ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Криводубский О.А.
Донецкий национальный университет
E-mail: info@iai.donetsk.ua

Abstract. ***Krivodubskiy O. Representation of control systems in function spaces.*** *In the given activity for threeorts of space Feldbaum the representation by the way of sets is given, members which one are the characteristics of object of control, information on them and requirement to object of control. The members are esteemed as multidimensional vector functions. Let's conduct systems analysis of figures derivated on planes. For the purposes of a quantification for considered sets are entered the metrics and norm conversing them to the spaces Banah. Such approach allows to determine a management efficiency estimated on change of a volume of a three-dimensional figure, describing a system. The article is intended for the specialists executing scientific and practical control engineerings. Keywords: a unit, metrics, norm, set, characteristic, model, information, requirement.*

Современные тенденции, рассматривающие системы управления (СУ) как многоуровневые структуры, реализованные на разветвленной вычислительной сети, требуют новых подходов к их формальному представлению. Целью данной работы является методология создания представления СУ, инвариантной относительно уровней управления, специфики основных методологических положений и математического аппарата, на основании которых разрабатываются эти системы. В основе предлагаемого представления систем управления положено, введенное в [1], трехортовое пространство Фельдбаума: характеристики объекта управления — информация об объекте управления — требования к объекту управления (ХИТ). Согласно аксиоматике этого представления, любая СУ может быть представлена в этом пространстве некоторой геометрической фигурой — от прямоугольного параллелепипеда до эллипсоида, где каждая точка их объема есть вектор-функция характеристик, свойств и состояний.

Следует отметить, что введенное таким образом пространство E линейно, т.к.

$$\forall x \in E,\ y \in E \Rightarrow x + y \in E; \qquad x \in E,\ \lambda \in R \Rightarrow \lambda x \in E.$$

Согласно утверждению о линейности пространства выполняются аксиомы:

$$x + y = y + x;$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

$$\exists 0 \in E \quad x + 0 = x;$$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \ \lambda \in R, \ \mu \in R;$$

$$1 \cdot x = x, \ 0 \cdot x = 0;$$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$$

Для формального представления элементов этого пространства рассмотрим составляющие вектор-функций по каждому орту.

Направление «характеристики объекта управления» подразумевает, что точками и отрезками этого координатного направления являются математические модели.

Классифицируя модели по временному признаку на статические и динамические [4], можно формировать их в виде соответствующих множеств:

$$M' = \{m_i'\}, \ \forall i, m_i : \left\{ \frac{d\overline{y}}{dt} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{u}, \overline{\beta}, t) \right\} \tag{1}$$

(1) — динамическая модель, (2) — статистическая модель

$\vec{y}$ — вектор выходных переменных,

$\overline{x}$ — вектор входных переменных,

$\overline{u}$ — вектор управляющих переменных,

$\overline{\beta}$ — вектор параметров модели.

$$M^2 = \{m_i^2\}, \ m_i : \left\{ \overline{y} = \beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} x_j x_k \right\} \tag{2}$$

Уравнение модели в частных производных в данной работе не рассматриваются, т.к. их применение в алгоритмах систем управления, функционирующих в ритме с процессом, ограничено из-за сложностей вычислительного характера при реализации численных процедур.

В зависимости от степени изученности явлений и процессов, происходящих в объекте управления, изменяется как число уравнений, так и их порядок, что характеризует размеры отрезков, определяющих характеристики класса объектов, для которых синтезированы модели (1) и (2), как параметрическая структура.

Рассматривая свойства системы по орту «информация об объекте» можно выделить два класса измерений переменных: дискретные и непрерывные (аналоговые). Непрерывные измерения характеризуются множествами (3)

$$N' = \{n_i'\},\ n_i = \{\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t)\} \tag{3}$$

Дискретные измерения формализованы в виде (4):

$$N^2 = \{n_i^2\},\ n_i = \{\bar{x}(k), \bar{y}(k), \bar{u}(k)\} \tag{4}$$

В зависимости от возможностей измерительных подсистем вектор- функции этих множеств могут иметь различную размерность, т.е. по этому координатному направлению отображаться отрезками различной длины. Если рассматривать геометрическую фигуру, представляющую систему управления [3] на плоскости ХИ — «характеристики объекта управления — информация об объекте управления», то площадь и геометрия этой фигуры будут изменяться как от степени изученности явлений, происходящих на объекте управления, так и от возможностей измерения, т.е.

$$S_{XИ} = S_{XИ}(M', M^2, N', N^2) \tag{5}$$

Каждая точка этой фигуры $s_i \in S_{XИ}$ есть вектор-функция, отражающая зависимость (5). Подстановка и реализация задачи параметрической идентификации моделей M' и M^2 [5], которая осуществляется согласно измерениям $N = N' \cup N^2$, позволяет определить параметры моделей β, что, в свою очередь, приводит к уменьшению площади фигуры $S_{XИ}$ и изменению ее геометрии. В этом случае модель характеризует конкретный объект из класса объектов данной природы.

Координатное направление «требования к объекту управления» предназначено для отображения показателей (зачастую экономических) управляемого процесса, т.е. критериев оптимальности, представленных в виде функционалов (6) и (7)

$$T' = T'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, t) \tag{6}$$

$$T^2 = T^2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \tag{7}$$

Рассматривая плоскость ТИ — «требование к объекту управления — информация о нем», можно выделить плоскую фигуру:

$$S_{ТИ} = S_{ТИ}(T', T^2, N', N^2) \tag{8}$$

Т.к. на этой плоскости целесообразно рассматривать как функционалы цели, так и ограничения физического или экономического характера, то в зависимости от выбора функционалов и ограничений будет меняться как площадь, ограниченная фигурой (8), так и ее геометрия.

Аналогичное рассуждение относительно плоскости XT — «характеристики объекта управления — требования к объекту» позволяет выделить плоскую фигуру (9).

$$S_{XT} = S_{XT}(M', M^2, T', T^2) \qquad (9)$$

Площадь и геометрия этой фигуры могут изменяться в зависимости от числа и вида функционалов цели, размерности моделей, которые могут представлять структуру динамических и статических ограничений на управляемый процесс.

Объединяя приведенные выше соображения, можно сделать вывод, что система управления представима в линейном пространстве ХИТ в виде некоторой трехмерной фигуры, координаты каждой точки которой являются соответствующими вектор-функциями, а объем и геометрия этого тела меняются в зависимости от переменных характеристик.

Такое представление не дает возможности количественно оценить уровень накопления информации в процессе дуального управления [1] или адаптивных процедур. Количественная оценка объемов фигуры ХИТ в зависимости от этих требований возможна в случае преобразования множеств (1)–(9) в нормированные или ортогональные пространства.

Рассмотрим преобразования составляющих трехортового пространства Фельдбаума.

Множество $M' = \{m_i'\}$, представленное динамическими детерминированными моделями, это множество непрерывных и, по определению, дифференцируемых функций [2].

Для метрики (10)

$$\rho(m_i, m_j) = |m_i(t) - m_j(t)| \qquad (10)$$

множество M' преобразуется в метрическое пространство непрерывных функций $M' = C$.

Введя норму, $\|m_i\| = \max_i |m_i(t)|$ получим представление динамических детерминированных моделей, как линейного нормированного пространства Банаха, т.е. $M'(\|m_i\|) = B$.

Применение динамических математических моделей M' для задач управления, как инструмента прогноза состояний объекта в последующие моменты времени предполагает наличие в контуре управления процедур интегрирования уравнения модели. При этом можно полагать, что уравнения (1) интегрируемые. Вводя метрику (11)

$$\rho(m_i, m_j) = \left(\int \left| m_i(t) - m_j(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{11}$$

модель представляется метрическим пространством: $M' = L_p$. Нормирование этого пространства по норме (12)

$$\|m_i\| = \left(\int \left| m_i(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{12}$$

преобразует его в Банахово линейное нормированное пространство $M' = B$.

Т.к. современные алгоритмы систем управления предполагают программную реализацию на цифровых вычислительных машинах, то численные решения моделей носят дискретный характер и могут быть представлены метрическим пространством с метрикой (13):

$$\rho(m_i, m_j) = \left(\sum_{i=1}^{N} \left| m_i^* - m_j^* \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{13}$$

m_i^*, m_j^* — числовые реализации моделей.

При этих условиях $M' = l_p$ — пространство числовых последовательностей.

Вводя норму (14), преобразуем это пространство в линейное нормированное пространство Банаха: $M' = B'$

$$\|m_i\| = \left(\sum_{i=1}^{N} \left| m_i^* \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{14}$$

Аналогичные заключения относительно статических моделей M^2 позволяют отнести множество этих моделей к пространству ограниченных вещественных функций $M^2 = M$, обладающих метрикой (15)

$$\rho(m_i, m_j) = \sup \left| m_i - m_j \right|, \tag{15}$$

Введенная норма (16) позволяет представить множество этих моделей в виде Банахова пространства $M^2 = B$

$$\|m_i\| = \sup \left| m_i^* \right| \tag{16}$$

Рассматривая условие измеримости переменных по координатному направлению «информация об объекте управления» можно сделать вывод, что отрезки на этой оси, как вектор-функции, представленные множеством аналоговых измерений N, также представляют собой метрические и нормированные пространства, полученные введением метрики (17) и нормы (18), которые представляют класс ограниченных измеримых функций $N' = \widetilde{M}$.

$$\rho(n'_i, n'_j) = vrai\max\left|n_i(t) - n_j(t)\right| \quad (17) \qquad \|n_i\| = vrai\max\left|n_i(t)\right| \quad (18)$$

Подобным образом множество дискретных измерений N^2 может быть представлено, как пространство ограниченных числовых последовательностей $N^2 = m$. С введением метрики (19) и нормы (20) оно представимо в виде Банахова пространства $N^2 = B$

$$\rho(n_i^2, n_j^2) = \sup_i\left|n_i^{2*} - n_j^{2*}\right| \quad (19) \qquad \|n_i^*\| = \sup_i\left|n_i^{2*}\right| \quad (20)$$

Аналогичным образом можно представить в виде пространств множества точек, ограниченных фигурой ХИ на координатной плоскости.

Несколько сложнее вопрос метризации и нормирования точек координатного направления «требования к объекту управления», поскольку разнообразия постановок задач управления и, соответственно, формализация функционалов целей допускает как непрерывные, так и дискретные решения. При этом, как правило, на задачу поиска экстремума накладывается условие существования и единственности, необходимые и достаточные условия существования экстремума. Эти условия определяются по первой производной (равенства нулю) и по второй производной (положительная определенность).

Рассматривая множество функционалов $T = \{T_i\}$, где

$$T_i = \int_0^\tau \left(y(t) - y^*(t)\right)^2 dt \quad (21)$$

можно представить их в виде пространства интегрируемых функций, т.е. $T = L_p$.

Для этого пространства вводится метрика (22) и норма (23), в силу чего получим $T = B$.

$$\rho\left(T_i, T_j\right) = \left(\int_0^1 \left|T_i - T_j\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (22) \qquad \|T\| = \left(\int_0^1 |\tau|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (23)$$

В то же время необходимые условия существования экстремума, используемые в численных процедурах поиска управления, могут рассматривать эти множества в виде пространства непрерывных функций $T' = C$. Принимая в качестве метрики (24), а в качестве нормы (25), можно рассматривать это множество в виде $T' = B$.

$$\rho\left(T_i', T_j'\right) = \max_u \left|T_i'(\overline{u}) - T_j'(\overline{u})\right| \qquad (24) \qquad\qquad \left\|T_i'\right\| = \max_u \left|T_i'\right| \qquad (25)$$

Совокупность приведенных рассуждений о преобразованиях множеств линейного пространства ХИТ в линейные нормированные и метрические пространства отражают возможности представления трехмерной фигуры, характеризующей систему управления в виде такого же пространства, каждая точка которого есть вектор-функция. Процедуры нормирования позволяют оценить объем, занимаемый этой фигурой и критериально оценивать уменьшение (увеличение) этого объема при адаптивном пополнении сведений об объекте управления или при появлении неконтролируемых возмущений. Такой подход позволяет оценивать эффективность управления в том числе и экономическую.

Выводы.

1. Предложенная методология пригодна для специалистов, ведущих работы по созданию систем управления и, в первую очередь, адаптивных, многоуровневых систем.

2. Перспективы дальнейшего развития методологии — формализация сходимости процедур управления, представленных в функциональных пространствах, и формальная оценка эффективности.

Литература

1. А.А. Фельдбаум. Основы теории оптимальных автоматических систем. — М.: Наука, 1966. — 624 с.
2. Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965. — 520 с.
3. П.Джексон. Введение в экспертные системы. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2001. — 622 с.
4. В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высшая школа, 2003. — 615 с.
5. Д. Г. Мэтьюз, К. Д. Финк. Численные методы. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2001. — 713 с.

Сдано в редакцию: .03.2003г.

Рекомендовано к печати: д.ф.м., проф. Калоеров С.А.