УДК 004.9

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ. ВОЗМОЖНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ

Шавкун Г.В., *студент электротехнического факультета*
Кучер Т.В., *ассистент каф. ВМиП*
Донецкий национальный технический университет
tatyana-vik@mail.ru

Интерполирование в вычислительной математике – это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений. В работе рассмотрены возможности некоторых математических пакетов по интерполяции функции.

Interpolation in calculable mathematics is a method of being of intermediate values of size on the present discrete set of the known values. Possibilities of some mathematical packages are in-process considered on interpolation of function.

Інтерполяція в обчислювальній математиці - це спосіб знаходження проміжних значень величини по наявному дискретному набору відомих значень. У роботі розглянуті можливості деяких математичних пакетів по інтерполяції функції.

Интерполирование – один из важнейших способов приближенного вычисления. Задача интерполирования заключается в том, чтобы по данным величинам некоторой функции для известных значений переменных независимых (аргументов) необходимо найти величину функции для произвольного (обыкновенно промежуточного) значения этих переменных независимых.

Наиболее часто используемые методы интерполяции:

- *Линейная интерполяция* – интерполяция алгебраическим двучленом $P_1(x)=ax + b$, является простейшим методом. В этом случае график функции $f(x)$ заменяется прямой, проходящей через точки $(x_i,f(x_i))$ *и* $(x_{i+1},f(x_{i+1}))$. Исходя из уравнения прямой, проходящей через две точки формула линейной интерполяции имеет вид $f(x) = P_1(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\left(x_{i+1} - x_i\right)$. Если заданы значения в нескольких точках, функция заменяется кусочно-линейной функцией.
- *Интерполяция кубическими сплайнами*. Интервал интерполяции разбивается на небольшие отрезки, на каждом из которых функция задается полиномом третьей степени. Коэффициенты полинома

подбираются таким образом, чтобы выполнялись определенные условия. Общие для всех типов сплайнов третьего порядка требования - непрерывность функции, ёё первой и второй производных и прохождение через предписанные ей точки. Кубический сплайн задается значениями функции в узлах и значениями производных на границе отрезка интерполяции (либо первых, либо вторых производных). Формула кубического сплайна на каждом из частичных отрезков [x_i, x_{i+1}] имеет вид: $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$, где a_i, b_i, c_i, d_i – неизвестные.

- *Канонический полином* степени *n* имеет вид $F(x) = P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$.
- *Полином Лагранжа* может применяться к таким узлам интерполяции, когда расстояние между соседними узлами непостоянная величина. Формула полинома имеет вид $F(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(t)$, где $L_i(t)$ - функция, удовлетворяющая в узлах x_k условию $L(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{t - x_i}{x_i - x_j}$.
- *Полином Ньютона* применяется главным образом, когда разность x_{i+1}-x_i=h постоянна для всех значений *x=0..n-1*. Формула имеет вид $F(t) = A_0 + A_1(t - x_0) + A_2(t - x_0)(t - x_1) + ... + A_n(t - x_0)(t - x_1)... + (t - x_n)$.

MathCAD предоставляет возможность находить промежуточные значения методами линейной, квадратичной и кубической сплайн-интерполяций (рис. 1). Для расчета коэффициентов предназначены функции [1]:

- *a=lspline(x, y))* для линейной сплайн-интерполяции;
- *a=pspline(x,y)* для квадратичной сплайн-интерполяции;
- *a=cspline(x,y)* для кубической сплайн-интерполяции,

где *x* – вектор абсцисс; *y* – вектор ординат.

Расчет интерполяционного полинома в точке выполняется при помощи функции *interp(a,x,y,x1),*где *x* – вектор абсцисс; *y* – вектор ординат; *x1* - значение *x*, при котором необходимо найти значение *y*; *a* – массив коэффициентов.

$U := (132\ \ 140\ \ 150\ \ 162\ \ 170\ \ 180\ \ 190\ \ 200\ \ 211\ \ 220\ \ 232\ \ 240\ \ 250)^T$

$P := (315\ \ 344\ \ 375\ \ 418\ \ 436\ \ 473\ \ 563\ \ 602\ \ 660\ \ 713\ \ 918\ \ 1020\ \ 1350)^T$

P0 =175   U1 =465.35

a1 := cspline(U,P)   a2 := pspline(U,P)   a3 := lspline(U,P)

b1 := interp(a1,U,P,175)   b2 := interp(a2,U,P,175)   b3 := interp(a3,U,P,175)

b1 = 447.702   b2 = 447.698   b3 = 447.695

Рис. 1.

В MathCad можно выполнить интерполирование с помощью полиномов Лагранжа и Ньютона, но для этого нужно самостоятельно написать формулы для расчетов. Пример интерполирования с помощью полинома Лагранжа приведен на рис.2.

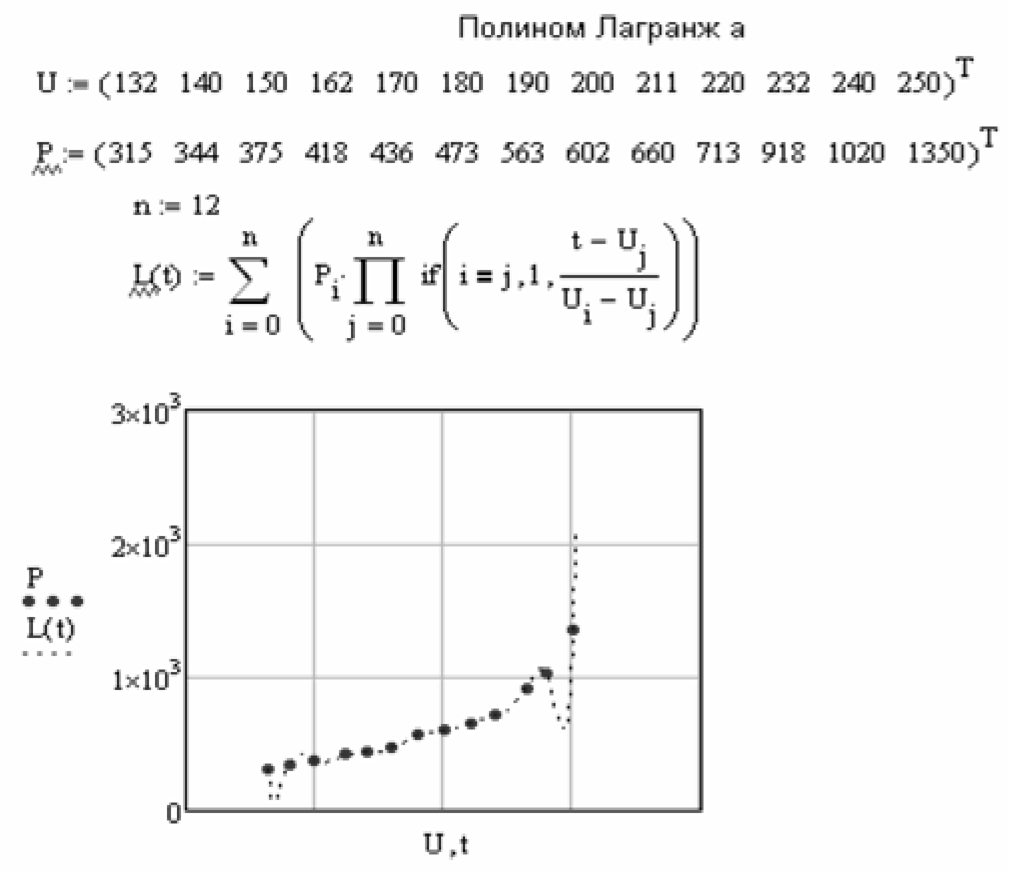

Рис. 2.

В свободном математическом пакете **Scilab** [3] для нахождения промежуточных значений величины используются линейная и кубическая сплайн-интерполяция.

- Линейная сплайн-интерполяция: для ее построения в Scilab служит функция *y=interpln(z,x),* где *y* – вектор значения линейного сплайна в точке *x*; *z* – матрица хранящая исходные данные; *x* – вектор абсцисс.
- Кубическая сплайн-интерполяция – построение интерполяционной функции этим методом в Scilab осуществляется в два этапа: 1) вычисление коэффициентов сплайна с использованием функции *d=spline(x,y),* где *x* – строго возрастающий вектор, имеющий как минимум два компонента; *y* – вектор с таким же параметром, что и *x*; *d* – результат работы функции, вектор, хранящий коэффициенты кубического сплайна; 2) расчет интерполяционного полинома в точке функцией *y=interp(t,x,y,d)*, где *x, y, d* – имеют те же значения; *t* – вектор абсцисс; *y* – вектор ординат, являющийся конечным значением кубического сплайна.

На рис. 3 показано решение задачи интерполяции функции с помощью линейного и кубического сплайнов. На рис. 4 показан график линейного интерполирования.

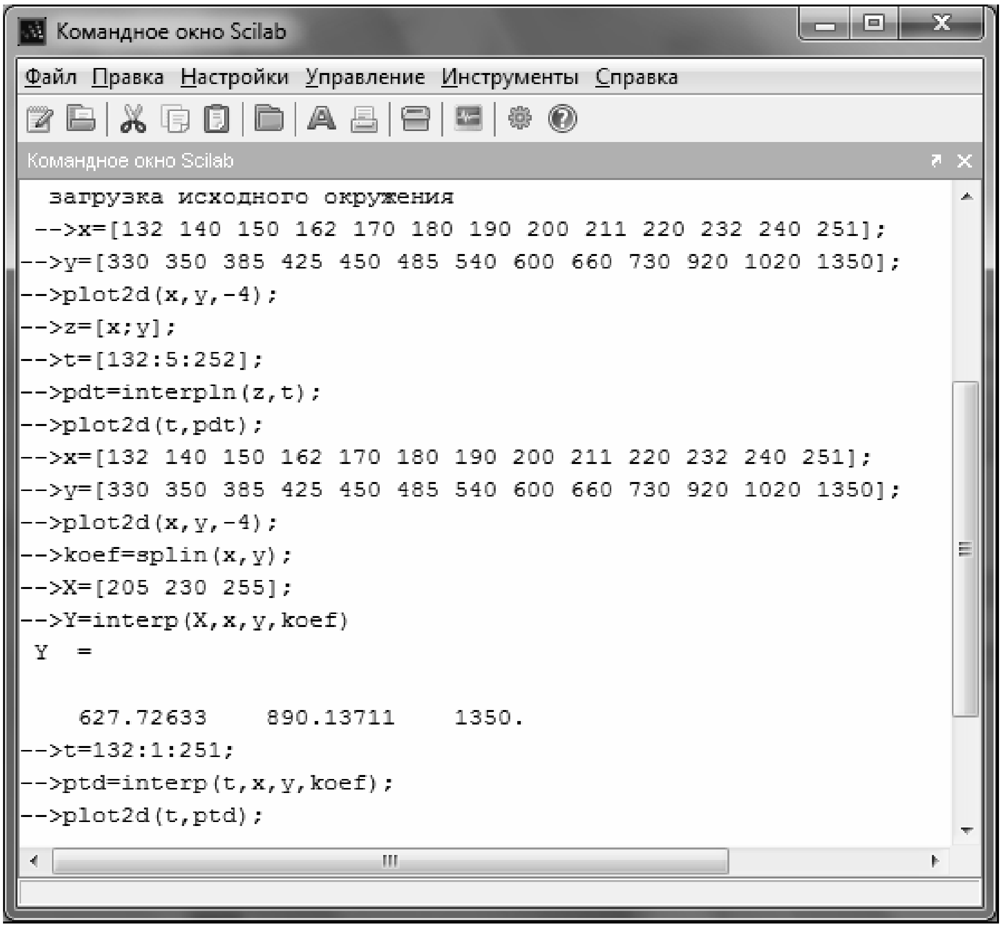

Рис. 3.

В проприетарном пакете *Maple* [1] также имеется несколько команд, реализующих обычную и сплайн-интерполяцию. В результате выполнения команд формируется выражение, которое затем можно преобразовать в процедуру. Для построения интерполяционного многочлена относительно переменной *var* по таблице, заданной векторами *X, Y* используется команда *interp (X, Y, var)*. Массивы, задающие узлы интерполяции, могут быть не упорядочены, но массив *X* не должен содержать одинаковых элементов. Векторы *X* и *Y* содержат *n+1* координат точек зависимости, где *n* – степень интерполяционного полинома.

Построения сплайна с переменной *var* по таблице, заданной векторами *X, Y* производится при помощи команды *spline (X, Y, var, d)*. Здесь параметр *d* определяет порядок сплайна, который может быть линейным (*linear*), квадратичным (*quadratic*), кубическим (*cubic*) и четвертой степени (*quartic*). Кубический сплайн строится по умолчанию. Результатом выполнения команды будет пример построения сплайна в виде кусочно-гладкой функции.

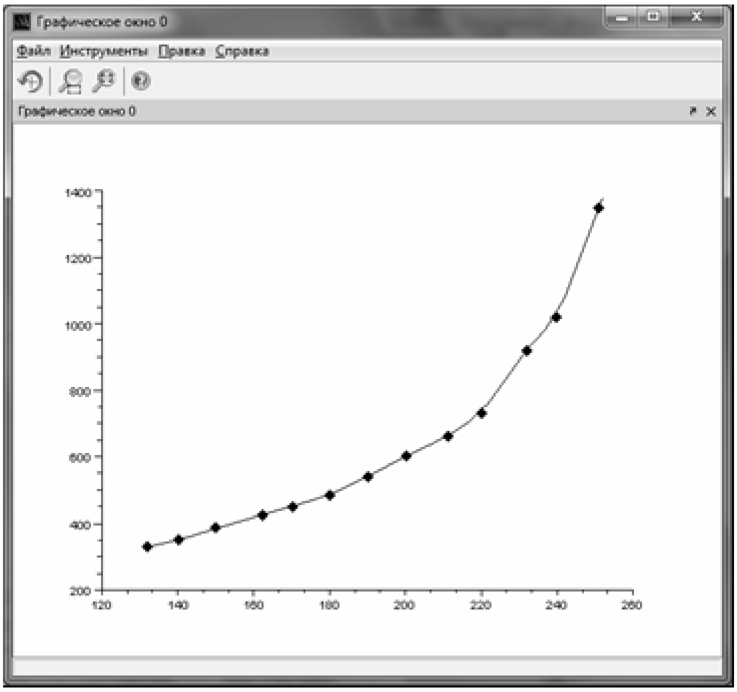

Рис. 4.

Ниже приведен листинг построения сплайнов четырех видов.

>readlib(spline): X:='X': Y:='Y':

>X:=[0,1,2,3,4,6]: Y:=[1,3,4,6,3,1]:

>f1:=spline(X,Y,linear): f2:=spline(X,Y, quadratic):

>f3:=spline(X,Y, cubic): f4:=spline(X,Y, quartic):

Для выполнения интерполяции функций, заданных таблично, в составе свободного математического пакета *MAXIMA* [2] предусмотрен пакет расширения *interpol*, позволяющий выполнять линейную или полиномиальную интерполяцию. Пакет включает служебную функцию *charfun2 (x, a, b*), которая возвращает *true*, если число x принадлежит интервалу [a, b), и *false* в противном случае.

Линейная интерполяция выполняется функцией *linearinterpol (points, option)).* Аргумент *points* должен быть представлен в одной из следующих форм:

- матрица с двумя столбцами, например p:matrix([2,4],[5,6],[9,3]), при этом первое значение пары или первый столбец матрицы - это значения независимой переменной,
- список пар значений, например p: [[2,4],[5,6],[9,3]],
- список чисел, которые рассматриваются как ординаты интерполируемой функции, например p: [4,6,3], в этом случае абсциссы назначаются автоматически (принимают значения 1, 2, 3 и т.д.).

В качестве опции *option* (необязательный параметр) указывается имя независимой переменной, относительно которой строится интерполяционная функция.

Интерполяция полиномами Лагранжа выполняется при помощи функции *lagrange(points, option)).* Смысл параметров *points* и *options* аналогичен указанному выше. Пример использования интерполяции полиномами Лагранжа:

```
(%i1) load("interpol")
(%i2) p:[[7,2],[8,2],[1,5],[3,2],[6,7]]
(%i3) lagrange(p);
```

Также в MAXIMA можно выполнить интерполяцию кубическими сплайнами, для этого применяется функция *cspline (points, option))*.

Интерполирование в Excel является трудоемким процессом. Встроенных функций Ms Excel не имеет. Для решения задачи нужно составлять таблицы и вручную вводить соответствующие формулы. Например, на рисунках 5 и 6 показан расчет в промежуточной точке с применением полинома Лагранжа. Вначале вычисляются соответствующие разности переменной *x*. В столбце **J** вычисляется произведение по строкам, затем соответствующее значение переменной *y* необходимо разделить на значение найденного произведения – столбец **К**. Значение в промежуточной точке найдено в ячейке **I10**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x=	0,355									
2			Разности								
3	i	xi	x-x0	x0-x1	x0-x2	x0-x3	x0-x4	x0-x5	yi	Di	yi/Di
4	0	0,03	=$B$1-$B4	=B4-$B$5	=B4-$B$6	=B4-$B$7	=B4-$B$8	=B4-$B$9	0,12	=ПРОИЗВЕД(C4:H4)	=I4/J4
5	1	0,09	=B5-$B$4	=$B$1-$B5	=B5-$B$6	=B5-$B$7	=B5-$B$8	=B5-$B$9	0,15	=ПРОИЗВЕД(C5:H5)	=I5/J5
6	2	0,16	=B6-$B$4	=B6-$B$5	=$B$1-$B6	=B6-$B$7	=B6-$B$8	=B6-$B$9	0,26	=ПРОИЗВЕД(C6:H6)	=I6/J6
7	3	0,23	=B7-$B$4	=B7-$B$5	=B7-$B$6	=$B$1-$B7	=B7-$B$8	=B7-$B$9	0,29	=ПРОИЗВЕД(C7:H7)	=I7/J7
8	4	0,35	=B8-$B$4	=B8-$B$5	=B8-$B$6	=B8-$B$7	=$B$1-$B8	=B8-$B$9	0,33	=ПРОИЗВЕД(C8:H8)	=I8/J8
9	5	0,48	=B9-$B$4	=B9-$B$5	=B9-$B$6	=B9-$B$7	=B9-B8	=$B$1-$B9	0,48	=ПРОИЗВЕД(C9:H9)	=I9/J9
10									=C4*D5*E6*F7*G8*H9		=СУММ(K4:K9)
11								yy=	=I10*K10		

Рис. 5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x=	0,355									
2			Разности								
3	i	xi	x-x0	x0-x1	x0-x2	x0-x3	x0-x4	x0-x5	yi	Di	yi/Di
4	0	0,03	0,325	-0,06	-0,13	-0,2	-0,32	-0,45	0,12	-0,000073008	-1643,66
5	1	0,09	0,06	0,265	-0,07	-0,14	-0,26	-0,39	0,15	1,58001E-05	9493,582
6	2	0,16	0,13	0,07	0,195	-0,07	-0,19	-0,32	0,26	-7,55227E-06	-34426,7
7	3	0,23	0,2	0,14	0,07	0,125	-0,12	-0,25	0,29	0,00000735	39455,78
8	4	0,35	0,32	0,26	0,19	0,12	0,005	-0,13	0,33	-1,23302E-06	-267635
9	5	0,48	0,45	0,39	0,32	0,25	0,13	-0,125	0,48	-0,00022815	-2103,88
10									-1,31206E-06		-256860
11								yy=	0,337015334		
12											
13											

Рис. 6.

Литература:

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах MathCad 12, MATLAB 7, Maple 9. – М. : НТ Пресс, 2006. – 496 с.

2. Е.А. Чичкарёв. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов. URL: http://www.altlinux.org/Books:Maxima (Дата обращения 2.08.2010).

3. Е.Р. Алексеев, О.В.Чеснокова, Е.А. Рудченко. Scilab: Решение инженерных и математических задач. – М.: Бином, 2008. – 260с.