УДК 622.61:624.1

В.Н. Маценко, канд. техн. наук, проф.,
В.И. Дворников, д-р техн. наук, проф.,
Донецкий национальный технический университет

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ТЯГОВОМ ОРГАНЕ МНОГОПРИВОДНЫХ ЦЕПНЫХ КОНВЕЙЕРОВ

Изучаются динамические состояния двухприводного цепного конвейера с произвольным заданием угловых перемещений приводных барабанов. На основании экспериментально полученных значений декремента колебаний излагается способ определения скорости распространения продольной волны, коэффициента вязкого трения и др.

цепной конвейер, декремент колебаний, скорость волны, вязкое трение, собственные частоты, спектр частот

Проблема и ее связь с научными или практическими задачами. Вопросы динамики цепного тягового органа являлись предметом многих исследователей, позволивших достаточно глубоко изучить основные особенности динамических процессов одноприводного конвейера. Для многоприводных цепных конвейеров полученные результаты не могут быть использованы в силу очевидных конструктивных различий. Между тем, перспективность широкого распространения в промышленности многоприводных конвейеров дает основание считать актуальным решение основных вопросов динамики тягового органа также и для этой группы конвейерных установок.

Анализ исследований и публикаций. Тяговый орган многоприводного цепного конвейера представляет собой систему n протяженных массивных упругих одинаковых элементов, взаимодействующих с n дискретными вращающимися массами. Исследование такого рода физической модели сопряжено с известными трудностями вычислительного характера. Значительные упрощения в этом плане без существенного искажения изучаемых динамических процессов достигаются, если предположить, что тяговая цепь эквивалентна однородному по длине упругому стержню. В этом случае массой эквивалентного стержня необходимо считать массу собственно цепи в сумме с «присоединенными» к ней массами транспортируемого материала и приведенных к цепи масс дискретных вращающихся элементов.

Подобная схематизация применялась еще Н.Е. Жуковским при исследовании усилий в сцепных устройствах поездов, а также в многочисленных работах А.А. Долголенко, И.Г. Штокмана, Д.М. Беленького, А.К. Квитко, Б.А. Бахалдина, Е.Х. Завгороднего, В.И. Лескевича и др. и в настоящее время является общепринятой [1].

Постановка задачи. Целью данного исследования является разработка математической модели динамики означенного выше эквивалентного однородного стержня, схематизирующего многоприводный цепной конвейер, и решение полученных дифференциальных уравнений и соотношений в период стационарного, установившегося движения.

Изложение материала и результаты. Динамическое состояние однородного стержня, как известно [2], описывается в рамках упруго-вязкой модели Кельвина-Фойхта следующим дифференциальным уравнением:

$$c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c^2 \mu_0 \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где $U(x, t)$ – упругое перемещение поперечного сечения стержня с координатой x в момент времени t (считается, что $x \in [0, l]$, где l – длина стержня); c – скорость распространения упругой волны деформации вдоль стержня (тягового органа); μ_0 – коэффициент вязкого трения. При этом динамическое усилие в произвольном сечении стержня определяется соотношением

$$N(x, t) = A\left(1 + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial U(x, t)}{\partial x}, \tag{2}$$

где A – агрегатная продольная жесткость конвейерной цепи.

Граничные и начальные условия для уравнения (1) установлены на основании следующих соображений.

Возмущающие нагрузки на концах отрезка тяговой цепи, расположенного между двумя приводами, обусловлены характером движения приводных устройств, которые могут быть как одинаковыми, так и различными по своим конструктивным и силовым параметрам. В общем случае будем их считать различными, и тогда на границах рассматриваемого стержня соответственно при $x = 0$ и $x = l$ можно записать:

$$U(0, t) = u_1(t), \quad U(l, t) = u_2(t), \tag{3}$$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – заданные перемещения как функции от времени, зависящие от конструкции и параметров приводных устройств.

Так как в работе ставится задача исследования стационарных динамических процессов, то в качестве начальных условий достаточно принять при $t = 0$ соотношения

$$U(x, 0) = u_0, \ \partial U(x, 0) / \partial t = v_0, \tag{4}$$

где $u_0 = const$ и $v_0 = const$ – соответственно стационарная упругая деформация и скорость установившегося движения цепного тягового органа. Равенства (4) имеют место лишь в начальный момент времени и справедливы для всех поперечных сечений цепи.

В ряде случаев, как и в рассматриваемой задаче, неоднородность граничных условий типа (3) доставляет некоторые трудности аналитического характера. С целью устранения этого, строго говоря, непринципиального “недостатка” целесообразно произвести замену [3]

$$U(x, t) = V(x, t) + W(x, t), \tag{5}$$

где $V(x, t)$ – “новая” подлежащая определению функция, $W(x, t)$ – некоторая вспомогательная функция, которую зададим в форме

$$W(x, t) = u_1(t) + \frac{x}{l}\left[u_2(t) - u_1(t)\right]. \tag{6}$$

Подстановка (5) в исходное дифференциальное уравнение (1) приводит к выражению

$$c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + c^2 \mu_0 \frac{\partial^3 V}{\partial t \partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + c^2 \mu_0 \frac{\partial^3 W}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{7}$$

а так как в силу представления (6)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \ \frac{\partial^3 W}{\partial t \partial x^2} = 0, \ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \ddot{u}_1(t) + \frac{x}{l}\left[\ddot{u}_2(t) - \ddot{u}_1(t)\right],$$

где две точки символизируют вторые производные по времени от соответствующих функций, то соотношение (7) приобретает вид неоднородного дифференциального уравнения относительно искомой функции $V(x, t)$:

$$c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + c^2 \mu_0 \frac{\partial^3 V}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \ddot{u}_1(t) + \frac{x}{l}\left[\ddot{u}_2(t) - \ddot{u}_1(t)\right]. \tag{8}$$

При этом граничные условия для уравнения (8), благодаря (3) и (5), становятся однородными:

$$V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, общая задача определения динамических перемещений $U(x,t)$ сведена к задаче вычисления функции $V(x,t)$ из неоднородного уравнения (8) с однородными граничными условиями (9). Можно сказать, что это уравнение описывает динамические процессы в некотором эквивалентном стержне под действием распределенной по длине возмущающей “нагрузки”

$$f(x,t) = \ddot{u}_1(t) + \frac{x}{l}\left[\ddot{u}_2(t) - \ddot{u}_1(t)\right], \tag{10}$$

причем сам стержень в силу (9) оказывается жестко закрепленным по концам.

Для решения уравнения (8) положим

$$V = V_1 + V_2, \tag{11}$$

где функции $V_1(x,t)$ и $Du_k(t) = 0$ – описывают соответственно *свободные* и *вынужденные* колебания тягового органа.

В результате подстановки (11) в (8) потребуем, чтобы свободные колебания описывались однородной граничной задачей

$$c^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + c^2 \mu_0 \frac{\partial^3 V_1}{\partial t\, \partial x^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = 0, \tag{12}$$

$$V_1(0,t) = 0, \quad V_1(l,t) = 0. \tag{13}$$

По аналогии, вынужденные колебания с учетом обозначения (10) будут описываться граничной задачей типа

$$c^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + c^2 \mu_0 \frac{\partial^3 V_2}{\partial t\, \partial x^2} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} = f(x,t), \tag{14}$$

$$V_2(0,t) = 0, \quad V_2(l,t) = 0. \tag{15}$$

Заметим, что граничные условия (13) и (15) непосредственно следуют из граничных условий (9) в силу представления (11).

Что же касается начальных условий для граничных задач (12), (13) и (14), (15), то здесь в них пока нет необходимости (см. далее подраздел “В”).

А) Собственные колебания.

Решение однородной граничной задачи (12), (13), описывающей свободные колебания тягового органа цепного конвейера, будем искать методом Фурье, суть которого состоит в представлении искомого решения в форме разложения в ряд вида

$$V_1(x,t) = \sum_k X_k(x) T_{1k}(t). \tag{16}$$

где $X_k(x)$, $T_{1k}(t)$ – некоторые подлежащие определению функции.

Подстановка в уравнение (12) разложения (16), в силу его специальной структуры, приводит к соотношению

$$c^2 X_k''(T_{1k} + \mu_0 \dot{T}_{1k}) = X_k \ddot{T}_{1k},$$

где два штриха символизируют вторую производную от X_k по x. Отсюда

$$c^2 \frac{X_k''}{X_k} = \frac{\ddot{T}_{1k}}{T_{1k} + \mu_0 \dot{T}_{1k}}, \tag{17}$$

а так как левая часть этого соотношения зависит только от x, а правая – от t, то обе эти части в (17) с необходимостью должны равняться некоторой константе, зависящей только от номера k. Эту константу принято считать равной $(-\omega_k^2)$, причем ω_k является так называемой *собственной частотой* колебаний рассматриваемого стержня [собственным числом граничной задачи (12), (13)].

Таким образом, соотношение (17) эквивалентно двум независимым дифференциальным уравнениям:

$$X_k'' + \left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 X_k = 0, \tag{18}$$

$$\ddot{T}_{1k} + \omega_k^2(\mu_0 \dot{T}_{1k} + T_{1k}) = 0. \tag{19}$$

Общее решение уравнения (18) имеет вид:

$$X_k(x) = A_k \cos\left(\frac{\omega_k}{c} x\right) + B_k \sin\left(\frac{\omega_k}{c} x\right), \tag{20}$$

где A_k, B_k – постоянные интегрирования, которые определяются при помощи граничных условий (13). Так, подставляя разложение (16) в (13), получим

$$\sum_k X_k(0) T_{1k}(t) = 0, \quad \sum_k X_k(l) T_{1k}(t) = 0,$$

откуда следует, что при произвольном времени t необходимо и достаточно, чтобы $X_k(0) = 0$, $X_k(l) = 0$. А подставляя сюда (20), получим $A_k = 0$ и

$$\sin\left(\frac{\omega_k}{c} l\right) = 0,$$

что представляет собой *характеристическое* (частотное) уравнение рассматриваемого стержня. Отсюда приходим к формуле, определяющей принципиально бесконечный дискретный спектр *собственных частот* колебаний тягового органа цепного конвейера (строго говоря, *циклических* частот):

$$\omega_k = \pi k \frac{c}{l} \quad (k = 1, 2, ...). \tag{21}$$

Все это дает возможность записать общее решение (20) в виде

$$X_k(x) = B_k \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right), \tag{22}$$

что с точностью до постоянного множителя B_k определяет так называемые *собственные формы* колебаний тягового органа.

Далее рассмотрим уравнение (19) для *координатных* функций. Его общее решение при обозначении $\mu_0\omega_k^2 = 2\delta_k$ имеет вид

$$T_{1k}(t) = \exp(-\delta_k t)\left(C_{1k}\cos\omega'_k t + D_{1k}\sin\omega'_k t\right), \tag{23}$$

где с использованием (21)

$$\omega'_k = \sqrt{\omega_k^2 - \delta_k^2} = \omega_k\sqrt{1-(\mu_0\omega_k/2)^2} = \omega_k\sqrt{1-\left(\pi k\mu_0 c/2l\right)^2} \tag{24}$$

есть, так сказать, *физическая частота* колебаний цепного тягового органа. Заметим, что при

$$\omega_k^2 - \delta_k^2 < 0 \text{ или } \mu_0\omega_k > 2 \tag{25}$$

величина ω'_k, как видно из (24), становится мнимой, и тогда выражение (23) будет соответствовать монотонному *апериодическому* затухающему движению, и при этом $T_{1k}(t)$ *мажорируется* экспоненциально убывающей функцией

$$\varphi_k(t) = \exp\left\{-\mu_0\omega_k^2\left[1-\sqrt{1-\left(2/(\mu_0\omega_k)\right)^2}\right]t/2\right\}.$$

Для цепных конвейеров (в особенности скребковых), в которых волочение абразивного груза по жесткому основанию обуславливает довольно высокие значения «эквивалентного» коэффициента вязкого трения μ_0, указанное обстоятельство играет существенную роль. Так, может оказаться, что при некотором $k \geq 1$ в формуле (21) условие (25) становится выполнимым, когда

$$\mu_0 > 2l/(\pi k c), \tag{26}$$

то есть в этом случае в функции $T_{1k}(t)$ будут отсутствовать гармонические составляющие с частотой ω'_k и выше. Не исключено, что при определенных сочетаниях параметров конвейера в рассматриваемой системе могут отсутствовать гармонические составляющие даже с минимальной частотой ω'_1. Априорно это не очевидно, и чтобы в этом убедиться, необходимо иметь достоверные экспериментальные данные относительно коэффициента вязкого трения μ_0 и скорости распространения упругой волны деформации c в соотношении (26).

Итак, общее решение граничной задачи (12), (13), описывающей свободные колебания тягового органа цепного конвейера, представляется в форме разложения (16) как

$$V_1(x,t)=\sum_k \sin\left(\pi k\frac{x}{l}\right)\exp(-\mu_0\omega_k^2 t/2)\left(C_k\cos\omega'_k t+D_k\sin\omega'_k t\right), \quad (27)$$

что записано с учетом выражений (22) и (23), причем здесь произведения постоянных интегрирования B_kC_{1k} и B_kD_{1k} обозначены соответственно, как C_k и D_k. В (27) собственные частоты колебаний ω_k вычисляются с помощью (21), а физические частоты ω'_k – по формуле (24).

Б) В ы н у ж д е н н ы е к о л е б а н и я.

Решение неоднородной граничной задачи (14), (15), описывающей вынужденные колебания тягового органа цепного конвейера, будем искать, подобно (16), в форме разложения

$$V_2(x,t)=\sum_k X_k(x)T_{2k}(t), \quad (28)$$

где собственные функции $X_k(x)$ задаются выражением (22), а координатные функции $T_{2k}(t)$ подлежат определению.

Подставляя (28) в (14), запишем

$$\sum_k\left[c^2X''_k(x)T_{2k}(t)+c^2\mu_0X''_k(x)\dot{T}_{2k}(t)-X_k(x)\ddot{T}_{2k}(t)\right]=f(x,t),$$

а учитывая здесь уравнение (18) и соотношение (22), в результате получим

$$\sum_k B_k\left[\ddot{T}_{2k}(t)+\omega_k^2\mu_0\dot{T}_{2k}(t)+\omega_k^2T_{2k}(t)\right]\sin\left(\pi k\frac{x}{l}\right)=f(x,t). \quad (29)$$

Теперь умножим левую и правую части (29) на функцию $\sin\left(\pi jx/l\right)$ и проинтегрируем полученное выражение по x от 0 до l. А так как в силу свойств *ортогональности* собственных функций (22)

$$\int_0^l \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right)\sin\left(\pi j \frac{x}{l}\right)dx = \frac{l}{2}\delta_{kj}\,, \tag{30}$$

где δ_{kj} – символ Кронекера ($\delta_{kj} = 0$ при $k \neq j$ и $\delta_{kj} = 1$ при $k = j$), то намеченная выше процедура и приведет к уравнениям относительно координатных функций $T_{2k}(t)$:

$$\ddot{T}_{2k}(t) + \omega_k^2 \mu_0 \dot{T}_{2k}(t) + \omega_k^2 T_{2k}(t) = Q_k(t)/B_k\,, \tag{31}$$

где для краткости записи обозначено

$$Q_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin(\pi k x/l)dx\,.$$

Подставляя сюда обозначение (10) для функции $f(x,t)$, получим после элементарного интегрирования:

$$Q_k(t) = \frac{2}{\pi k}\left[\ddot{u}_1(t) + u_2(t)(-1)^{k+1}\right] \quad (k = 1, 2, ...)\,. \tag{32}$$

Обозначив, как и прежде, $\mu_0\omega_k^2 = 2\delta_k$ [см. (23)], решение неоднородного уравнения (31) запишем в форме интеграла Дюамеля:

$$T_{2k}(t) = \frac{1}{B_k\omega'_k}\int_0^t Q_k(\tau)\exp[-\delta_k(t-\tau)]\sin\omega'_k(t-\tau)\,d\tau\,. \tag{33}$$

где τ – вспомогательная переменная интегрирования.

Заметим, что в соответствии с (22) собственные функции X_k пропорциональны некоторым, вообще говоря, неопределенным константам B_k. Но такие же константы, согласно (33), содержатся и в знаменателе координатных функций T_{2k}. Поэтому в произведениях $X_k T_{2k}$ разложения (28) этих констант не будет. Следовательно, в соотношениях (31) и (33), а также в (22) формально можно считать $B_k = 1$ для всех $k = 1, 2, ...$.

Итак, общее решение граничной задачи (14), (15), описывающей вынужденные колебания тягового органа цепного конвейера, представляется в форме разложения (28) как

$$V_2(x,t) = \sum_k \frac{1}{\omega'_k}\sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right)\int_0^t Q_k(\tau)e^{-\delta_k(t-\tau)}\,\sin\omega'_k(t-\tau)\,d\tau\,, \tag{34}$$

что записано с учетом выражений (22) и (33).

В (34) собственные частоты колебаний ω_k вычисляются с помощью (21), а физические частоты ω'_k – по формуле (24).

Интеграл в (34) нетрудно вычислить в квадратурах, если в (32) функции $u_1(t), u_2(t)$ заданы в аналитической форме. Во всяком случае, интеграл такого рода можно вычислить и численным способом при производной форме задания указанных функций.

В) Общее движение.

Общее динамическое перемещение произвольного сечения тягового органа $U(x, t)$ определим при помощи введенных и полученных соотношений (5), (6), (11), (27), (34). При этом будем иметь

$$U(x,t) = u_1(t) + \frac{x}{l}\left[u_2(t) - u_1(t)\right] + \\ + \sum_k \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right) e^{-\delta_k t}\left(C_k \cos\omega'_k t + D_k \sin\omega'_k t\right) + \\ + \sum_k \frac{1}{\omega'_k} \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right) \int_0^t Q_k(\tau) e^{-\delta_k (t-\tau)} \sin\omega'_k (t-\tau)\, d\tau . \qquad (35)$$

В дальнейшем понадобится также выражение для частной производной по времени от функции (35):

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \dot{u}_1(t) + \frac{x}{l}\left[\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)\right] + \\ + \sum_k \omega'_k \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right) e^{-\delta_k t}\left(-C_k \sin\omega'_k t + D_k \cos\omega'_k t\right) - \\ - \sum_k \delta_k \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right) e^{-\delta_k t}\left(C_k \cos\omega'_k t + D_k \sin\omega'_k t\right) - \\ - \sum_k \frac{\delta_k}{\omega'_k} \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right) \int_0^t Q_k(\tau) e^{-\delta_k (t-\tau)} \sin\omega'_k (t-\tau)\, d\tau + \\ + \sum_k \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right) \int_0^t Q_k(\tau) e^{-\delta_k (t-\tau)} \cos\omega'_k (t-\tau)\, d\tau . \qquad (36)$$

Выражения (35) и (36) содержат две группы постоянных интегрирования C_k, D_k $(k = 1, 2, ...)$, которые определим при помощи начальных условий (4). Для этого вначале найдем значения $U(x, t)$ и $\partial U(x,t)/\partial t$ при $t = 0$:

$$U(x,t)\big|_{t=0} = u_1(0) + \frac{x}{l}\left[u_2(0) - u_1(0)\right] + \sum_k C_k \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right),$$

$$\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{u}_1(0) + \frac{x}{l}\left[\dot{u}_2(0) - \dot{u}_1(0)\right] + \sum_k \left(D_k \omega'_k - C_k \delta_k\right)\sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right).$$

Тогда начальные условия (4) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &u_1(0) + \frac{x}{l}\left[u_2(0) - u_1(0)\right] + \sum_k C_k \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right) = u_0, \\ &\dot{u}_1(0) + \frac{x}{l}\left[\dot{u}_2(0) - \dot{u}_1(0)\right] + \sum_k \left(D_k \omega'_k - C_k \delta_k\right)\sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right) = v_0 \end{aligned}\right\}. \quad (37)$$

Далее воспользуемся условием ортогональности (30) собственных функций, для чего правые и левые части соотношений (37) умножим на функцию $\sin(\pi jx/l)$ и проинтегрируем полученные выражения по x от 0 до l; тогда в итоге будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\pi k C_k = 2u_0\left(1 + (-1)^{k+1}\right) - 2\left(u_1(0) + (-1)^{k+1} u_2(0)\right), \\ &\pi k (D_k \omega'_k - C_k \delta_k) = 2v_0\left(1 + (-1)^{k+1}\right) - 2\left(u_1(0) + (-1)^{k+1} u_2(0)\right). \end{aligned}\right\}. \quad (38)$$

Соотношения (38) необходимо рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно C_k и D_k, в результате решения которой однозначно определяются постоянные интегрирования C_k и D_k в (35) с учетом начальных деформаций и установившейся скорости цепи. Этим самым достигается <u>корректность</u> решения поставленной граничной задачи (1), (3), (4), а также представляется возможным теперь воспользоваться соотношением (2) для определения динамических усилий в любом сечении тягового органа.

Г) Резонансные режимы.

Как видно из выражения (35), представляющего динамическое перемещение произвольного поперечного сечения цепного тягового органа, наибольшее влияние на характер движения оказывают функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ и их вторые производные [см. (32)] как возмущающие кинематические факторы, порождаемые двумя приводными устройствами. Физическая природа кинематического возбуждения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ может состоять, например, в проявлении так называемых «зубцовых» колебаний, вызванных особенностями укладки звеньев цепи на приводной зубчатой звездочке. Возможны также и другие причины, например, эллиптичность или эксцентриситет звездочки, дисбаланс ротора двигателя, расцентровка или перекос валов в соединительной муфте и др.

Начальные состояния цепи играют вспомогательную роль [см. вторую строку в записи (35)], и, по истечении сравнительно короткого промежутка времени, их влияние оказывается ничтожно малым вследствие интенсивного рассеивания энергии, вызванным (например, для скребковых конвейеров) волочением транспортируемого материала по неподвижному основанию [1].

В установившемся движении $u_1(t)$ и $u_2(t)$, независимо от их физического происхождения, представляют собой гармонические функции типа

$$u_i(t) = -A_i \sin(\nu_i t + \psi_i) \;\; (i = 1, 2),$$

где A_i, ν_i, ψ_i – соответственно амплитуда, частота и фазовый сдвиг кинематического возмущения от i-го привода, и при этом

$$\ddot{u}_i(t) = \nu_i^2 A_i \sin(\nu_i t + \psi_i) \;\; (i = 1, 2). \tag{39}$$

Подстановка (39) в (32), а затем $Q_k(t)$ – в интеграл Дюамеля Du_k, содержавшийся в третьей строке записи (35), приводит к выражению

$$Du_k(t) = \frac{1}{\omega'_k}\int_0^t Q_k(\tau)\exp[-\delta_k(t-\tau)]\sin\omega'_k(t-\tau)\,d\tau = \frac{2e^{-\delta_k t}}{\pi k \omega'_k}$$

$$= \int_0^t \left[\nu_1^2 A_1 \sin(\nu_1 t + \psi_1) + (-1)^{k+1}\nu_2^2 A_2 \sin(\nu_2 t + \psi_2)\right] e^{\delta_k \tau} \sin\omega'_k(t-\tau)\,d\tau . \tag{40}$$

С помощью (40) выражение (35), из которого заранее исключены экспоненциально убывающие свободные колебания, запишется в форме

$$U(x,t) = u_1(t) + \frac{x}{l}\left[u_2(t) - u_1(t)\right] + \sum_k Du_k(t)\sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right). \tag{41}$$

Интеграл Дюамеля (40) приводит к двум принципиально различным типам решений:

описывающим *установившиеся незатухающие вынужденные* колебания с частотой внешнего воздействия ν_i (так называемые *стационарные* колебания);

описывающим убывающую со временем экспоненциально модулированную гармонику с физической частотой ω'_k. Эта составляющая является результатом переходных процессов, совершенно не связана с начальными условиями и представляет собой так называемые *вынужденно-сопровождающие* колебания. Такого рода вибрации начинаются сразу же в момент начала действия внешней силы, но они являются затухающими, как и собственные свободные колебания, и становятся исчезающие малыми, что обуславливается явлением так называемого *захвата* на частоте внешнего возбуждения.

Таким образом, исключая из интеграла (40) экспоненциально убывающие компоненты, получим:

$$Du_k(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{2A_i}{\pi k} \frac{(-1)^{(k+1)(i-1)} \nu_i^2}{\sqrt{(\nu_i^2 - \omega_k^2)^2 + 4\delta_k^2 \nu_i^2}} \cos(\nu_i t + \psi_i + \gamma_{ik}), \qquad (42)$$

где фазовые сдвиги γ_{ik} $(i = 1, 2)$ вычисляются из выражений

$$\mathrm{tg}\gamma_{ik} = \frac{\nu_i^2 - \omega_k^2}{2\delta_k \nu_i} \ (i = 1, 2; k = 1, 2, ...). \qquad (43)$$

Рассматривая в (42) безразмерные выражения

$$F_{ik} = \frac{\nu_i^2}{\sqrt{(\nu_i^2 - \omega_k^2)^2 + 4\delta_k^2 \nu_i^2}} \ (i = 1, 2; k = 1, 2, ...) \qquad (44)$$

как функции от ν_i^2, нетрудно показать, что их максимумы достигаются при вполне определенных частотах $\nu_i = \nu_{k\,рез}$, называемыми *резонансными частотами* внешнего возбуждения, причем

$$\nu_i = \nu_{k\,рез} = \frac{\omega_k^2}{\sqrt{\omega_k^2 - 2\delta_k^2}} = \frac{\omega_k}{\sqrt{1 - \mu_0^2 \omega_k^2 / 2}}, \qquad (45)$$

где, напомним, μ_0 – коэффициент вязкого трения в упруго-вязкой модели Кельвина-Фойхта. Подстановка (45) в (44) приводит к определению экстремальных величин F_{ik} в форме

$$\max F_{ik}\big|_{\nu_i = \nu_{k\,рез}} = \frac{\omega_k^2}{2\delta_k \omega'_k} = \frac{1}{k_0 \omega_k \sqrt{1 - (\mu_0 \omega_k)^2 / 4}}. \qquad (46)$$

Фазовые сдвиги на резонансных частотах в силу (43) и (45) определяются с помощью формулы $\mathrm{tg}\gamma_{ik} = \delta_k / \sqrt{\omega_k^2 - 2\delta_k^2}$.

Если выражение (46) рассматривать как функцию от ω_k, то она при $\mu_0\omega_k = \sqrt{2}$ принимает минимальное значение, равное единице, то есть в интервале $\mu_0\omega_k \in \left(0, \sqrt{2}\ \right)$ функция $\max F_{ik}$ является почти квадратично убывающей при возрастании ω_k. Следовательно, в указанном интервале резонансная амплитуда вынужденных колебаний тем меньше, чем больше ω_k в спектре собственных частот (21).

Итак, для возможности отсутствия в системе резонансных состояний, судя по записи (45), вместо условий (25) должно быть

$$\omega_k^2 - 2\delta_k^2 < 0 \text{ или } \mu_0\omega_k > \sqrt{2}. \qquad (47)$$

Если при некотором значении k условие (47) оказывается выполненным, то и для таких случаев решение (42) формально имеет место, но тогда ни о каких экстремумах функций (44) не может быть речи, так как выражения (45) и (46) становятся мнимыми. При этом F_{ik} при увеличении ν_i^2 от нуля до бесконечности ведет себя как монотонно возрастающая ограниченная сверху единицей функция. Действительно, пусть в соответствии с (47) $2\delta_k^2 > \omega_k^2$, тогда для выражения (44) получим оценку

$$F_{ik} = \frac{\nu_i^2}{\sqrt{(\nu_i^2 - \omega_k^2)^2 + 4\delta_k^2\nu_i^2}} < \frac{\nu_i^2}{\sqrt{(\nu_i^2 - \omega_k^2)^2 + 4\omega_k^2\nu_i^2}} = \frac{\nu_i^2}{\sqrt{\nu_i^4 + \omega_k^4}},$$

что и доказывает высказанное утверждение.

Условие (47) более жесткое, чем (25), и тем легче подобрать такие параметры конвейерной установки, которые обуславливали бы принципиальное отсутствие резонансов на большинстве собственных частотах спектра (21).

Другой способ отстройки от резонансных явлений состоит в назначении таких параметров приводных устройств, чтобы частоты внешних возбуждений ν_1, ν_2 были бы по возможности наибольшими. Так, если ν_1, ν_2 есть зубцовые частоты, то увеличение числа зубьев приводных звездочек может привести в ряде случаев к положительному результату, если $\min(\nu_1, \nu_2) > \nu_{k\,рез}$ [см. (45)] хотя бы для $k = 1$ или для нескольких первых k из натурального ряда $1, 2, \ldots$, чем обеспечивается так называемый за*резонансный* режим работы.

Таким образом, обобщая сказанное, решение (41) представимо в следующем формальном виде

$$U(x,t)=u_1(t)+\frac{x}{l}\left[u_2(t)-u_1(t)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}Du_k(t)\sin\left(\pi k\frac{x}{l}\right)+\sum_{k=n+1}^{\infty}Du_k(t)\sin\left(\pi k\frac{x}{l}\right), \tag{48}$$

где в первой и второй суммах интегралы Дюамеля Du_k вычисляются по одному и тому же выражению (42), а номер n находится из второго условия (47) с использованием (21) как наименьшее целое число от $\sqrt{2}\,l/(\pi\mu_0 c)$, то есть

$$n=\mathrm{Int}\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi\mu_0}\frac{l}{c}\right). \tag{49}$$

В связи с представлением (48) уместно назвать первые n форм колебаний $\sin(\pi kx/l)$ *активными*, как могущие подвергаться резонансным воздействиям, а остальные – *пассивными*.

Интересно, что для числа n можно дать оценку, зная только лишь на основании эксперимента величину логарифмического декремента затуханий первого тона собственных свободных колебаний Δ_1. На самом деле, так как

$$\Delta_k=\delta_k\cdot\frac{2\pi}{\omega'_k}=2\pi\left(\frac{\pi k}{2}\mu_0\frac{c}{l}\right):\sqrt{1-\left(\frac{\pi k}{2}\mu_0\frac{c}{l}\right)^2}\quad(k=1,2,...), \tag{50}$$

где использовались соотношения (21), (24) и обозначение $\delta_k=\mu_0\omega_k^2/2$, то с учетом (49) при $k=1$ получим $\Delta_1=\pi\sqrt{2}:n\sqrt{1-1/\left(2n^2\right)}$, откуда найдем

$$n=\mathrm{Int}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\Delta_1}\right)^2}\right]. \tag{51}$$

Если логарифмический декремента затуханий первого тона собственных колебаний $\Delta_1 << 2\pi$, то $n=\mathrm{Int}\left(\pi\sqrt{2}/\Delta_1\right)$.

Так, например, в работе [1] для конкретного экспериментально исследуемого скребкового конвейера установлено, что коэффициент отражения $k_{отр}\approx 0{,}47$ (отношение каждой последующей амплитуды к предыдущей). Следовательно, $\Delta_1=-\ln k_{отр}\approx 3/4$. Тогда по формуле (51) найдем $n=5$, то есть в данном случае в представлении (48) лишь пять первых форм колебаний являются активными, и именно эти формы потенциально подвержены резонансу.

Вообще, логарифмический декремент затухания колебаний является довольно ёмким информационным показателем, при помощи которого оцениваются ряд трудно определимых из опыта параметров. Так, если из (50) найти

$$\frac{\pi k}{2}\mu_0\frac{c}{l}=\sqrt{\frac{\Delta_k^2}{\Delta_k^2+4\pi^2}}\,, \tag{52}$$

а затем воспользоваться формулой (24), то несложно получить выражение для отношений собственных частот колебаний к физическим частотам в форме

$$\frac{\omega_k}{\omega_k'}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta_k}{2\pi}\right)^2}\,.$$

В частности, для данных приведенного выше примера по этой формуле при $k=1$ вычислим $\omega_1/\omega_1'\approx 1{,}007$, то есть сравниваемые частоты оказываются практически одинаковыми даже при довольно малой величине коэффициента отражения. Как соотносятся между собой частоты высших гармоник – неизвестно из-за отсутствия экспериментальных данных для декрементов $\Delta_2, \Delta_3, \ldots$, но надо полагать, что различия в оценках будут несущественными.

Выражение (52) может быть полезным для численной оценки физического параметра μ_0 (коэффициента вязкого трения в упруговязкой модели Кельвина-Фойхта). Известно, что $c=\sqrt{A/\rho}$, где A – агрегатная продольная жесткость конвейерной цепи, которую можно определить, например, при помощи разрывной машины, ρ – погонная масса цепи вместе со скребками и насыпным грузом, поэтому скорость распространения упругой волны деформации вдоль цепи является вполне физически измеримым параметром. И тогда из (52) найдем при $k=1$

$$\mu_0=\frac{2}{\pi}\frac{l}{c}\sqrt{\frac{\Delta_1^2}{\Delta_1^2+4\pi^2}}\approx\frac{l}{c}\frac{\Delta_1}{\pi^2}.$$

При одинаковых конструктивных и физических параметрах двухприводных устройств можно считать, что в (39)

$$A_1=A_2=A,\;\; \nu_1=\nu_2=\nu\,, \tag{53}$$

причем в этом случае сдвиги фаз ψ_1, ψ_2 могут быть либо одинаковыми, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, (синфазная работа приводов), либо соотноситься как $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = \psi - \pi$ (противофазная работа приводов). Вообще говоря, такие режимы нужно считать идеализированными, как трудно реализуемые на практике, хотя добиться выполнение условий (53) не представляет особых проблем.

Сам по себе сдвиг фаз ψ не играет принципиальной роли, важен лишь относительный сдвиг $\psi_1 - \psi_2$, поэтому в дальнейшем полагаем $\psi = 0$. Соответственно этим двум случаям интегралы (42) имеют следующие формы записи:

$$Du_k(t) = \frac{2A}{\pi k}\frac{\nu^2[1+(-1)^{k+1}]}{\sqrt{(\nu^2-\omega_k^2)^2+4\delta_k^2\nu^2}}\cos(\nu t+\gamma_k), \tag{54}$$

$$Du_k(t) = \frac{2A}{\pi k}\frac{\nu^2[1+(-1)^{k}]}{\sqrt{(\nu^2-\omega_k^2)^2+4\delta_k^2\nu^2}}\cos(\nu t+\gamma_k), \tag{55}$$

где в силу (43) $\mathrm{tg}\gamma_k = (\nu^2 - \omega_k^2)/(2\delta_k \nu)$.

Из (54) и (55) видно, что при синфазной работе приводов $Du_k(t) = 0$ с четными номерами *k*, а при противофазной работе $Du_k(t) = 0$ с нечетными *k*.

Это обстоятельство может быть полезным для практики, если учесть, что, как установлено выше, резонансная амплитуда вынужденных колебаний является почти квадратично убывающей при возрастании ω_k в спектре собственных частот (21) [см. (46)]. Следовательно, наибольшую опасность представляет резонанс на частоте ω_1, порождающий наибольшие динамические усилия в тяговой цепи. Но при противофазной работе $Du_1(t) = 0$, значит, такой режим является предпочтительным, хотя в этом случае остается возможность реализации резонанса на частотах $\omega_2, \omega_4, ..., \omega_n$, что, впрочем, не столь существенно и к тому же от таких резонансов легче отстроиться.

Разумеется, что при противофазной работе идеальным вариантом мог бы быть случай $n = 1$ в представлении (48), чем обуславливается принципиальное отсутствие вообще каких-либо резонансных состояний. Но при этом, исходя из (50), логарифмический декремент затухания должен быть равным не менее 2π, что является весьма проблематичным для реальных цепных конвейеров.

Выводы и направления дальнейших исследований. Выполненные теоретические исследования динамических состояний многоприводного (в данном рассмотрении – двухприводного) цепного конвейера (скребкового или пластинчатого) позволяют сделать следующие выводы.

1. Математическое моделирование двухприводного цепного конвейера осуществлено путем введения функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, описывающих гармонические перемещения цепи в точках ее набегания и сбегания соответственно на двух приводных звездочках и зависящих от конструкции и параметров приводов (так называемое кинематическое возбуждение).

2. В установившемся (стационарном) движении свободные колебания (порождаемые начальным натяжением и максимальной скоростью цепи), а также вынужденно-сопровождающие колебания (порождаемые переходными процессами при внешнем гармоническом возбуждении) практически отсутствуют из-за интенсивного рассеивания энергии колебаний при фрикционном волочении транспортируемого груза по жесткому основанию.

3. В силу предыдущего пункта, результирующее движение цепи представляется в форме двух разложений; первое из них, названное активным, состоит из n слагаемых, в одном из которых возможна реализация резонанса на одной из двух частот кинематического возбуждения; второе разложение, названное пассивным, принципиально не может порождать экстремальные состояния; число n, оказывается, можно вычислить по элементарной формуле, зная из опыта величину логарифмического декремента затухания основного тона собственных колебаний; с помощью этого параметра можно также численно оценить влияние диссипации энергии на физические частоты системы и оценить величину коэффициента вязкого трения в модели Кельвина-Фойхта.

4. Увеличение числа зубьев приводных звездочек является одним из эффективных способов отстройки от резонансных состояний, обеспечивая так называемый зарезонансный режим работы на зубцовых частотах.

5. Предпочтительным режимом работы двухприводной конвейерной установки является противофазный, когда фазы функций внешних гармонических возмущений $u_1(t)$ и $u_2(t)$, смещены на вели-

чину π, что обеспечивает отсутствие возможности резонансных состояний на частоте первого (основного) тона.

Дальнейшее развитие исследований многоприводного цепного конвейера следует осуществлять в направлениях:

– учета динамических процессов в порожняковой ветви конвейера;

– учета динамических состояний вращающихся масс приводов (звездочек, редукторов, соединительных муфт, роторов двигателей);

– рассмотрения переходных процессов в режимах разгона и торможения, в том числе экстренного;

– изучения динамических состояний при заклинивании цепи;

– рассмотрения системы с приводами ограниченной мощности;

– изучения автоматически подчиненно регулируемых систем с ограничением рывка.

Список литературы

1. Штокман И. Г. Динамика тяговых цепей рудничных конвейеров / И. Г. Штокман. – М.: Углетехиздат, 1959.
2. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / Я. Г. Пановко. – М.: Физматгиз. – 1960.
3. Кошляков Н. С. Дифференциальные уравнения математической физики / Н. С.Кошляков, Э. Б.Глинер, И. И.Смирнов. – М.: Физматиздат, 1962.

В.М. Маценко, В.І. Дворніков. **Динамічні процеси у тяговому органі багатоприводних ланцюгових конвеєрів.** *Визначаються динамічні стани двохприводного ланцюгового конвеєра з довільним завданням кутових переміщень приводних барабанів. На підставі експериментально набутих значень декремента коливань висловлюється спосіб визначення швидкості розповсюдження подовжньої хвилі, коефіцієнта в'язкого тертя та ін.*

ланцюговий конвеєр, декремент коливань, швидкість хвилі, в'язке тертя, власні частоти, спектр частот

V. Matsenko, V. Dvornikov. **Dynamic Processes in the Hauling Organ of Multidrive Chain Conveyers.** *The paper studies the dynamic states of a two drive chain conveyer. The angular moving of drive drums is considered. Experimentally obtained values of vibration decrement are used to define the speed of longitudinal wave distribution, viscid friction coefficient, etc .*

chain conveyer, decrement of vibration, speed of wave, viscid friction, own frequencies, spectrum of frequencies

Стаття надійшла до редколегії 21.10.2010
Рецензент: зав. каф. «Гірничі машини» ДонНТУ, д-р техн. наук, проф. А. К. Семенченко