

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Пауков Д.П.

Донецкий национальный технический университет

paukov@maus.donetsk.ua

Abstract

Paukov D.P., Mathematical modeling of complex surfaces. Modeling, simulation and visualization of three-dimension complex bodies widely use mathematical model of curves and surfaces. The most important curves and surfaces for these purposes are curves and surfaces in Hermite and Bezier forms, splines and NURBS. Article is devoted to survey this way to use geometrical data in various computer graphics systems and adjacent fields.

Проблема привлечения средств моделирования и визуализации возникает в таких областях как геоинформационные системы, медицина, отображение результатов научных экспериментов, реставрация объектов искусства, системы виртуальной реальности и инженерии, САПР. В связи с постоянным развитием этих направлений научных исследований актуальность работ, связанных с исследованием моделирования и визуализации сложных объектов, будет в дальнейшем только возрастать.

Перечисленные выше предметные области используют в своем анализе объекты сложной формы, которые требуют обработки больших объемов данных и при этом высокую точность представления. Обычно поверхности таких объектов представляют собой сложные образования, которые часто моделируют кривыми поверхностями. При визуализации таких объектов широко применяются триангуляционные сетки. Таким образом, особое внимание в компьютерной графике уделяется именно кривым, гладким поверхностям и триангуляционным сеткам. Существует два основных направления исследований в области представления сложных объектов в системах моделирования. Во-первых, усовершенствование существующих и разработка новых математических способов представления таких объектов; во-вторых, разработка методов управления, усовершенствования и упрощения сеток.

Разнообразие способов представления объектов сложной формы в системах компьютерной графики существенно затрудняет выбор оптимальной модели представления объектов. Это же существенно затрудняет работу пользователей различных графических систем. Поэтому возникает задача выбора оптимального способа представления кривых и поверхностей в пространстве, используемых в системах компьютерной графики, виртуальной инженерии и САПР, с целью упростить разработку таких систем и инструментов.

Целью статьи является обзор основных математических моделей кривых и поверхностей, которые используются для моделирования и визуализации объектов сложной формы, а также указать основные преимущества и недостатки этих моделей.

Существует три формы наиболее распространенных способа представления кривых и поверхностей: явная, неявная и параметрическая. Явная и неявная формы представления часто вместе называются непараметрическими. Явная форма представления предусматривает наличие уравнения (или совокупность уравнений), в левой части которого стоит зависимая переменная, а в правой – функция от независимой переменной. Для описания поверхности в явном виде используют явную функцию от двух независимых переменных. Важно отметить, что нет никакой гарантии, что для определенной линии или поверхности существует явное уравнение, поэтому часто используется неявная форма представления. Представить линию в пространстве в неявной форме не так просто: необходимо использовать систему уравнений, представляющих поверхность, пересечение которых, если оно существует, образует кривую. Параметрическая форма представления наиболее удобна для использования в компьютерной графике. Ее суть состоит в том, что кривая в пространстве описывается совокупностью функций одной переменной, а поверхность совокупностью функций двух независимых переменных. При этом функции, как правило, выбираются в виде полиномов. Параметрическая форма позволяет легко манипулировать функциями, вычислять производные для достижения гладкости кривых и поверхностей. Поэтому именно параметрическая форма представления кривых и поверхностей получила широкое распространение в системах моделирования и компьютерной графике. Однако, в некоторых случаях, удобно использовать как параметрическое, так и непараметрическое представление. Поэтому в отдельных системах моделирования применяется преобразование уравнений из параметрической формы в непараметрическую и обратно [1].

При моделировании и визуализации исходная информация об объекте часто представляется в виде набора опорных точек, описывающих кривую или поверхность. В зависимости от интерпретации этих точек, а также от требований к гладкости поверхности, методы моделирования сложных кривых и поверхностей можно разделить на три группы: интерполяционные кривые и поверхности, кривые и поверхности в форме Эрмита и Безье, B-сплайны и NURBS [2].

Интерполирование. Интерполирование предусматривает, что кривая или поверхность должна проходить через заданные точки. Это условие используется для вычисления коэффициентов полинома. Наиболее широкое распространение в классе интерполяционных кривых и

поверхностей получили кубические интерполяционные полиномы (см. рис. 1, 2). Подробней интерполяционные кривые и поверхности описаны в [3-5]. Существенным недостатком интерполяционных кривых и поверхностей часто выступает то, что количество опорных точек определяет степень полинома. Для преодоления этого недостатка на больших наборах точек строят сегменты интерполяционных кривых, при этом возникает проблема управления гладкостью кривой и поверхности в месте соединения сегментов.

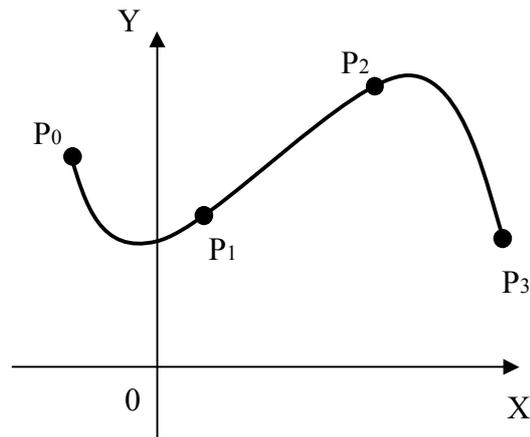


Рисунок 1. Кубическая интерполяционная кривая

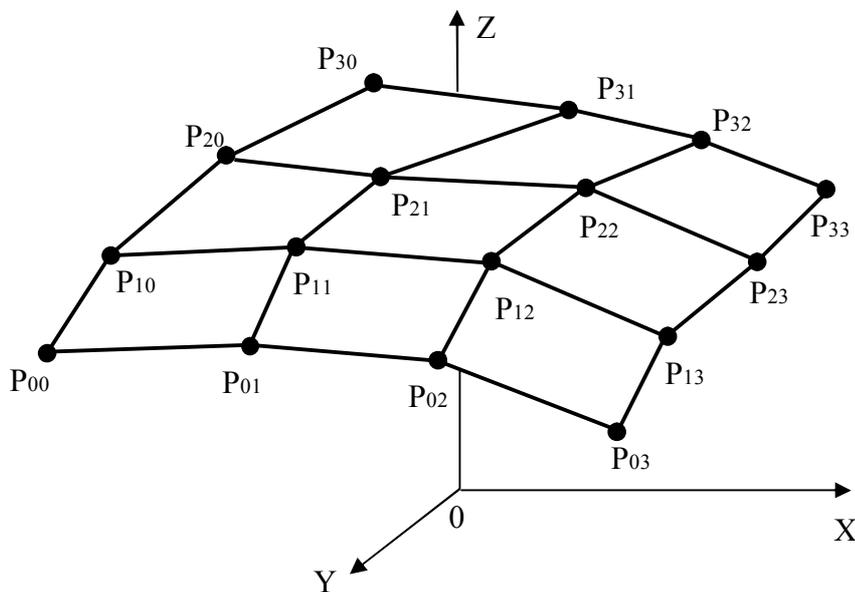


Рисунок 2. Набор опорных точек для построения порции кубической интерполяционной поверхности

Форма Эрмита и Безье. Для управления гладкостью кривых и поверхностей в местах соединения сегментов интерполяционных кривых Эрмитом было предложено задавать в начальной и конечной точке сег-

мента значения производных (см. рис. 3а) [5-6]. Чаще всего для описания кривой используют полином третьей степени:

$$P(u) = [x(u) \quad y(u) \quad z(u)] = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 = \sum_{k=0}^3 a_k u^k = u^T a \quad (1)$$

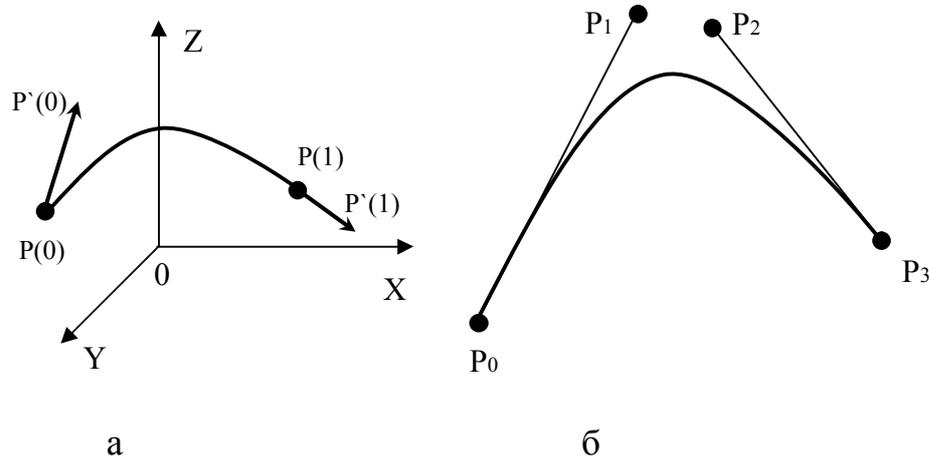


Рисунок 3. Определение кривой в форме Эрмита (а) и форме Безье (б)

Формула (1) представляет собой кубическое параметрическое уравнение, которое описывает сегмент кривой, где a_0, a_1, a_2, a_3 – это векторные коэффициенты, u – параметр уравнения ($0 \leq u \leq 1$).

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad u^T = [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3], \quad a_k = \begin{bmatrix} a_{kx} \\ a_{ky} \\ a_{kz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Форма Эрмита требует использовать для каждого сегмента две опорные точки и задавать для каждой из них значения производных.

$$\begin{aligned} P_0 &= P(0) = a_0; \\ P_1 &= P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3; \\ P_0' &= P'(0) = a_1; \\ P_1' &= P'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти же уравнения можно записать в более компактной матричной форме

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Если обозначить через q матрицу имеющихся (или заданных) данных, то решение уравнения (3) можно записать так

$$a = Mq, \text{ где } q = \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Матрицу M называют базисной матрицей Эрмита. Подставив найденные значения коэффициентов a в уравнение (1), получим представление полиномиальной кривой в форме Эрмита.

$$P(u) = au^T = Mqu^T = (u^T M)q = b(u)^T q, \quad (6)$$

где $b(u) = M^T u$ называют матрицей функций смешивания, которые характеризуют вклад, вносимый в форму кривой опорными точками. Для представления Эрмита функции смешивания имеют вид

$$b(u) = M^T u = \begin{bmatrix} 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ -2u^3 + 3u^2 \\ u^3 - 2u^2 + u \\ u^3 - u^2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Воспользовавшись уравнениями (1), (6) и (7), порцию поверхности в форме Эрмита можно представить так

$$P(u, t) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 b_i(u) b_j(t) q_{i,j}, \quad Q = [q_{i,j}], \quad (8)$$

где Q представляет собой набор данных, определяющих порцию поверхности, аналогично тому, как q представляет сегмент кривой (5).

Форма Безье не предусматривает задания производных и так же как форма Эрмита позволяет управлять гладкостью кривых. Форма кривых Безье использует аппроксимацию векторов касательных (см. рис. 3б), что позволяет использовать для задания кривых Безье только опорные точки без производных. Пользователь может задать четыре опорные точки и, изменяя их положения, корректировать форму кривой.

Форма представления Безье использует в качестве функций смешивания полином Бернштейна:

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}. \quad (9)$$

Если функцию смешивания (9) применить к опорным узлам, то получится уравнение кривой Безье:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} P_i. \quad (10)$$

Уравнение кривой Безье (10) показывает, что при наличии $(n+1)$ опорной точки, мы получим степень кривой n . Таким образом, степень кривой Безье определяется количеством опорных точек.

Часто нужно не только вычислять значения координат точек на кривой, но и значения производных первого и высших порядков. Форма представления кривых Безье позволяет вычислять первую производную по следующей формуле, которая выводится в [6]:

$$\frac{dP(u)}{du} = n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} u^i (1-u)^{n-1-i} a_i, \quad (11)$$

где $a_i = P_{i+1} - P_i$ можно рассматривать как опорные точки, тогда уравнение (10) представляет собой кривую Безье, заданную этими точками. Кроме того, вторая производная представляется следующим образом:

$$\frac{d^2 P(u)}{du^2} = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{i!(n-2-i)!} u^i (1-u)^{n-2-i} b_i, \quad (12)$$

$$b_i = a_{i+1} - a_i.$$

Поверхность Безье получается путем расширения концепции кривой Безье на два измерения:

$$P(u, t) = \sum_{i=0}^n \{P_{i,0} B_{0,m}(t) + P_{i,1} B_{1,m}(t) + \dots + P_{i,m} B_{m,m}(t)\} B_{i,n}(u) =$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} B_{j,m}(t) B_{i,n}(u), \quad (0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1) \quad (13)$$

Подробное описание кривых и поверхностей в форме Безье приводится в [3-6]. В [5-6] излагается алгоритм де Кастильо, позволяющий вычислять точки на кривой Безье непосредственно, без трудоемкого вычисления значений биномиальных коэффициентов.

В-сплайны и NURBS. Если отказаться от требования, чтобы формируемая кривая или поверхность проходила через опорные точки, а подходила близко к ним, то можно обеспечить гладкость и непрерывность не только самой кривой или поверхности, но и ее первой и второй производных в точках сопряжения сегментов (см. рис. 4).

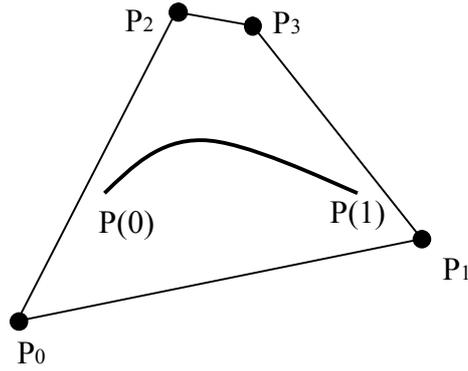


Рисунок 4. Сегмент В-сплайна

Для построения В-сплайна Кокс [7] и де Бур [8] предложили использовать рекурсивно-определенную функцию

$$R_{i,k}(u) = \frac{(u-t_i)R_{i,k-1}(u)}{t_{i+k-1}-t_i} + \frac{(t_{i+k}-u)R_{i+1,k-1}(u)}{t_{i+k}-t_{i+1}};$$

$$R_{i,1}(u) = \begin{cases} 1, & t_i \leq u \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} . \quad (14)$$

Аналогично формуле (10), используя функцию смешивания (14), уравнение В-сплайна можно записать так

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i R_{i,k}(u), \quad t_{k-1} \leq u \leq t_{k+1}. \quad (15)$$

Значения t_i называют узловыми, а неопределенность $0/0$ в формуле (14) считают равной нулю. Степень сплайна определяется не числом задающих точек, а значением коэффициента порядка сплайна k , которое должно быть на единицу больше желаемой степени кривой.

В-сплайновая поверхность получается путем расширения уравнения (15) на два измерения

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} R_{i,k}(u) R_{j,l}(v), \quad (16)$$

$$(s_{k-1} \leq u \leq s_{n+1}, t_{l-1} \leq v \leq t_{m+1}).$$

Если по одному и тому же набору точек построить интерполяционную кривую, кривую Безье и В-сплайн, то окажется, что для В-сплайна необходимо выполнить в 3 раза больше вычислений, чем для интерполирования и кривой Безье. Аналогично порция поверхности В-сплайна требует в 9 раз больше вычислений, чем интерполяционные поверхности и поверхности Безье. Однако метод В-сплайнов позволяет построить более плав-

ную кривую или поверхность, чем кривые и поверхности в форме Безье. Для подробного знакомства с В-сплайнами см. [3-7, 9-10].

Важной разновидностью В-сплайнов является неравномерный рациональный В-сплайн (NURBS, nonuniform rational B-spline). Суть NURBS состоит в том, что для построения В-сплайна в трехмерном пространстве точки $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ представляют в пространстве однородных координат

$$q_i = w_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Коэффициенты w_i используют для увеличения или уменьшения влияния конкретной опорной точки в наборе. Эти опорные точки используются для формирования четырехмерного В-сплайна, первые три компоненты которого будут представлять собой В-сплайновое представление опорных точек [3-5]. Кривая NURBS может быть описана следующим уравнением

$$P(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i P_i R_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i R_{i,k}(u)}. \quad (18)$$

Узловые коэффициенты t_i уравнения кривой NURBS определяются также как для сплайна (14). Уравнение поверхности NURBS записывается так

$$P(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} P_{i,j} R_{i,k}(u) R_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} R_{i,k}(u) R_{j,l}(v)}. \quad (19)$$

NURBS кривые и поверхности сохраняют все свойства трехмерных В-сплайнов, но, кроме этого, обладают еще целым рядом важных свойств, среди которых корректное перспективное преобразование и возможность с помощью четвертой координаты более гибко управлять кривой или поверхностью. NURBS в компьютерной графике получили широкое распространение, потому что на их основе можно эффективно моделировать практически все распространенные типы криволинейных геометрических объектов.

Выводы

В статье рассмотрены математические модели поверхностей объектов сложной формы. Приведены математические основы представления

сложных поверхностей в системах компьютерной графики. В табл. 1 показаны сводные сравнительные характеристики этих моделей, полученные на основании изложенного материала.

Таблица 1 – Качественные характеристики моделей кривых и поверхностей

	Интерполирование	Форма Эрмита	Форма Безье	В-сплайн	NURBS
Принадлежность опорным узлам	полная	частичная	частичная	отсутствует	отсутствует
Зависимость степени от количества узлов	высокая	высокая	высокая	низкая	низкая
Гладкость кривой или поверхности	низкая	средняя	средняя	высокая	высокая
Трудоемкость вычислений	средняя	низкая	средняя	высокая	высокая
Универсальность представления	низкая	низкая	низкая	средняя	высокая

Наиболее оптимальной моделью представления являются В-сплайны и NURBS. Они обладают высокой универсальностью, гладкостью, их степень существенно не зависит от количества опорных узлов. Форма Эрмита и Безье менее трудоемки, но обладают меньшей гладкостью, универсальностью, большей зависимостью степени от количества опорных точек. Интерполирование обладает высокой зависимостью степени полинома от количества опорных точек и низкой универсальностью.

Таким образом, наиболее оптимальными средствами моделирования объектов сложной формы являются В-сплайны и NURBS, которые в сочетании с современными вычислительными мощностями могут быть эффективно использованы в система компьютерной графики.

Дальнейшим этапом в исследовании моделирования объектов сложной формы в системах компьютерной графики является усовершенствование методов рендеринга, а в виртуальной инженерии разработка эффективных методов вычисления параметров объектов в режиме реального времени и адаптация для этого соответствующих алгоритмов представления поверхностей.

Литература

1. Hoffmann, C.M. Hopcroft, J.E., and Karasick, M.S. “Robust Set. Operations on Polyhedral Solids”, IEEE Computer Graphics and Applications, pp. 50-59, 1989

2. Е.А. Башков, Д.П. Пауков. Математические модели поверхностей сложной формы в системах моделирования и визуализации. Моделирование и компьютерная графика: Материалы 1-й международной научно-технической конференции, г. Донецк, 4-7 октября 2005 г. — Донецк, ДонНТУ, Министерство образования и науки Украины, 2005. с. 59-65.
3. Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. — Academic Press, New York, 1988.
4. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. — М.: Мир, 2001 — 604 с.
5. Эйнджел Эдвард Интерактивная компьютерная графика. Вводный курс на базе OpenGL, 2 изд.: Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. — 592 с.: ил.
6. Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE). — СПб.: Питер, 2004. — 560с.
7. Cox. M.G. “The Numerical Evaluation of B-splines”, J. Inst. Maths. Applies., Vol. 15, pp. 95-108, 1972
8. de Boor, C. “On calculating with B-spline”, J. of Approx. Theory, Vol. 6, pp. 52-60, 1972
9. Фокс А., Пратт М., Вычислительная геометрия: применение в проектировании и производстве — М.: Мир, 1982 — 302 с.
10. Никулин Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. — 560 с.: ил.

Дата надходження до редакції 21.10.2006 р.