УДК371.3

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ С ПОМОЩЬЮ КЛАССИЧКСКИХ НЕРАВЕНСТВ

***Лебедева И. А., Гуржий Д.***

*Донецкий Национальный технический университет*

*У статті розглядаються питання доведення числових нерівностей за допомогою найбільш відомих класичних нерівностей.*

В процессе решения многих прикладных задач современной математики на том или ином этапе возникает необходимость доказательства некоторых неравенств.

В настоящей работе мы будем рассматривать числовые неравенства, истинность которых требуется доказать на заданном множестве значений переменных. Если такое множество в условиях задачи не указано, будем считать, что переменные будут принимать любые действительные значения.

Заметим, что единого метода доказательства неравенств не существует. При решении большинства подобных задач успешно применяются многие специальные методы: аналитический, синтетический, метод оценки, метод математической индукции, применение классических неравенств и др.

Обратимся к вопросу доказательства числовых неравенств посредством обращения к классическим неравенствам.

Прежде, чем описывать данный метод, рассмотрим некоторые неравенства, которые принято считать классическими.

1. **Неравенство Коши.**

Среднее арифметическое любых n положительных чисел $a_1, a_2$, … , $a_n$ не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad (1)$$

Равенство достигается лишь при условии:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n .$$

2. Среднее гармоническое положительных чисел $a_1, a_2$, … , $a_n$ не больше среднего геометрического этих чисел:

$$\left(a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}\right)^{-1} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \quad (2)$$

3.Среднее арифметическое положительных чисел $a_1, a_2$, … , $a_n$ не больше среднего квадратичного этих чисел:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_n{}^2} \quad (3)$$

4. **Неравенство Коши – Буняковского.**

(Доказано О. Коши в 1821 г.)

Для любых $x_i$ є R, $y_i$ є R (i є N) выполняется неравенство:

$$\left( \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i{}^2 \quad (4)$$

Равенство достигается в том случае, если $y_i = k \cdot x_i$, то есть, когда $x_i$ и $y_i$ пропорциональны.

**5. Неравенство Чебышева.**

(Установлено П. Л. Чебышевым в 1882 г.)

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \le \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}$$

(5),

где $a_n$ и $b_n$ – две неубывающие (или невозрастающие) последовательности положительных чисел. Если одна последовательность убывает, а другая возрастает, то знак неравенства меняется на противоположный.

**6. Неравенство Бернулли.**

Если $h \ge 1$, то для любого n є N имеет место неравенство

$$(1+h)^n \ge 1 + nh \quad (6)$$

**7. Неравенство Гельдера.**

(Установлено О. Гельдером в 1889г.)

Если $x_i$ и $y_i$ (i є N) – положительные действительные числа, а p и q – положительные рациональные числа, причем p + q = 1, то имеет место неравенство:

$$\left(x_1{}^p + x_2{}^p + \ldots + x_n{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(y_1{}^q + y_2{}^q + \ldots + y_n{}^q\right)^{\frac{1}{q}} \ge x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y$$

(7)

**8. Неравенство Минковского.**

(Установлено Г. Минковским в 1896г.)

Если $a_i, b_i, \ldots, l_i$ (i єN) – положительные действительные числа, а $p \ge 1$, то имеет место неравенство: (8)

$$\left(a_1{}^p + a_2{}^p + \ldots + a_n{}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(b_1{}^p + b_2{}^p + \ldots + b_n{}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \ldots + \left(l_1{}^p + l_2{}^p + \ldots + l_n{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq \left[\left(a_1 + b_1 + \ldots + l_1\right)^p + \left(a_2 + b_2 + \ldots + l_2\right)^p + \ldots + \left(a_n + b_n + \ldots + l_n\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

При $p < 1$ знак неравенства меняется на противоположный.

**9. Неравенство Енсена.** Если функция f(x) является выпуклой на промежутке [a, b], то для любых $x_i$, $\lambda_i > 0, (i = 1, n)$ имеет место неравенство:

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}\right) \leq \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}$$

(9)

Равенство достигается лишь в том случае, когда либо $x_1 = x_2 = x_n$, либо f(x) – линейная функция. Если функция f(x) вогнута на промежутке [a, b], то знак неравенства меняется на противоположный.

Умелое применение классических неравенств 1 – 9 (как известных теорем) предоставляет возможность доказательства многих интересных нетривиальных неравенств. Покажем это на примерах.

**Пример 1.**

Доказать неравенство: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2004 < 1002,5^{2004}$

Доказательство.

Данное неравенство равносильно неравенству:

$$\sqrt[2004]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2004} < 1002,5.$$

Воспользуемся неравенством Коши. Тогда

$$\sqrt[2004]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2004} < \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + 2004}{2004} = \frac{(1 + 2004) \cdot 2004 \cdot \frac{1}{2}}{2004} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2005 = 1002,5$$

**Пример 2.**

Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполняется неравенство:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Доказательство.

Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского (4). Пусть $x_i = \sqrt{a_i}$, $y_i = \dfrac{1}{\sqrt{a_i}}, i = \overline{1, n}$; подставим их в неравенство. Имеем:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{a_i}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2$$ , либо

$$(1+1+1+\ldots+1)^2 \le (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

, то есть

$$n^2 \le (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

**Пример 3.** Доказать, что из условия $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ следует, что $a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2} \ge \dfrac{1}{n}$.

Доказательство.

Истинность данного утверждения следует из неравенства Коши – Буняковского (4). Действительно, примем $x_i=1$, $y_i=a_i$ и подставим их в соответствующее неравенство. Имеем:

$$\left(1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \ldots + 1 \cdot a_n\right)^2 \le \left(1 + 1 + \ldots + 1\right) \cdot \left(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2}\right)$$

;

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2 \le n \cdot \left(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2}\right).$$

Поскольку, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, то

$$1 \le n \cdot \left(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2}\right),$$ то есть

$$a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2} \ge \frac{1}{n}.$$

**Пример 4.**

Доказать, что для углов $\alpha, \beta, \gamma$ треугольника выполняется неравенство: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Доказательство.

Воспользуемся неравенством Енсена, взяв $\lambda_i = 1, x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = \gamma$. Тогда для вогнутой на промежутке [a, b] функции f(x) получим:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)\geq\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3},\text{ где } \alpha,\beta,\gamma\in[a,b].$$

Поскольку функция y=sin x на промежутке $[0;\pi]$ вогнута, то

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)\geq\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}$$

, где $\alpha,\beta,\gamma$ – углы треугольника, принадлежащие промежутку $[0;\pi]$. Отсюда следует:

$$\sin\frac{\pi}{3}\geq\frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma);$$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}\geq\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$. Неравенство доказано.

*Литература*.

1. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1967. – 304с.
2. Копцюх М.Г., Савич Е.Ф. Доведення нерівностей. – К.: Радянська , 1982. – 160с.
3. Обласні математичні олімпіади/ Конет І.М., Паньков В.Г., Теплінський Ю.В., Радченко В.М. – Кам’янець-Подільский: Абетка. – 2000.- 304с.