УСТОЙЧИВЫЙ АЛГОРИТМ АДАПТИВНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

Михальчан В.С.
Одесская национальная академия связи им. А.С.Попова
E-mail: Steve2002@ukr.net

Abstract. ***Mykhalchan V. Stable algorithm adaptive signal processing of data transmission.*** *In paper the iterative algorithm of tuning of adaptive nonrecursive filters used for signal processing in conditions of an intersymbol interference is offered steady against round-off errors. The algorithm differs from known themes, that the minimum of a mean square error (MSE) is determined through values of two auxiliary polymarkers, each of which converges to one of two tops of the least axis of one of hyperellipsoids, inherings to the indicated functional.*

Анализ и постановка проблемы. Высокий уровень интерференционных помех, создаваемых каналами связи, является главным ограничивающим фактором повышения скорости передачи сигналов данных. В результате влияния межсимвольных искажений уменьшается расстояние между сигналами в точках принятия решения и снижается помехоустойчивость систем передачи данных. Для уменьшения межсимвольных искажений используются адаптивные нерекурсивные фильтры трансверсальной структуры [1,2], настройку которых наиболее часто осуществляют с применением градиентных итерационных методов [1–3], которые обладают рядом недостатков.

Во-первых, любой итерационный метод становится слишком чувствительным к неизбежным погрешностям вычислений при приближении к решению, так как необходимо вычислять градиент как разность двух почти совпадающих чисел [3]. При этом происходит значительная потеря точности из-за конечного разрядного представления действительных чисел.

Во-вторых, возникает проблема критерия останова, когда наиболее важным является вопрос «настроен ли адаптивный фильтр в данный момент времени?». В случае неограниченной точности необходимым условием достижения точного минимума среднеквадратической ошибки (СКО) является условие равенства нулю вектора градиента, но в известных итеративных алгоритмах, использующих машинную арифметику, трудно воспользоваться указанным критерием останова. Как правило, это выражается в резком увеличении количества тестовых сигналов обучения, а в некоторых случаях в невозможности получения приемлемых результатов адаптации из-за полной остановки алгоритма задолго до достижения минимума СКО, особенно для плохо обусловленных корреляционных матриц сигналов обучения и в условиях шума.

В предлагаемом алгоритме отсутствуют указанные недостатки, вычислительный алгоритм и критерий останова просты для реализации и практически не чувствительны к ошибкам округления.

Математическая модель и постановка задачи. Рассмотрим режим настройки нерекурсивного адаптивного фильтра по периодической последовательности одиночных сигналов, следующих через интервал, превышающий длительность отклика канала, что позволяет получить статистическую независимость на каждой итерации поиска минимума СКО:

$$\varepsilon(\varphi) = E\left[\varepsilon_N(\varphi)\right] = E\left[\sum_k (a_k - d_k)^2\right] = E\left[\sum_k r_k^2\right], \qquad (1)$$

где $r_k = a_k - d_k$ — отсчеты сигнала ошибки, т.е. отклонение отсчетов сигнала a_k на выходе фильтра от отсчетов требуемого сигнала d_k $(k = -2N,...,2N)$; $E(\cdot)$ — математическое ожидание.

Отсчетные значения сигнала a_l связаны с отсчетными значениями x_i на входе фильтра через значения регулируемых весовых параметров φ_i фильтра соотношением свертки:

$$a_k = \sum_i x_{k-i}\varphi_i\,,\ i = -N,...,N\,;\ k = -2N,...,2N\,. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\varepsilon(\varphi) = \sum_i \varphi_i \sum_j \varphi_j \sum_k x_{k-i}x_{k-j} - 2\sum_j \varphi_j \sum_k x_{k-i}d_k + E\left[\sum_k d_k^2\right] =$$

$$= \left(\varphi, A^T A\varphi\right) - 2\left(\varphi, A^T d\right) + E\left[\sum_k d_k^2\right], \qquad (3)$$

здесь и далее A — матрица, составленная из отсчетов x_i тестового сигнала на входе фильтра, размером $(2N+1)\times(4N+1)$; $A^T A$ — корреляционная матрица входного сигнала, размером $(2N+1)\times(2N+1)$; φ — вектор неизвестных, составленный из значений регулируемых весовых параметров φ_i фильтра; $(\cdot)$ — знак скалярного произведения; T — знак транспонирования.

Продифференцируем выражение (3) по параметрам φ_i, и, приравняв нулю результат, получим, в матричном виде

$$A^T A\varphi = b, \tag{4}$$

где $b = A^T d$ — вектор, размером $1\times(2N+1)$.

Задача решения уравнения (4), эквивалентна задаче поиска минимума функционала (3). Известно, что геометрический смысл любого итерационного метода состоит в том, что для минимизации заданного квадратичного функционала, каковым является СКО, необходимо отыскать центр семейства подобных гиперэллипсоидов, координаты которого и есть решение заданной системы (4).

Описание итерационного алгоритма. Рассмотрим итерационный процесс [4], который состоит в том, что из произвольной точки, принадлежащей одному из гиперэллипсоидов минимизируемого функционала (3), и которой соответствует определенное значение СКО, начинаем движение в направлении, противоположном вектору градиенту до тех пор, пока не достигнем точки пересечения с этим же гиперэллипсоидом. Получим координаты новой точки с таким же значением СКО, как и в предыдущей точке. Затем процесс повторяется. В результате получаются две последовательности точек, находящихся на одном гиперэллипсоиде, при этом каждая из последовательностей по своей «орбите» сходится к одной из двух вершин наименьшей оси данного гиперэллипсоида. Определив координаты обеих вершин гиперэллипсоида с заданной точностью, вычисляются координаты его центра, т.е. решение системы (4).

Для описанного итерационного метода переход от k-го приближения $\varphi^{(k)}$ к $k+1$-му приближению $\varphi^{(k+1)}$ производится по формуле:

$$\varphi^{(k+1)} = L\varphi^{(k)} = \varphi^{(k)} - 2\left[\left(A^T r^{(k)}, A^T r^{(k)}\right) \Big/ \left(A^T r^{(k)}, A^T A A^T r^{(k)}\right)\right] A^T r^{(k)}, \tag{5}$$

где $g^{(k)} = A^T A\varphi^{(k)} - b$ — вектор градиент функционала (3) в точке с координатами $\varphi^{(k)}$; L — оператор, который является однородным и непрерывным.

При этом последовательные векторы градиента связаны соотношением:

$$g^{(k+1)} = g^{(k)} - 2\left[\left(A^T r^{(k)}, A^T r^{(k)}\right) \Big/ \left(A^T r^{(k)}, A^T A A^T r^{(k)}\right)\right] A^T A r_k . \qquad (6)$$

Исследование и обоснование итерационного процесса адаптации. Обозначим через $e_1, e_2, ..., e_{2N+1}$ полную ортонормированную систему собственных векторов матрицы $A^T A$, соответствующих собственным числам $m = \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_{2N+1} = M$, и пусть $g^{(0)} = A^T r^{(0)} = \sum_{i=1}^{2N+1} c_i^{(0)} e_1$, а $A^T A g^{(0)} = \sum_{i=1}^{2N+1} c_i^{(0)} \lambda_i e_i$, где $c_i^{(0)}$ — коэффициенты при соответствующих векторах e_i. Пусть, далее, вектор $g^{(0)}$ лежит в плоскости, натянутой на собственные векторы e_1 и e_{2N+1} матрицы $A^T A$, при этом вектор $g^{(0)}$ расположен под углом 45^0 к указанным собственным векторам e_1 и e_{2N+1}, т.е.

$$c_1^{(0)} = c_{2N+1}^{(0)} = c^{(0)} = c, \; c_2^{(0)} = c_3^{(0)} = ... = c_{2N}^{(0)} = 0 \qquad (7)$$

Из формулы (6) имеем $g^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{2N+1} c_i^k \left(1 - 2\sum_{j=1}^{2N+1} c_j^{(k)2} \Big/ \sum_{j=1}^{2N+1} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} c_j^{(k)2}\right) e_i = \sum_{i=1}^{2N+1} c_i^{(k)} e_i$.

Отсюда коэффициент $c_{2N+1}^{(k+1)}$ при собственном векторе e_{2N+1}, равен

$$c_{2N+1}^{(k+1)} = c_{2N+1}^{(k)} \left(1 - 2\sum_{j}^{2N+1} c_j^{(k)2} \Big/ \sum_{j=1}^{2N+1} \frac{\lambda_j}{M} c_j^{(k)2}\right),$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Если вектор градиент $g^{(k)}$ не является собственным вектором матрицы $A^T A$, то $\left\|\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}\right\|^2 \geq 4 c_{2N+1}^{(k)2} \left(1 + \beta_k^2\right)^3 \Big/ \left(M + m\beta_k^2\right)^2$, $\operatorname{sign} c_{2N+1}^{(k+1)} = -\operatorname{sign} c_{2N+1}^{(k)}$ где $\beta_k = c_1^{(k)} \big/ c_{2N+1}^{(k)}$, при этом β_{k+1} и β_k связаны рекуррентным соотношением

$$\beta_{k+1} = \left[M - m\left(\beta_k^2 + 2\right)\right] \Big/ \left[\left(m - 2M\right)\beta_k^2 - M\right] \beta_k, \; \beta_0 = 1.$$

Следствие. Если последовательность $g^{(k)}$ стремится к некоторому собственному вектору матрицы $A^T A$, то ее пределом $\overline{g}$ может быть только вектор, пропорциональный вектору e_{2N+1}. Кроме того, так как $\operatorname{sign} c_{2N+1}^{(k+1)} = -\operatorname{sign} c_{2N+1}^{(k)}$, то таких предельных элемента должно быть два, и отличаться они должны только знаками, и к ним сходятся, собственно, последовательности вектора градиента четных и нечетных итераций. Из леммы 1 получим предельное значение нормы $\left\|\varphi^{(k+1)}-\varphi^{(k)}\right\|^2$. Так как $\beta_k^2 \to 0$ при $k \to \infty$, то $\lim\left\|\varphi^{(k+1)}-\varphi^{(k)}\right\|^2 = 4\bar{c}_{2N+1}^2 / M^2$, где $\bar{c}_{2N+1}$ — некоторое предельное значение $c_{2N+1}^{(k)}$, пока произвольное.

Из последнего выражения видно, что указанная норма имеет два предельных элемента с разными координатами, которые отличаются только знаками.

Лемма 2. Если вектор градиент $g^{(k)}$ не является собственным вектором матрицы $A^T A$, то $\left\|\varphi^{(k)}-\varphi^*\right\|^2 \geq c_{2N+1}^{(k)2}\left(m^2+M^2\beta_k^2\right) / m^2 M^2$.

Следствие. Из последнего соотношения видно, что при $k \to \infty$, так как $\beta_k \to 0$, $\lim\left\|\varphi^{(k)}-\varphi^*\right\|^2 = \bar{c}_{2N+1}^2 / M^2$.

На основании полученных лемм, можно показать, что существует два различных предела последовательности $\left\{g^{(k)}\right\}$, а значит и последовательности $\left\{\varphi^{(k)}\right\}$. К одному из них сходится последовательность четных, а к другому — нечетных приближений. Будем считать, что $\bar{\varphi} = \lim\limits_{k\to\infty}\varphi^{(2k)}$, $L\bar{\varphi} = \lim\limits_{k\to\infty}\varphi^{(2k+1)}$.

Можно показать [4], что полусумма координат предельных точек дает решение системы (4) $\varphi^* = \left(\bar{\varphi}+L\bar{\varphi}\right)/2$.

Используя условия (7) определим значение целевой функции в точках $\bar{\varphi}$ и $L\bar{\varphi}$ $\bar{\varepsilon}\left[\bar{\varphi}\right] = \bar{\varepsilon}L\left[L\bar{\varphi}\right] = \left(\bar{g},\left(A^T A\right)^{-1}\bar{g}\right) = M\bar{c}_M^2 = M\left(e_M, e_M\right)$.

Из равенства $\bar{\varepsilon}\left[\varphi^{(0)}\right] = \bar{\varepsilon}\left[\bar{\varphi}\right]$ получим $c^2\left(M+m\right)/mM = M\bar{c}_M^2 = c_{2N+1}^2$, откуда $\bar{c}_M^2 = c^2\left(M+m\right)/mM^2 = \left(e_M, e_M\right)$.

Лемма 3. Каждое последующее изменение $\varphi^{(k)}$ ближе к предельным точкам $\bar{\varphi}$ и $L\bar{\varphi}$, а следовательно, ближе к точному значению φ^*

$$f\left[\varphi^{(k+1)}\right] = \left\|\varphi^{(k+1)}-\varphi^*\right\|^2 - \left\|\bar{\varphi}-\varphi^*\right\|^2 < \left\|\varphi^{(k)}-\varphi^*\right\|^2 - \left\|\bar{\varphi}-\varphi^*\right\|^2 = f\left[\varphi^{(k)}\right],$$

и, если вектор градиент $g^{(k)}$ не является собственным вектором матрицы $A^T A$, то

$$f\left[\varphi^{(k+1)}\right] \le \left[\left(M - m\left(\beta_k^2 + 2\right)\right) \big/ \left(M + m\beta_k^2\right)\right]^2 f\left[\varphi^{(k)}\right],$$

где $\beta_{k+1} = \left[M - m\left(\beta_k^2 + 2\right)\right] \big/ \left[\left(m - 2M\right)\beta_k^2 - M\right]\beta_k$, $\beta_0 = 1$.

Следствие. Лемма 3 доказывает монотонную сходимость итерационного процесса (5) к минимуму СКО, кроме того, доказывает скорость сходимости процесса настройки адаптивного фильтра.

Сформулируем основные полученные результаты в виде теоремы.

Теорема. Алгоритм настройки регулируемых весовых параметров нерекурсивного адаптивного фильтра с применением алгоритма (5) позволяет вычислять две вспомогательные последовательности четных и нечетных точек, каждая из которых сходится монотонно к таким предельным элементам $\bar{\varphi}$ и $L\bar{\varphi}$, соответственно, вспомогательные градиенты которых пропорциональны собственному вектору, соответствующему наибольшему собственному числу корреляционной матрицы входного сигнала. Скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\left(\left\|\varphi^{(k+1)} - \varphi^*\right\|^2 - \left\|\bar{\varphi} - \varphi^*\right\|^2\right) \le \left[\left(M - m\left(\beta_k^2 + 2\right)\right) \big/ \left(M + m\beta_k^2\right)\right]^2 \left(\left\|\varphi^{(k)} - \varphi^*\right\|^2 - \left\|\bar{\varphi} - \varphi^*\right\|^2\right),$$

$\beta_0 = 1$, $\beta_k^2 < 1$, при этом регулируемые весовые параметры фильтра изменяются в соответствии с алгоритмом $\tilde{\varphi}^{(k+1)} = \left(\varphi^{(k+1)} + \varphi^{(k)}\right)\big/2$, $\tilde{\varphi}^{(0)} = \varphi^{(0)}$, и стремятся к значениям φ^*, при которых достигается минимум СКО.

Обсуждение полученных результатов. Сравнительный анализ знаменателей геометрической прогрессии предложенного алгоритма и алгоритма наискорейшего спуска показывает, что скорости сходимости обеих алгоритмов примерно равны для разных спектральных чисел обусловленности корреляционной матрицы $A^T A$.

Можно показать, что в предложенном алгоритме вспомогательный вектор градиент при приближении к решению, т.е. к предельным точкам решения $\bar{\varphi}$ и $L\bar{\varphi}$ не стремится к нулю, а наоборот, увеличивается по норме. В точках $\bar{\varphi}$ и $L\bar{\varphi}$ последовательные значения вспомогательного вектора градиента $g^{(k)}$ и $g^{(k+1)}$ отличаются только знаками и равны по норме, поэтому их можно использовать для организации критерия останова.

Результаты машинного моделирования показали, что за счет ошибок округления происходит постепенный уход с «орбиты» исходного гиперэллипсоида, однако это не оказывает практического влияния на скорость сходимости.

Используя соседние значения вспомогательного вектора градиента, сформулируем критерий останова в следующем виде

$$\left\| g^{(k+1)} + g^{(k)} \right\| \le \delta \text{, или } \left\| g^{(k+1)} \right\|^2 - \left\| g^{(k)} \right\|^2 \le \delta ,$$

где δ — параметр критерия останова настройки.

Как видно из выражений, критерий останова просто реализуется.

Выводы.

Предложенный алгоритм настройки нерекурсивных адаптивных фильтров позволяет, во-первых, избавится от чувствительности к погрешностям вычислений, а во-вторых, достаточно просто реализовать критерий останова, при этом скорость сходимости предложенного алгоритма не уступает алгоритмам на основе метода скорейшего спуска. Благодаря этому применение рассмотренного алгоритма позволит сократить время обучения адаптивных фильтров с одновременным увеличением пропускной способности каналов связи.

Литература

1. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1989. — 440 с.
2. Михальчан В.С. Синтез автоматических и адаптивных алгоритмов настройки нерекурсивных корректоров. Учеб. пособие / Одесский электротехн. ин-т связи им. А.С. Попова. — Одесса, 1989. — 52 с.
3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — 520 с.
4. Костарчук В.Н. Об одном методе решения систем линейных уравнений и отыскания собственных векторов матрицы. Доклады Академии наук СССР, 1954, т.98, №4. — С.531–534.

Сдано в редакцию: .

Рекомендовано к печати: д.т.н., проф. Ткаченко В.Н.