УДК 323.91.05

**С.В. Хуторненко**, канд. техн. наук, доц.
**А.Н. Воейков**, канд. техн. наук, доц.
**Д.П. Васильчук,** ассистент
ГВУЗ «Украинская инженерно-педагогическая академия»,
г. Харьков, г. Артемовск

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА ПРИ НАЛИЧИИ ГРАДИЕНТНОГО ПОЛЯ В ПЛОСКОСТИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА

*В работе представлена математическая модель состояния пьезоэлектрика с градиентным полем возбуждения в плоскости кристаллического элемента. Она представляет собой систему дифференциальных уравнений 2-го порядка, которая описывает механические и электрические колебания механических напряжений и электрических смещений пьезоэлектрика.*

**пьезорезонансное устройство, резонатор, градиентное электрическое поле, квазиизотропная модель**

***Актуальность.*** В настоящее время к устройствам генерации и селекции частоты (генераторам, фильтрам, модуляторам) предъявляются жёсткие требования по обеспечению перестройки частоты, причём эти устройства должны производить минимальный шум и минимальный микрофонный эффект. Перестройку по частоте колебательных систем таких устройств, основным элементом которых является пьезорезонатор, можно обеспечить непосредственно воздействуя на сам пьезорезонатор или изменяя параметры реактивных элементов, включенных последовательно или параллельно с пьезорезонатором. Применение управляемых пьезорезонансных колебательных систем с варикапом является наиболее распространённым способом управления. Однако использование варикапа привело к увеличению уровня фазовых шумов, снижению добротности.

Влияние электрического поля на частоту резонансных колебаний было доказано в ряде работ [1], но математической модели колебаний пьезоэлемента, при воздействии градиентного электрического поля, до настоящего времени нет.

В статье описывается математическая модель управления частотой колебательной системы при непосредственном воздействии на пьезоэлемент градиентного электрического поля.

***Постановка задачи.*** Основной задачей работы является разработка математической модели колебаний пьезорезонансного устройства, которая учитывает влияние градиентного поля возбуждения в плоскости кристаллического элемента.

***Решение задачи.***

При данном способе управления в плоскости кристаллического кроме основного (возбуждающего) электрического поля $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$ действует ещё и градиентное электрическое поле вдоль одной из осей (присутствует и производная по потенциалу $\varphi$ вдоль ширины $X_1$ или длины $X_3$ .) рисунок 1.

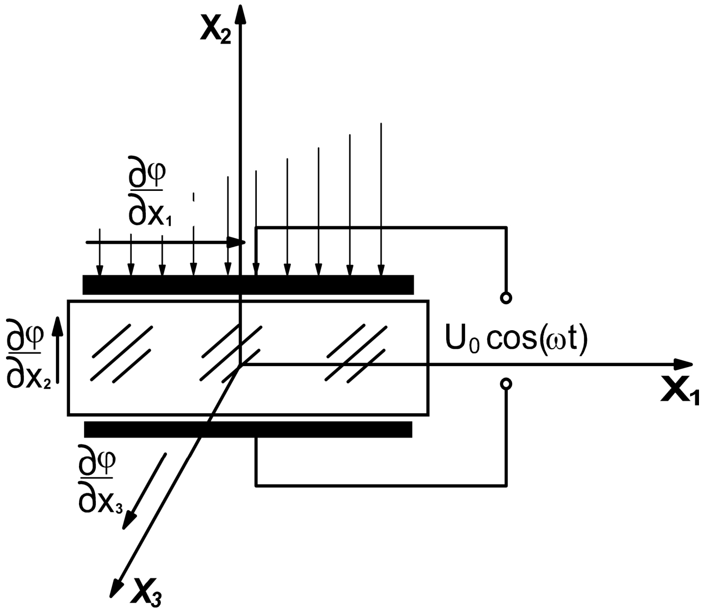


Рис. 1 – Тонкая пьезозлектрическая пластина бесконечных размеров в прямоугольной системе координат с управляющими электродами

Для получения аналитического решения и исследования влияния градиентного электрического поля на параметры пьезоэлектрического элемента резонатора предложена его квазиизотропная модель в тензорной форме [2].

$$\begin{gathered} C_{ijkl} U_{k,li} + e_{kij} \cdot \varphi_{,ki} = \rho \ddot{U}_j \\ e_{kij} u_{i,jk} - \varepsilon_{ij} \varphi_{,ij} = 0 \\ T_P = 0{,}5 C_{ijkl} (U_{k,l} + U_{l,k}) + e_{kij} \cdot \varphi_{,k} , \\ D_i = 0{,}5 e_{kij} (U_{k,l} + U_{l,k}) + \varepsilon_{ik} \cdot \varphi_{,k} \end{gathered} \qquad (1)$$

где $x_1$, $x_2$, $x_3$ – направления вдоль ширины, толщины и длины пьезоэлемента;

$C_{ij}$, $e_{kij}$, $\varepsilon_{ij}$, - упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные;

$\rho$, $D$, $U$, $\varphi$ - плотность пьезоэлемента, электрическое и механическое смещение вдоль оси и электрический потенциал соответственно;

$T_p$ – механические напряжения.

В ней постоянные жёсткости приняты изотропными, а пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные соответствуют исследуемому кристаллу. В исходных уравнениях колебания кварца помимо возбуждающего электрического поля (существует производная по потенциалу $\varphi$ вдоль толщины $X_2$ ) присутствует и производная по потенциалу $\varphi$ вдоль ширины $X_1$ или длины $X_3$ . Для случая когда существует производная по $\varphi$ вдоль толщины $X_2$ и вдоль ширине $X_1$ , получить решение системы уравнений не предоставляется возможным.

Рассмотрим случай, когда существует производная по потенциалу $\varphi$ вдоль толщины $X_2$ и вдоль длины $X_3$ :

$$\begin{gathered}
\mu U_{1,22} + \mu U_{1,33} - e_{11}\varphi,_{22} - e_{14}\varphi,_{23} = \rho \ddot{U}_1 \\
(\lambda + 2\mu)U_{2,22} + \mu U_{2,33} + (\lambda + \mu)U_{3,23} = \rho \ddot{U}_2 \\
(\lambda + \mu)U_{2,23} + \mu U_{3,22} + (\lambda + 2\mu)U_{3,33} = \rho \ddot{U}_3 \\
-e_{11}U_{1,22} - e_{14}U_{1,23} - \varepsilon_{11}\varphi,_{22} = 0
\end{gathered} \tag{2}$$

Анализ уравнений системы показывает, что смещение $\ddot{U}_1$ связано с электрическим потенциалом $\varphi$, возбуждается электрически и не связано со смещениями $\ddot{U}_2$ и $\ddot{U}_3$. Следовательно, система уравнений распадается на две системы несвязанных колебаний, возбуждаемых электрически:

$$\begin{gathered}
\mu U_{1,22} + \mu U_{1,33} - e_{11}\varphi,_{22} - e_{14}\varphi,_{23} = \rho \ddot{U}_1 \\
-e_{11}U_{1,22} - e_{14}U_{1,23} - \varepsilon_{11}\varphi,_{22} = 0
\end{gathered} \tag{3}$$

Не возбуждаемые электрически:

$$\begin{gathered}
(\lambda + 2\mu)U_{2,22} + \mu U_{2,33} + (\lambda + \mu)U_{3,23} = \rho \ddot{U}_2 \\
(\lambda + \mu)U_{2,23} + \mu U_{3,22} + (\lambda + 2\mu)U_{3,33} = \rho \ddot{U}_3
\end{gathered} \tag{4}$$

Система уравнений колебания пьезоэлемента, возбуждаемых электрически в развёрнутом виде:

$$\begin{cases}
\mu \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + \mu \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} - e_{11}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - e_{14}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3} = \rho_o \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, \\
e_{11}\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + e_{14}\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \varepsilon_{11}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0.
\end{cases} \tag{5}$$

Далее после применения преобразования Фурье и Лапласа было получено общее решении такой системы уравнения:

$$U^*(\xi,\eta,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Phi(\xi,\omega,p)e^{ipt}dp\right)e^{i\omega\eta}d\omega, \quad (6)$$

где

$$\Phi(\xi,\omega,p) = E(\omega,p)\exp(-\lambda\xi) + H(\omega,p)\exp(\lambda\xi) - \\ -\frac{\rho_o}{\lambda}\times\int_0^{\xi}(pF(\varsigma,\omega) + G(\varsigma,\omega)\cdot sh(\lambda(\xi-\varsigma))d\varsigma \quad (7)$$

$f(\xi,\eta) = U(\xi,\eta,0)$ – функция, описывающая смещение в момент t = 0;
$g(\xi,\eta) = U_t'(\xi,\eta,0)$ – скорость изменения смещения в момент t = 0.

Далее чтобы получить решение исходной задачи остается:

- выбрать функции $f(\xi,\eta) = U(\xi,\eta,0), g(\xi,\eta) = U_t'(\xi,\eta,0)$;
- найти их преобразование Фурье $F(\xi,\omega)$, $G(\xi,\omega)$ по переменной $\eta$;
- вычислить выражение (7);
- восстановить оригинал $U(\xi,\eta,t)$ при помощи обратного преобразования Лапласа и обратного преобразования Фурье.

***Выводы и пути дальнейших исследований.***

1. Впервые была получена математическая модель в виде системы дифференциальных уравнений колебаний пьезоэлемента с учётом управляющего градиентного электрического поля.

2. Было получено общее решение системы дифференциальных уравнений, которое в дальнейшем, после определения начальных условий для конкретной конфигурации резонатора, и, подстановки их в общее решение, даст возможность получить частое решение описывающее колебания пьезоэлемента.

Список источников:

1. Андреев И.Л. Поляризационный эффект в кристаллах лангасита / И.Л. Андреев // «Журнал технической физики». – 2006. – Т 76. – Вып. 1.
2. Хуторненко С.В. Толщинно-сдвиговые колебания пьезорезонаысных элементов датчиков технологических параметров / С.В. Хуторненко // научно- технический журнал «Технология приборостроения». – 1996.
3. Зеленка И. Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных аккустических волнах: материалы, технология, конструкции, применение / И. Зеленка; Пер. с чешск. - М.: Мир, 1990.- 584 с.
4. Tiersten H.F. Linear Piezoelektrik Plate Vibration. New York: Plenum Press, 1969.- 242p.
5. Пьезоэлектрические резонаторы: справочник / В.Г.Андросова, Е.Г. Бронникова, А.М. Васильев и др.; Под ред. П.Е. Кандыбы и П.Г.Позднякова. - М.: Радио и связь, 1992.-392 с.

*Стаття надійшла до редколегії 28.04.2011*

*Рецензент: зав. каф. ГЕА ім Р.М.Лейбова, канд .техн. наук, доц. К.М. Маренич*

***С.В. Хуторненко, О.М. Воєйков, Д.П. Васильчук.* Математична модель п'єзоелектричного резонатора при наявності градієнтного поля в площині кристалічного елемента.** *У роботі представлена математична модель стану п'єзоелектрика з градієнтним полем збудження в площині кристалічного елементу. Вона являє собою систему диференціальних рівнянь 2-го порядку, яка описує механічні і електричні коливання механічної напруги і електричних зсувів пьезоелектрика.*
**п'єзорезонансний пристрій, резонатор, градієнтне електричне поле, квазіізотропна модель**

***S. Khutornenko, A. Vojeykov, D. Vasylchuk*. The mathematic model of piezoelectrical resonator in the atea of gradientable brim in platitude of crystallic element.** *The mathematical model of the state of piezoelectric is in-process presented with the gradient field of excitation inplane of crystalline element. It is the system of differential equalizations of 2th order, which describes mechanical and electric vibrations, mechanical tensions and electric displacements of piezo-electrical.*
**piezoelectri device, resonator, gradient electric field, quasiisotropici model**