УДК 517.9

А.Н.Гончаров
Донецкий национальный технический университет

О возникновении хаотического поведения у некоторых дискретных математических моделей

Розглянута математична дискретна модель технологічного процесу реакторного типу, для якої показано, що при деяких значеннях параметрів динаміка моделі може мати хаотичну поведінку.

Исследование ряда технологических процессов приводит к необходимости создания их математических моделей, анализируя которые исследователь может качественно объяснить происходящий процесс и прогнозировать поведение процесса. Существующие математические пакеты прикладных программ позволяют достаточно быстро решать подобные задачи. Однако, сравнительная легкость такого исследования оставляет открытым вопрос о корректности постановки задачи, выборе метода ее решения, а, значит, и о точности полученных результатов.

В данной работе рассмотрен один тип достаточно простых математических дискретных моделей, исследование которых приводит к довольно интересным результатам.

Математическая модель технологического процесса реакторного типа, довольно часто описывается простым уравнением

$$x_{n+1} = f(x_n)x_n,$$

где на функцию роста $f(x)$ наложены естественные ограничения $f(x) \le M$ и $f(\infty) = 0$.

Две наиболее простые функции роста, удовлетворяющие данным требованиям

$$f(x) = \frac{\lambda}{1+x^{\alpha}} \ (\boldsymbol{A}) \quad \text{и} \quad f(x) = \frac{\lambda}{(1+x)^{\alpha}} \ (\boldsymbol{B}),$$

при которых рассматриваемая нами математическая модель имеет одну тривиальную неустойчивую точку равновесия $x_1' = x_1'' = 0$ и одну устойчивую точку равновесия

$$x_2' = (\lambda - 1)^{1/\alpha} \quad \text{и} \quad x_2'' = \lambda^{1/\alpha} - 1$$

соответственно.

Однако, оказывается, что если параметр $\alpha > 2$, то с увеличением коэффициента λ происходит бифуркация - вместо одной устойчивой точки x_2 у рассматриваемой модели появляются две точки (образуется так называемый 2-цикл), затем из этих двух точек образуются четыре точки (4-цикл), восемь точек (8-цикл) и так далее до полного хаоса (рис.1).

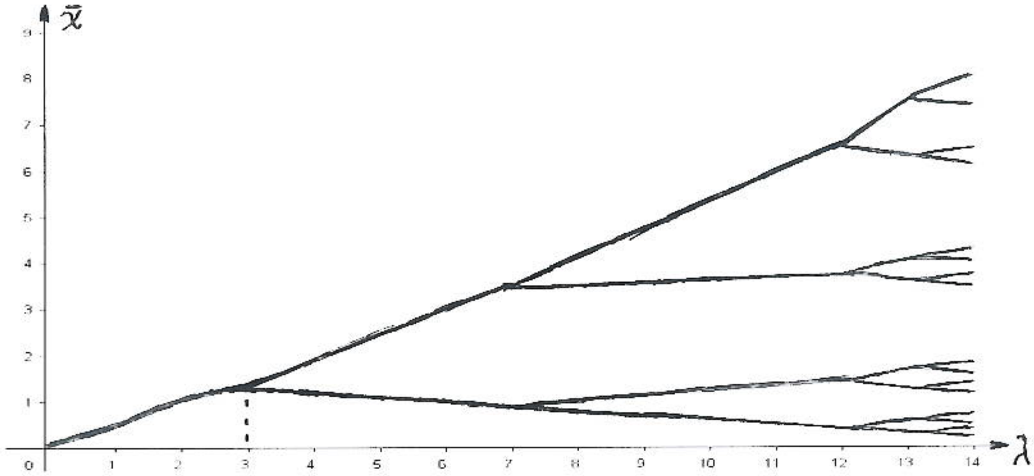

Рис.1. Рождение 2-цикла, 4-цикла и т.д. для функции $\boldsymbol{A}$ ($\alpha = 3$).

Подобный эффект был исследован М.И.Фейгенбаумом [1], но в рассмотренных им случаях система вновь возвращалась к одной устойчивой точке (так называемый эффект «схлопывания пузыря»).

Точку бифуркации рождения 2-цикла можно получить из условия [2]

$$F'(\bar{x}, \lambda) = (\bar{x} f(\bar{x}, \lambda))' = -1,$$

где $\bar{x}$ – точка равновесия модели.

В нашем случае, для функции $\boldsymbol{A}$ имеем

$$F'(\bar{x}, \lambda) = \lambda \frac{1 - (\alpha - 1)\bar{x}^{\alpha}}{(1 + \bar{x}^{\alpha})^2} = \frac{\lambda + \alpha - \alpha\lambda}{\lambda} = -1,$$

откуда $\bar{\lambda}_A = \dfrac{\alpha}{\alpha - 2}$.

Для случая $\alpha = 3$, изображенного на рис.1, точка бифуркации $\bar{\lambda}_A = 3$. Точки последующих бифуркаций (рождение 4-цикла, 8-цикла и т.д.) получены численно.

Аналогично для функции $\boldsymbol{B}$ имеем $\bar{\lambda}_B = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha - 2}\right)^{\alpha}$ и для случая $\alpha = 3$ находим точку первой бифуркации $\bar{\lambda}_B = 27$.

Экспериментальное установление хаотического поведения достаточно трудоемко, поскольку не всегда на практике можно отделить поведение исследуемой динамической системы от воздействия случайных факторов. Однако, как следует из вышеизложенного, динамическая система может иметь хаотическое поведение и без внешнего воздействия.

Подобный подход был применен при моделировании экологических систем, в частности, для исследования сезонного изменения численностей некоторых популяций насекомых [3] и рыб [4], в результате - были получены вполне достоверные экономические прогнозы.

Таким образом, при выборе математической модели даже самого простого процесса необходимо оценивать поведение модели не только для допустимого значения входящих в нее параметров, а более широко - в диапазоне их возможного изменения [5], иначе невозможно обеспечить достаточную точность прогнозирования поведения исследуемого процесса.

Литература

1. Фейгенбаум М.И. Универсальное поведение нелинейных систем. – УФН - 1983.- т.141.- № 2 – с.185-204.

2. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: Наука.- 1978.- 302 с.

3. Eckman J.P. Rodds to turbulence in dissipative dynamical systems. – Rev. Modern. Phys. - 1981.- vol.53.- p.643-654.

4. Шапиро А.П., Луппов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. – М: Наука - 1983.- 136 с.

5. Левин Л.Г., Гончаров А.Н. Прекращение Фейгенбаумовской последовательности и возможный переход к хаосу под действием миграции. – Исследования по математической популяционной биологии. - Владивосток: ДВЦ АН СССР. - 1986. - с.93-99.