пояснююча змінна) і n - k - 1 (де до = 1 - число пояснюючих змінних).n - 2 = 5 – 2 = 3. Отже**,** $F_{крит}$=10,13 (див. мал. 33).

E16 | =(E8/(2-1))/(D8/(5-2))

	A	B	C	D	E	F
1–2	Годовой объем производ ства, т	Удельные транспортные расходы	$y = Ax + B$ Удельные транспортные расходы	(Y-y)^2	(Y-My)^2	
3	11000	14,7	17,12249459	5,868480051	94,81901156	
4	35000	23,8	21,68695025	4,464979236	26,76044369	
5	55000	26,3	25,4906633	0,655025891	1,875082992	
6	75000	29,7	29,29437635	0,164530544	5,926188222	
7	135000	39,8	40,7055155	0,819958323	191,6982995	
8	Σ			11,97297404	321,079026	
9	My	26,86				
10	коэф корр	0,981860854				
11	A	B				
12	0,00019	15,03045242				
13						
14						
15						
16		Fкритич	10,12796448	Fнабл	80,45094513	

=СУММ(D3:D7)

=СУММ(E3:E7)

=СРЗНАЧ(B3:B7)

Мал. 32

D12 | =FРАСПОБР(0,05;1;3)

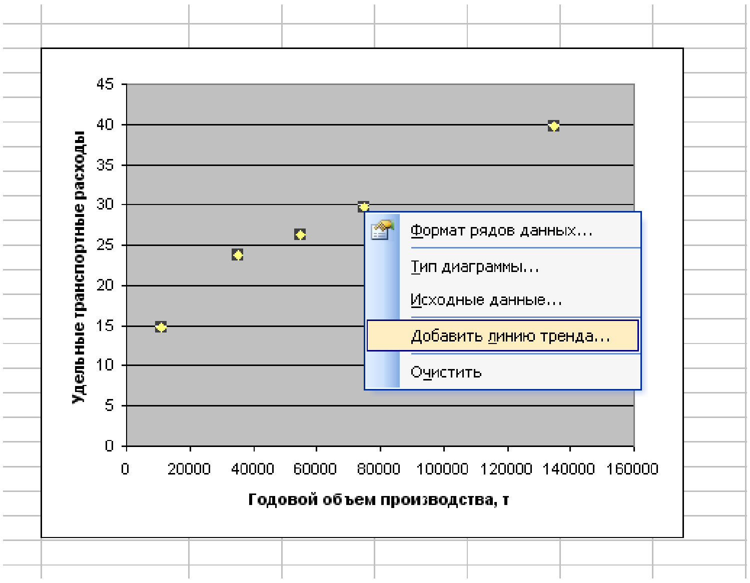
	A	B	C	D
1–2	Годовой объем производ ства, т	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов)	Себестоимость 1т. Продукции (без транспортных расходов) $y = A + \frac{B}{x}$	(Y-y)^2
3	11000	248,1	249,8920289	3,211367672
4	35000	160,5	152,9445616	57,08464871
5	55000	139,6	136,7866504	7,914935784
6	75000	122,4	129,2462919	46,87171233
7	135000	118,3	120,0302981	2,99393139
8	Σ			118,0765959
9	My	157,78		
10				
11	A	B		
12	108,5103	1555198,954	Fкритич	10,12796448

=СУММ(D3:D7)

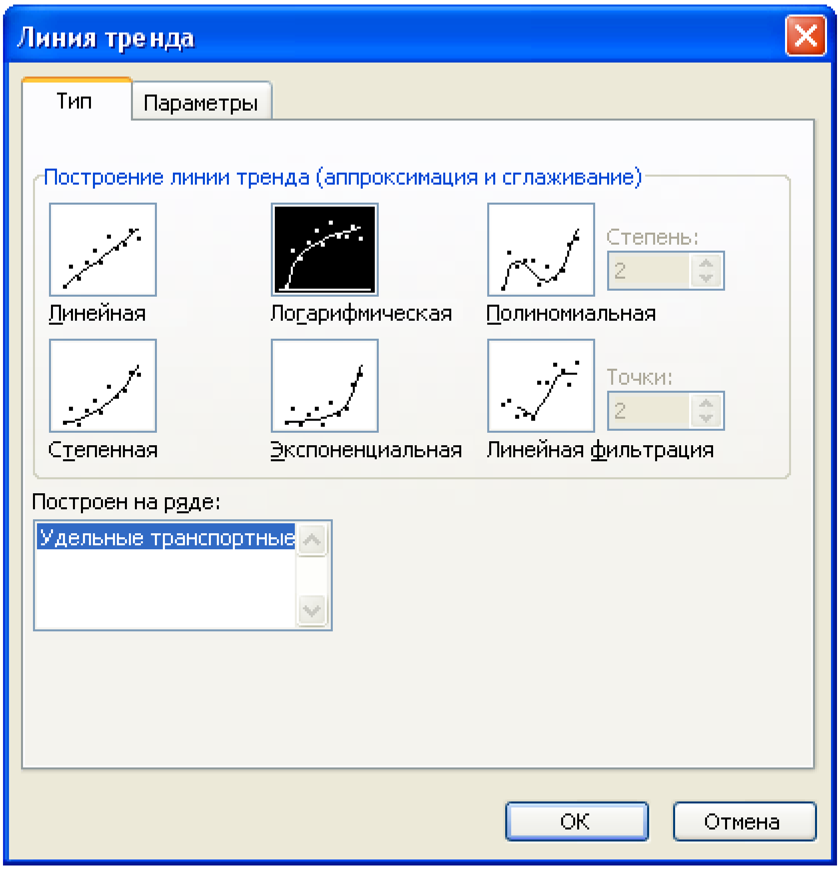
Мал. 33

Оскільки набутих значень $F_{набл} > F_{крит}$, то побудована регресійна модель вважається адекватною і її можна використовувати для прогнозів.

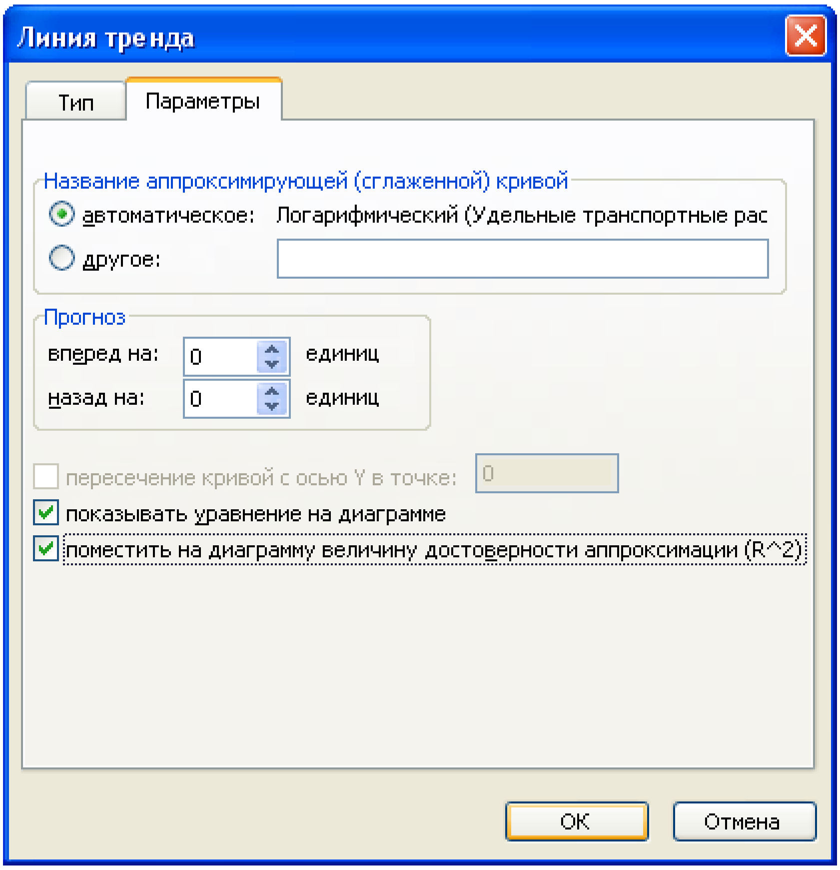
Коефіцієнти парної криволінійної залежності логарифмічного вигляду (3.6) визначимо за допомогою **Лінії тренду.** До побудованого ряду даних додамо лінію тренду (мал. 34 - мал. 37)


Удельные транспортные расходы
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
20000
40000
60000
80000
100000
120000
140000
160000
Годовой объем производства, т
Формат рядов данных...
Тип диаграммы...
Исходные данные...
Добавить линию тренда...
Очистить

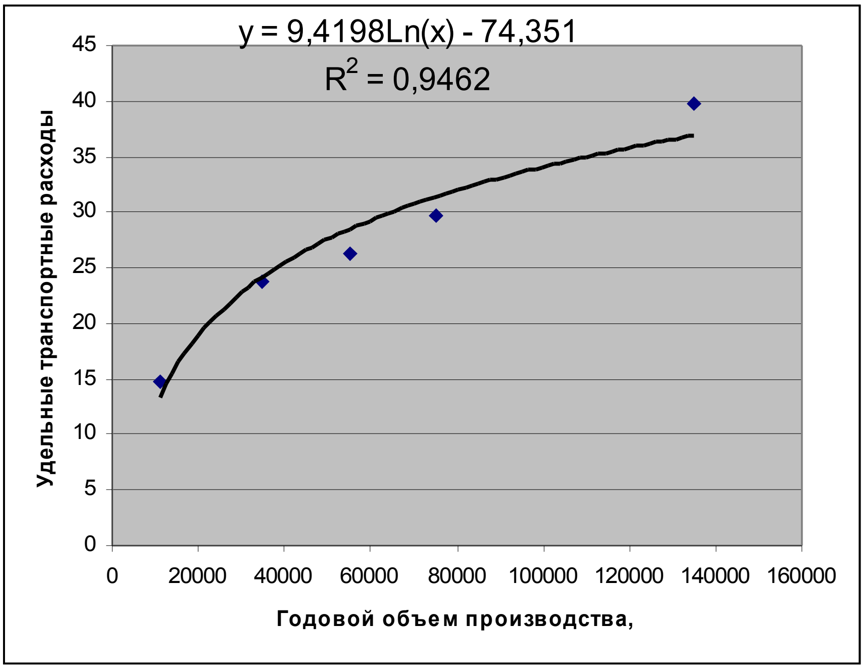
Мал. 34


Линия тренда
Тип
Параметры
Построение линии тренда (аппроксимация и сглаживание)
Линейная
Логарифмическая
Полиномиальная
Степень:
2
Степенная
Экспоненциальная
Линейная фильтрация
Точки:
2
Построен на ряде:
Удельные транспортные
ОК
Отмена

Мал. 35

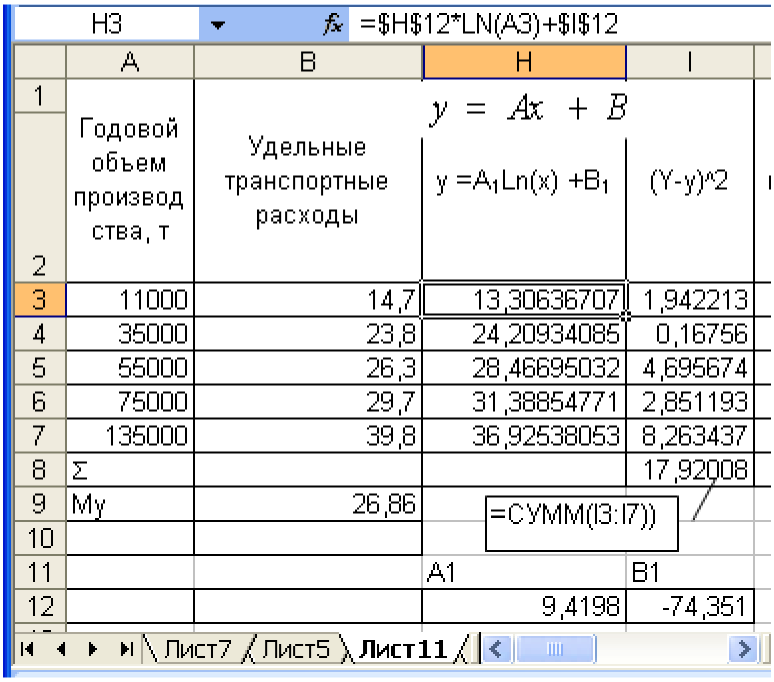


Мал. 36



Мал. 37

А тепер визначимо розрахункові показники питомих транспортних витрат, як це показано на малюнку 38 (значення коефіцієнтів рівняння регресії перепишемо в осередки H12, I12).

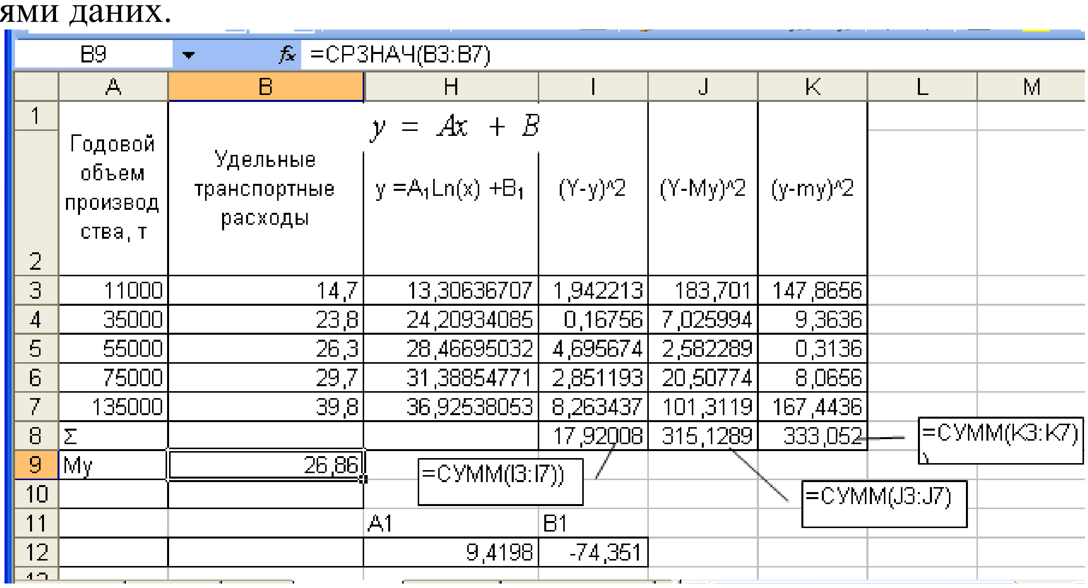


H3 f_x =$H$12*LN(A3)+$I$12

	A	B	H	I
1			y = Ax + B	
2	Годовой объем производства, т	Удельные транспортные расходы	y =A_1Ln(x) +B_1	(Y-y)^2
3	11000	14,7	13,30636707	1,942213
4	35000	23,8	24,20934085	0,16756
5	55000	26,3	28,46695032	4,695674
6	75000	29,7	31,38854771	2,851193
7	135000	39,8	36,92538053	8,263437
8	Σ			17,92008
9	My	26,86	=СУММ(I3:I7))	
10				
11			A1	B1
12			9,4198	-74,351

Мал. 38

Для побудованої моделі парної криволінійної регресії визначимо індекс кореляції. Для цього за допомогою функції СРЗНАЧ визначимо середнє значення питомих транспортних витрат (див. осередок B9 на мал. 39) і суму квадратів різниць між спостережуваними (факторними) значенням собівартості продукції і її середнім значенням (серед спостережуваних значень) як показано на малюнку 40. Тоді індекс кореляції можна обчислити за формулою представленою на малюнку 41. Отримана величина індексу кореляції дозволяє говорити про існування дуже сильного криволінійного зв'язку між двома досліджуваними сукупностями даних.



B9 f_x =СРЗНАЧ(B3:B7)

	A	B	H	I	J	K	L	M
1			y = Ax + B					
2	Годовой объем производства, т	Удельные транспортные расходы	y =A_1Ln(x) +B_1	(Y-y)^2	(Y-My)^2	(y-my)^2		
3	11000	14,7	13,30636707	1,942213	183,701	147,8656		
4	35000	23,8	24,20934085	0,16756	7,025994	9,3636		
5	55000	26,3	28,46695032	4,695674	2,582289	0,3136		
6	75000	29,7	31,38854771	2,851193	20,50774	8,0656		
7	135000	39,8	36,92538053	8,263437	101,3119	167,4436		
8	Σ			17,92008	315,1289	333,052	=СУММ(K3:K7)	
9	My	26,86	=СУММ(I3:I7))					
10						=СУММ(J3:J7)		
11			A1	B1				
12			9,4198	-74,351				

Мал. 39

K3 | f_x =(B3-$B$9)^2

	A	B	H	I	J	K
1			$y = Ax + B$			
2	Годовой объем производства, т	Удельные транспортные расходы	y =A₁Ln(x) +B₁	(Y-y)^2	(Y-My)^2	(y-my)^2
3	11000	14,7	13,30636707	1,942213	183,701	147,8656
4	35000	23,8	24,20934085	0,16756	7,025994	9,3636
5	55000	26,3	28,46695032	4,695674	2,582289	0,3136
6	75000	29,7	31,38854771	2,851193	20,50774	8,0656
7	135000	39,8	36,92538053	8,263437	101,3119	167,4436
8	Σ			17,92008	315,1289	333,052
9	My	26,86			=СУММ(K3:K7)	
10						
11			A1	B1		
12			9,4198	-74,351		

Мал. 40

J14 | f_x =(1-I8/K8)^(1/2)

	A	B	H	I	J	K	L	M
1			$y = Ax + B$					
2	Годовой объем производства, т	Удельные транспортные расходы	y =A₁Ln(x) +B₁	(Y-y)^2	(Y-My)^2	(y-my)^2		
3	11000	14,7	13,30636707	1,942213	183,701	147,8656		
4	35000	23,8	24,20934085	0,16756	7,025994	9,3636		
5	55000	26,3	28,46695032	4,695674	2,582289	0,3136		
6	75000	29,7	31,38854771	2,851193	20,50774	8,0656		
7	135000	39,8	36,92538053	8,263437	101,3119	167,4436		
8	Σ			17,92008	315,1289	333,052	=СУММ(K3:K7)	
9	My	26,86	=СУММ(I3:I7)					
10						=СУММ(J3:J7)		
11			A1	B1				
12			9,4198	-74,351				
13								
14				индек коррел	0,972725			

Мал. 41

Побудовану модель парної криволінійної регресії перевіримо на адекватність по критерію Фішера. $F_{набл}$ можна визначити, як показано на малюнках 42 і 43. Отже, $F_{набл}$=52,76..

Оскільки набутих значень $F_{набл} > F_{крит}$, то побудована регресійна модель вважається адекватною і її можна використовувати для прогнозів.

Отже, обидві моделі, що характеризують залежність транспортних витрат від обсягу виробництва, можна використовувати для прогнозів. Проте лінійна модель дозволяє робити точніші прогнози, оскільки сумарна квадратична помилка, обчислена з використанням цієї моделі менше сумарної квадратичної помилки обчисленою для логарифмічної залежності (див. малюнок 44 осередки D8 і I8).

J3 f_x =(H3-$B$9)^2

	A	B	H	I	J	K
1–2	Годовой объем производ ства, т	Удельные транспортные расходы	$y = Ax + B$ y =A₁Ln(x) +B₁	(Y-y)^2	(Y-My)^2	(y-my)^2
3	11000	14,7	13,30636707	1,942213	183,701	147,8656
4	35000	23,8	24,20934085	0,16756	7,025994	9,3636
5	55000	26,3	28,46695032	4,695674	2,582289	0,3136
6	75000	29,7	31,38854771	2,851193	20,50774	8,0656
7	135000	39,8	36,92538053	8,263437	101,3119	167,4436
8	Σ			17,92008	315,1289	333,052
9	My	26,86				
10						
11			A1	B1		
12			9,4198	-74,351		
13						
14				индек коррел	0,972725	
15						
16				Fнабл	52,75572	

=СУММ(K3:K7)

=СУММ(I3:I7))

=СУММ(J3:J7)

Мал. 42

J16 f_x =(J8/(2-1))/(I8/(5-2))

	A	B	H	I	J	K
1–2	Годовой объем производ ства, т	Удельные транспортные расходы	$y = Ax + B$ y =A₁Ln(x) +B₁	(Y-y)^2	(Y-My)^2	(y-my)^2
3	11000	14,7	13,30636707	1,942213	183,701	147,8656
4	35000	23,8	24,20934085	0,16756	7,025994	9,3636
5	55000	26,3	28,46695032	4,695674	2,582289	0,3136
6	75000	29,7	31,38854771	2,851193	20,50774	8,0656
7	135000	39,8	36,92538053	8,263437	101,3119	167,4436
8	Σ			17,92008	315,1289	333,052
9	My	26,86				
10						
11			A1	B1		
12			9,4198	-74,351		
13						
14				индек коррел	0,972725	
15						
16				Fнабл	52,75572	

=СУММ(K3:K7)

=СУММ(I3:I7))

=СУММ(J3:J7)

Мал. 43

I8 f_x =СУММ(I3:I7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1–2	Годовой объем производ ства, т	Удельные транспортные расходы	$y = Ax + B$ Удельные транспортные расходы	(Y-y)^2	(Y-My)^2			y =A₁Ln(x) +B₁	(Y-y)^2	(Y-My)^2	(y-my)^2
3	11000	14,7	17,12249459	5,868480051	94,81901156			13,30636707	1,942213	183,701	147,8656
4	35000	23,8	21,68695025	4,464979236	26,76044369			24,20934085	0,16756	7,025994	9,3636
5	55000	26,3	25,4906633	0,655025891	1,875082992			28,46695032	4,695674	2,582289	0,3136
6	75000	29,7	29,29437635	0,164530544	5,926188222			31,38854771	2,851193	20,50774	8,0656
7	135000	39,8	40,7055155	0,819958323	191,6982995			36,92538053	8,263437	101,3119	167,4436
8	Σ			11,97297404	321,079026				17,92008	315,1289	333,052
9	My	26,86									
10	коеф корр	0,981860854									
11	A	B						A1	B1		
12	0,00019	15,03045242						9,4198	-74,351		

=СУММ(K3:K7)

=СУММ(D3:D7)

=СУММ(E3:E7)

=СУММ(I3:I7))

=СУММ(J3:J7)

=СРЗНАЧ(B3:B7)

Мал. 44

3.4. Лабораторна робота №4. Регресійне моделювання

Для представлених статистичних даних побудувати регресійні моделі (лінійну і нелінійну). Для цього необхідно:

1. Знайти коефіцієнт кореляції (індекс кореляції)
2. Визначити параметри моделі (коефіцієнти рівняння регресії).
3. Перевірити моделі на адекватність за допомогою критерію Фішера.
4. Визначити, яка з двох моделей краще описує статистичні дані

Для варіантів 1-6 коефіцієнтів для лінійної моделі визначати за допомогою функції ЛИНЕЙН, а коефіцієнти нелінійної моделі визначати за допомогою лінії тренду.

Для варіантів 6-12 коефіцієнтів для лінійної моделі визначати за допомогою функції НАКЛОН і ОТРЕЗОК, а коефіцієнти нелінійної моделі визначати за допомогою засобу Пошук рішення.

Варіант 1

Фондовіддача	1,05	0,96	1,12	1,19	1,08	0,98	1,3	1,16	1,07	1	1,1	1,23	1,13	1,03	0,9
Рівень продуктивності праці, млн.руб.	0,225	0,15	0,26	0,31	0,25	0,17	0,36	0,288	0,25	0,19	0,254	0,315	0,276	0,22	0,12

Варіант 2

Вартість ОПФ (млн.руб.)	3,5	7,5	5,3	2,9	3,2	2,1	4	2,5	3,2	3	5,4	3,2	6,5	5,5	8,2
Молочна продукція (млн. крб.)	6	9,2	11,4	9,3	8,4	5,7	8,2	6,3	8,2	5,6	11	6,5	8,9	11,5	4,2

Варіант 3

Текучість кадрового складу робітників %	33	27	12	11	25	7	24	21	7	19
Рентабельность реалізації продукції	6,3	6,8	10,3	9,8	8,8	10,2	7,3	8,2	11,3	8,9

Варіант 4

Фондовіддача	1,06	1,15	1,07	1,17	0,94	1,02	1,06	1,18	0,99	1,1	1,28	1,09	1,25	1,04	1,12
Рівень продуктивності праці, млн.руб.	0,228	0,284	0,25	0,29	0,14	0,2	0,242	0,296	0,18	0,258	0,34	0,252	0,335	0,22	0,27

Варіант 5

Кооперація виробництва	46	49	68	71	54	64	51	68	79	72
Витрати на виробництво продукції	93,7	93,2	89,7	90,2	91,2	89,8	92,7	91,8	88,7	91,1

Варіант 6

Фондозабеспечення праці робітників, тис.грн/чол.	1,5	1,7	6,4	4,7	4,2	6,9	2,4	2,9	7,3	5,6
Витрати на виробництво продукції	93,7	93,2	89,7	90,2	91,2	89,8	92,7	91,8	88,7	91,1

Варіант 7

Темп приросту промислового виробництва %	4,3	4,6	2	3,1	3	1,4	3,4	2,6	2,6	2,4
Темп приросту внутрішнього національного продукту %	3,5	3,1	2,2	2,7	2,7	1,6	3,1	1,8	2,3	2,3

Варіант 8

Агрегований дохід, що розташовується	170	179	187	189	193	199	200	207	215	216	220	225
Агрегованою вжиток	152	159	162	165	170	172	177	179	184	186	190	191

Варіант 9

Індекс Лернера	0,14	0,33	0,21	0,14	0,22	0,25	0,28
Рентабельності %	15,8	49	26,2	15,7	27,4	30	35

Варіант 10

Ціна товару, грн.	99	82	77	69	52	44	31	29	28	27,5
Попит на товар, шт	100	115	210	270	323	478	544	564	570	574

Варіант 11

Питома вага продовольчих товарів в товарообігу %	74,2	73,5	77	84,3	67,3	70,1	83,1
Рівень рентабельності %	3,62	3,8	2,77	2,12	4,33	4,01	2,01

Варіант 12

Ринкова доля фірми	0,064	0,223	0,273	0,18	0,07	0,05	0,04
Індекс Лернера	0,1	0,2	0,35	0,15	0,11	0,05	0,038

Список літератури:

1. Экономико-математические модели и методы: Учеб. пособие для студ. экон. спец. БГУИР всех форм обуч. / С.А. Поттосина, В.А. Журавлев. – Мн.: БГУИР, 2003. – 94 с.: ил.
2. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели". Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002, 153 с.
3. Расторгуев, Д. Н. Методические рекомендации к практическим занятиям по компьютерному моделированию социально-экономических процессов. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 32 с.
4. Кутузов А. Л. Математические методы в экономике и менеджменте Учеб пособие. СПб.: Изд-во СПб ГТУ, 2001.
5. Конспект лекцій з дисципліни “Економіко-математичне моделювання” (для студентів 3 курсу заочної форми навчання за напрямом підготовки 0501 (6.030509) «Облік і аудит») / Авт. К.А. Мамонов.; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х,: ХНАМГ, 2009. – 86 с.
6. Курицкии Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7 0. СПб.: БХВ — Санкт-Петербург, 1997.
7. Ястремський О.І. Основи теорії економічного ризику: Навч. Посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – К.: "АртЕк", 1997. – 248 с.
8. Петров Е. Г., Новожилова М. В.. Методи і засоби прийняття рішень у соціально – економічних системах: Навч. посібник./ За ред. Е. Г. Петрова. – К.: Техніка, 2004. – 256с.
9. Стариков, А.В. Экономико-математическое и компьютерное моделирование [Текст] : метод. указания к выполнению лабораторных работ для студентов специальности 080502 (060800) – Экономика и управление на предприятии (лесной комплекс) / А.В. Стариков, И.С. Кущева ; Федеральное агентство по образованию, Воронеж. гос. лесотехн. акад. – Воронеж, 2006. – 72 с.