

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
ЗА КУРСОМ «ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»
Для студентів спеціальності «Електричні системи і мережі»
(Автор Доцент Кобазєв В.П)

1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1 Основные понятия и определения

Теория автоматического управления (ТАУ) является одним из разделов кибернетики – науки об общих законах управления, как в живой, так и в неживой природе.

Управление – это процесс воздействия на объект с целью привести его в желаемое состояние или положение. Целенаправленное воздействие на объект возможно при следующих условиях: имеется *алгоритм управления* (закон регулирования), позволяющий добиваться поставленной цели в различных ситуациях; имеется *автоматическое устройство* (автоматический регулятор), способное создавать в соответствии с алгоритмом управляющее воздействие на *объект управления* (регулирования). Объект управления (ОУ) и автоматический регулятор (АР), взаимодействие которых приводит к выполнению поставленной цели управления, образуют *систему автоматического управления* (САУ).

Совокупность предписаний, по которым формируются управляющее воздействие, называется законом или алгоритмом САУ.

В САУ используются два способа формирования управляющих воздействий: по отклонению регулируемой величины от заданного значения (*по отклонению*); по возмущающему воздействию (*по возмущению*). На рис. 1.1 показана структурная схема САУ по отклонению.

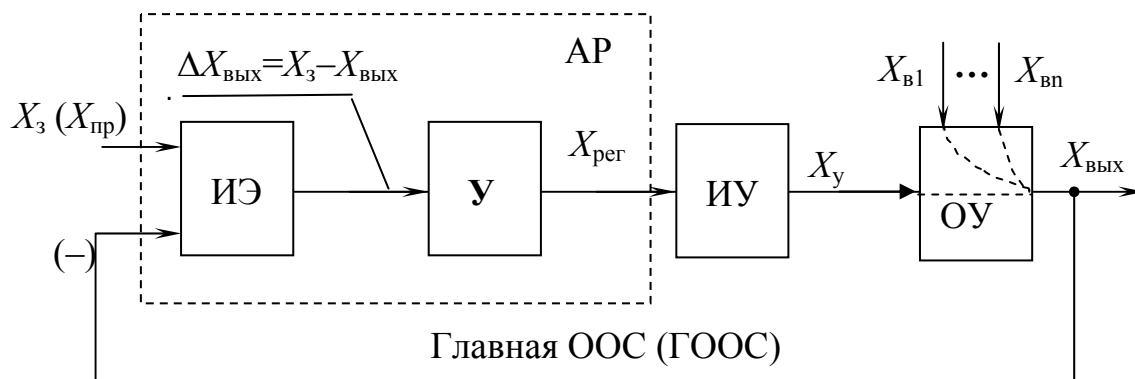


Рисунок 1.1 – Структурная схема САУ по отклонению.

На рис. 1.1 стрелками показано направление прохождений воздействий. На вход АР поступает информация о заданном (предписанном) значении регулируемой величины X_3 ($X_{пр}$) и по цепи главной отрицательной обратной связи (ГООС) информация об истинном значении регулируемой величины $X_{вых}$. В измерительном элементе ИЭ эти значения алгебраически суммируются. В результате определяется величина и знак рассогласования $\Delta X_{вых} = X_3 - X_{вых}$.

Сигнал $\Delta X_{вых}$ усилителем У усиливается и преобразуется в выходное воздействие регулятора $X_{рег}$. Это воздействие поступает в исполнительное устройство ИУ где преобразуется в управляющее воздействие X_y .

Рассмотренная САУ имеет особенности: односторонняя циркуляция воздействий в замкнутом контуре САУ, поэтому ее называют замкнутой; реакция на любой вид рассогласования, что делает ее универсальной.

В зависимости от конструкции замкнутой САУ рассогласование в установившемся состоянии может быть нулевым ($\Delta X_{\text{ВЫХ}}=0$), либо зависеть от возмущающего воздействия, возрастая с его увеличением. В первом случае САУ будет *астатической*, во втором – *статической по точности*, т.е. обладающей статической погрешностью (ошибкой).

В зависимости от характера задания X_3 различают следующие САУ: *стабилизации* значения $X_{\text{ВЫХ}}$, если $X_3 = \text{const}$;

регулирующая по программе, если X_3 есть заданная функция времени;

следящая, если X_3 изменяется во времени произвольно (регулируемая величина «следит» за изменением X_3);

самонастраивающаяся (адаптивная), в которой значение X_3 вырабатывается в самой САУ для получения оптимальных условий функционирования объекта регулирования.

Принцип формирования управляющего воздействия по возмущению показан на рис. 1.2.

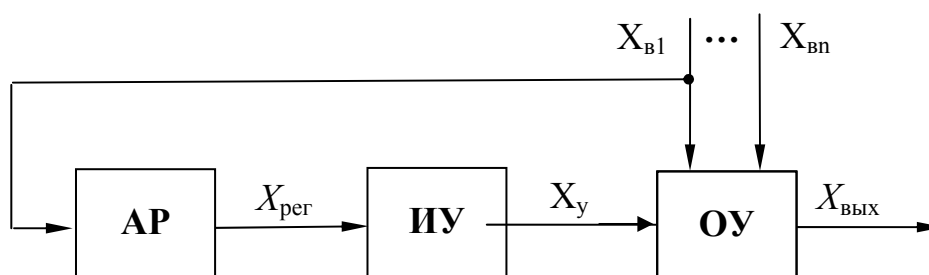


Рисунок 1.2 – Структурная схема САУ по возмущению

Особенностями САУ на рис. 1.2 следующие:

– реакция только на один вид возмущающего воздействия, что лишает ее универсальности;

– отсутствие ГООС по $X_{\text{ВЫХ}}$, т.е. регулятор не получает информации о результатах своих действий, поэтому система разомкнута. Такая система будет устойчива во всех режимах работы и вопрос об устойчивости САУ отсутствует.

– реакция на возмущающее воздействие одновременно с его появлением, что повышает быстродействие САУ;

– необходимость для обеспечения требуемого качества регулирования точного знания законов передачи воздействий $X_{\text{В1}}$ и X_y на выход объекта.

Быстродействие и отсутствие проблемы устойчивости – достоинство САУ по возмущению, недостаток – не реагирование на другие возмущающие воздействия и отсутствие информации о результатах регулирования.

На практике находят применение комбинированные САУ, сочетающие преимущества САУ по отклонению и возмущению.

В электроэнергетике в определенных случаях в закон регулирования по возмущению вводятся производные возмущающих воздействий.

Регулирующее воздействие по возмущению в комбинированных САУ вводится либо в исполнительное устройство (рис. 1.3), либо суммирующий усилитель регулятора по отклонению.

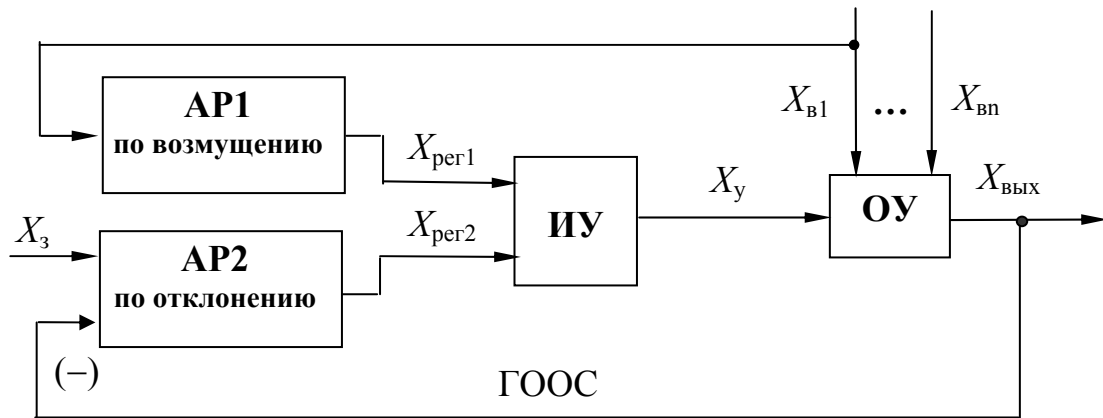


Рисунок 1.3 – Структурная схема комбинированной САУ.

1.2 Общие сведения о математическом описании САУ.

Системы автоматического управления являются динамическими объектами, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями, связывающими значения регулируемых величин со значениями управляющих и возмущающих воздействий.

По виду характеристик элементов различают *линейные и нелинейные САУ*, а по характеру управляющих воздействий *непрерывного и дискретного действия* (релейные и импульсные).

Теория автоматического управления основана на теории линейных САУ непрерывного действия, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, имеющих общее решение.

САУ с нелинейными элементами приводят к линейным путем замены нелинейных характеристик касательными к ним в окрестности точек, соответствующих принятому исходному состоянию САУ. Если характеристики заданы аналитически, то линеаризация, осуществляется разложением этих функций в ряд Тейлора с отбрасыванием начального значения и членов ряда выше первого порядка.

При решении задач анализа и синтеза систем управления ее дифференциальное уравнение n – порядка разбивается на отдельные части, математическая зависимость между входными и выходными величинами которых дифференциальными уравнениями не выше второго порядка. Такие искусственно выделенные части называются элементарными динамическими звеньями. Использование этих звеньев позволяет при анализе и синтезе САУ все многообразие элементов свести к нескольким динамическим типовым звеньям.

В общем случае дифференциальное уравнение типового звена имеет вид:

$$a_0 \frac{d^2 x_{\text{ex}}(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_{\text{ex}}(t)}{dt} + a_2 x_{\text{ex}}(t) = b_0 \frac{d^2 x_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} + b_2 x_{\text{вых}}(t) \quad ,$$

где $x_{\text{ex}}(t), x_{\text{вых}}(t)$ – входное и выходное воздействия; $a_0 \div a_2, b_0 \div b_2$ – постоянные коэффициенты.

Для записи дифференциального уравнения в алгебраическом используется преобразование Лапласа. Новое уравнение получается путем замены знака $\frac{d}{dt}$ оператором дифференцирования p и оригинала $x(t)$ на изображение $X(p)$. Такая замена позволяет получить следующие соотношения:

$$\frac{dx(t)}{dt} = pX(p); \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = p^2X(p); \quad \int x(t)dt = \frac{X(p)}{p}.$$

Выполним соответствующие замены, тогда общее уравнение динамического звена приобретет иметь вид:

$$a_0p^2X_{\text{ex}}(p) + a_1pX_{\text{ex}}(p) + a_2X_{\text{ex}}(p) = b_0X_{\text{вых}}(p) + b_1pX_{\text{вых}}(p) + b_2X_{\text{вых}}(p),$$

или

$$D(p)X_{\text{вых}}(p) = K(p)X_{\text{ex}}(p),$$

где $D(p)$ – *характеристический оператор* или характеристический полином;
 $K(p)$ – *оператор воздействия* или полином воздействия.

Алгебраическое уравнение:

$$D(p) = 0,$$

является характеристическим. Его корни определяют решение дифференциального уравнения без правой части, т.е. свободное движение (свободную составляющую переходного процесса).

Отношение изображений выходного сигнала $X_{\text{вых}}(p)$ к изображению входного $X_{\text{ex}}(p)$ при нулевых начальных условиях называется передаточной функцией звена:

$$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{ex}}(p)} = \frac{K(p)}{D(p)}.$$

При $p=0$ решение дифференциального уравнения определяет установившейся режим. В этом режиме передаточная функция преобразуется в коэффициент передачи звена или системы в установившемся режиме:

$$k_{\infty} = W(0) = \frac{K(0)}{D(0)}, \quad \text{а сигнал на выходе звена равен } x_{\text{вых}}(t = \infty) = k_{\infty}x_{\text{ex}},$$

где $k_{\infty} = \frac{a_2}{b_2}$ – определяется после подстановки в полиномы $K(p)$ и $D(p)$ вместо оператора дифференцирования p числа ноль.

Характеристики элемента САУ подразделяются на статическую и динамические. Первая дает зависимость $x_{\text{вых}}$ от x_{ex} в установившихся режимах. Вторые определяют поведение элемента в переходном процессе и могут быть временными и частотными.

Временная характеристика дает зависимость $x_{\text{вых}}(t)$ при подаче на вход скачкообразного воздействия:

$$x_{\text{ex}} = \text{const}.$$

При единичном входном сигнале $x_{\text{ex}}=1$:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

эта характеристика называется переходной.

Для получения частотных характеристик, рассматриваются установившейся режим при синусоидальном входном воздействии (гармоническое воздействие):

$$x_{\text{ex}}(t) = A \cdot \sin(\omega t).$$

с постоянной амплитудой A и разными значениями частоты входного сигнала в диапазоне от 0 до ∞ .

Переход к частотной передаточной функции элемента в алгебраическом или показательном виде осуществляется заменой оператора p на $j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{x_{\text{вых}}(j\omega)}{x_{\text{ex}}(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}.$$

Приведенные соотношения позволяют получить пять частотных характеристик.

Амплитудно-фазо-частотная характеристика (АФЧХ):

$$W(j\omega) = \frac{x_{\text{вых}}(j\omega)}{x_{\text{ex}}(j\omega)}.$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{A_{\text{вых}}(\omega)}{A_{\text{ex}}} = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}.$$

Фазо-частотная характеристику (ФЧХ):

$$\phi(\omega) = \text{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

Вещественная частотная характеристика $U(\omega)$ - действительная часть $W(j\omega)$.

Мнимая частотная характеристика $V(\omega)$ - мнимая часть $W(j\omega)$.

Между переходной и частотными характеристиками существует однозначная математическая зависимость. Поэтому частотные характеристики в той же мере отражают динамические свойства САУ или звена, что и передаточная функция. Смысл частотных характеристик – в замене сложного анализа переходных процессов простим анализом установившихся режимов при синусоидальных воздействиях.

1.3 Типовые линейные звенья САУ

Типовые звенья используются при алгоритмическом представлении системы автоматического управления. Имеется восемь типовых звеньев: пропорциональное, аperiodическое (инерционное первого порядка), колебательное (инерционное звено второго порядка), консервативное, реальное дифференцирующее, идеальное дифференцирующее, интегрирующее и запаздывающее.

Пропорциональное (*усилительное, безинерционное*) звено имеет один параметр k – коэффициент передачи

В усилительном звене выходная величина в каждый момент времени пропорциональна входной:

$$x_{\text{вых}}(t) = k x_{\text{вх}}(t).$$

Представим это уравнение в операторной форме $X_{\text{вых}}(p) = k X_{\text{вх}}(p)$. Согласно определению передаточной функции получим:

$$W(p) = X_{\text{вых}}(p) / X_{\text{вх}}(p) = k.$$

При подаче на вход пропорционального звена единичного сигнала (рис. 1.4, а) на выходе получим сигнал отличающийся от входного на величину коэффициента передачи k (рис. 1.4, б). Характеристика на рис. 1.4, б является переходной.

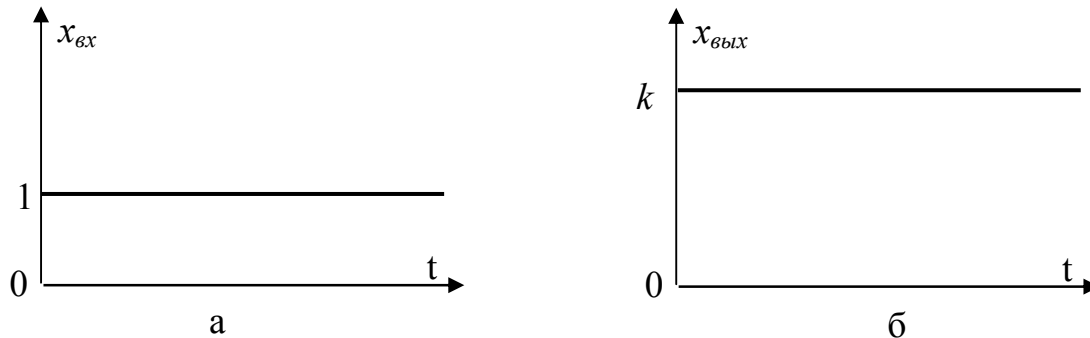


Рисунок 1.4 – Сигналы на входе (а) и выходе (б) пропорционального звена

На структурной схеме пропорциональное звено изображается в виде прямоугольника, внутри которого указана передаточная функция (рис. 1.5).

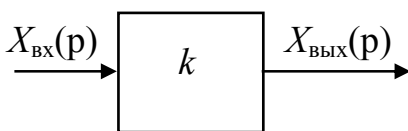


Рисунок 1.5 – Обозначение звена в структурной схеме

Примеры реального элемента САУ, который может быть представлен в структурной схеме пропорциональным звеном может служить усилитель напряжения с коэффициентом усиления K_y , резистивный делитель напряжения на рис. 1.6.

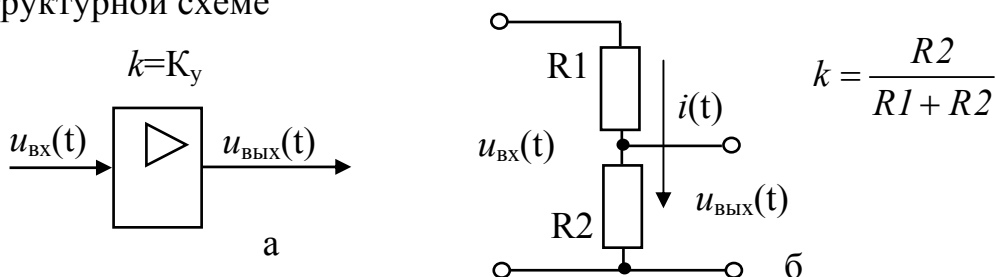


Рисунок 1.6 – Физическая реализация пропорционального звена : а – усилитель напряжения, б – резистивный делитель напряжения

Пример 1.1. Для схемы на рис 1.6,б определить передаточную функцию.

Для этого найдем ток i , приняв допущение, что сопротивление нагрузки равно бесконечности и зависимость токов и напряжений от времени не указываем:

$$i = \frac{u_{\text{ex}}}{R1 + R2}.$$

Напряжение на выходе:

$$u_{\text{вых}} = i \cdot R2.$$

Заменим ток его выражением. В результате получим уравнение связывающее входной и выходной сигналы:

$$u_{\text{ex}} = \frac{u_{\text{вых}}}{R1 + R2} R2$$

Запишем полученное уравнение в операторной форме:

$$U_{\text{ex}}(p) = \frac{R2}{R1 + R2} U_{\text{вых}}(p).$$

В соответствии с определением передаточной функции имеем:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{ex}}(p)} = \frac{R2}{R1 + R2}.$$

Апериодическое звено (инерционное звено первого порядка) имеет два параметра: T – постоянную времени, k – коэффициент передачи. Оно описывается дифференциальным уравнением:

$$T \frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} + x_{\text{вых}}(t) = k \cdot x_{\text{ex}}(t).$$

После использования преобразования Лапласа имеем:

$$TpX_{\text{вых}}(p) + X_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{ex}}(p) \quad \text{или} \quad X_{\text{вых}}(p)(Tp + 1) = kX_{\text{ex}}(p).$$

Согласно определению получим следующую передаточную функцию

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$$

Переходная характеристика звена определяется следующими соотношениями.

При единичном входном сигнале $x_{\text{вх}}=1$:

$$x_{\text{вых}}(t) = k \cdot (1 - e^{-t/T}).$$

При любом сигнале $x_{\text{вх}}$:

$$x_{\text{вых}}(t) = k x_{\text{ex}}(1 - e^{-t/T}).$$

При $t=T$ получим $x_{\text{вых}}=k \cdot x_{\text{вх}}(1 - e^{-1}) = 0,632 \cdot k \cdot x_{\text{вх}}$.

Время регулирования это время, в течении которого $x_{\text{вых}}=0,95 x_{\text{вх}}$. Для апериодического звена оно равно трем постоянным времени $t_{\text{рег}}=3 \cdot T$.

Изображение звена в структурной схеме САУ и его переходная характеристика показана на рис. 1.7.

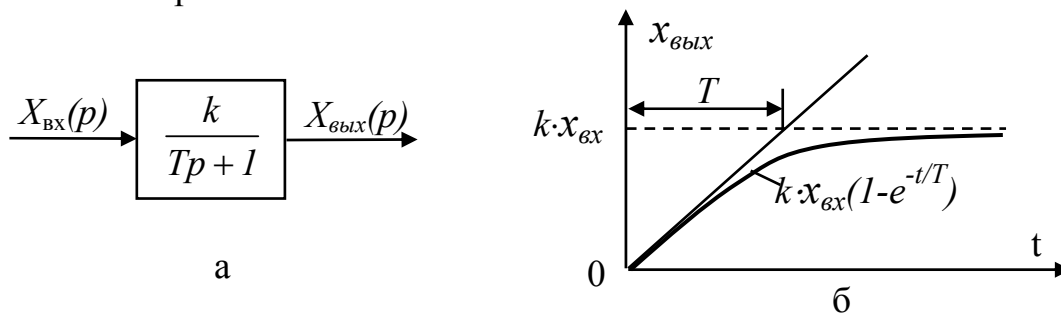


Рисунок 1.7 – Апериодическое звено :

а – изображение звена в структурной схеме, б – переходная характеристика

Пример 1.2

Для схемы электрической цепи на рис. 1.8 определить передаточную функцию и построить переходную характеристику для следующих данных:

$$u_{\text{вх}}=10\text{В}; \quad R1=5\text{кОм}; \quad R2=5\text{кОм}; \quad C=100\text{мкФ}.$$

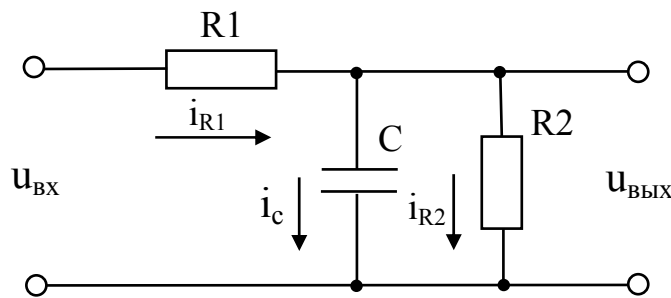


Рисунок 1.8 – Схема электрической сети

По второму закону Кирхгофа можно составить следующую систему уравнений (зависимость тока и напряжения от времени не указана):

$$\begin{cases} u_{\text{вх}} = i_{R1} R1 + u_{\text{вых}}, & (1.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{\text{вых}} = \frac{1}{C} \int i_C dt, & (1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{\text{вых}} = i_{R2} R2. & (1.3) \end{cases}$$

Из (1.2) найдем ток i_C путем дифференцирования обеих частей уравнения:

$$\frac{du_{\text{вых}}}{dt} = \frac{i_C}{C}, \quad \text{откуда} \quad i_C = C \frac{du_{\text{вых}}}{dt}.$$

Из (1.3) определим ток через резистор $R2$:

$$i_{R2} = \frac{u_{\text{вых}}}{R2}.$$

В соответствии с первым законом Кирхгофа получим:

$$i_{R1} = i_c + i_{R2} = C \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + \frac{u_{\text{вых}}}{R2}$$

Полученное выражение подставим вместо i_{R1} в (1.1):

$$u_{\text{вх}} = RIC \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + RI \frac{u_{\text{вых}}}{R2} + U_{\text{вых}}.$$

Первая цель достигнута: получено дифференциальное уравнение, связывающее между собой входной и выходной сигналы $u_{\text{вх}}(t)$ и $u_{\text{вых}}(t)$.

Запишем полученное дифференциальное уравнение в операторной форме:

$$U_{\text{вх}}(p) = RIC \cdot p \cdot U_{\text{вых}}(p) + \frac{RI}{R2} \cdot U_{\text{вых}}(p) + U_{\text{вых}}(p).$$

Согласно определению передаточной функции имеем:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{RIC \cdot p + \frac{RI}{R2} + 1}$$

В знаменателе вынесем за скобки $\frac{RI}{R2} + 1 = \frac{RI + R2}{R2}$ в результате получим:

$$W(p) = \frac{1}{\frac{RI + R2}{R2} \cdot \left(\frac{R2}{RI + R2} \cdot RIC + 1 \right)}$$

Разделим числитель и знаменатель выражения на $\frac{RI + R2}{R2}$:

$$W(p) = \frac{\frac{R2}{RI + R2}}{\frac{R2}{RI + R2} RIC \cdot p + 1}.$$

Полученное выражение соответствует передаточной функции апериодического звена :

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}.$$

Следовательно, параметры передаточной функции через параметры схемы электрической цепи определяются по следующим формулам (достигнута вторая цель):

$$k = \frac{R2}{RI + R2} \text{ и } T = \frac{R2}{RI + R2} RIC = k \cdot RI \cdot C$$

Для построения переходной характеристики выполним ряд вычислений:

$$k = \frac{R2}{R1 + R2} = \frac{5}{5 + 5} = 0,5 \quad T = K \cdot R1 \cdot C = 0,5 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0,25c.$$

Для построения переходной характеристики выполним вычисление $U_{\text{вых}}$.

Начальное $U_{\text{вых}}(t=0)=0$ и установившееся $U_{\text{вых}}(t=\infty)=kU_{\text{вх}}=0,5 \cdot 10 = 5B$.

При $t=T=0,25c$ получим $U_{\text{вых}} = 0,632 \cdot k \cdot U_{\text{вх}} = 0,632 \cdot 0,5 \cdot 10 = 3,16B$.

При $t=3T=0,75c$ получим $U_{\text{вых}} = 0,95 \cdot k \cdot U_{\text{вх}} = 0,95 \cdot 0,5 \cdot 10 = 4,75B$.

Переходная характеристика, согласно выполненным расчетам выходных сигналов, приведена на рис. 1.9 (достигнута третья цель):

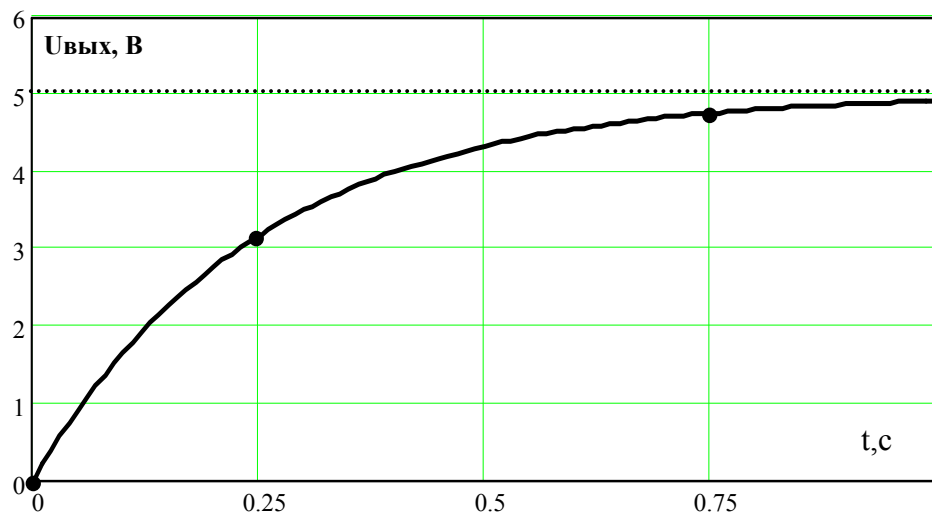


Рисунок- 1.9 – Переходная характеристика схемы на рис. 1.8

Инерционное звено второго порядка (колебательное звено) имеет три параметра: две постоянных времени T_1 и T_2 и коэффициент передачи k .

Дифференциальное уравнение звена:

$$T_2^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} + x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}}(t)$$

После преобразований получим передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$$

Характер переходного процесса зависит от соотношения постоянных времени:

При $\frac{T_1}{T_2} \geq 2$ – апериодический, а при $\frac{T_1}{T_2} < 2$ – колебательный.

Причем чем больше T_1 и меньше T_2 , тем больше степень затухания колебаний на выходе звена. Колебательное звено при $T_1=0$ вырождается в консервативное, а при $T_2=0$ – в апериодическое.

Изображение звена в структурной схеме САУ и его переходная характеристика приведены на рис. 1.10. Переходные характеристики на рис. 1.10 построены при следующих условиях: $k=2,2$; $x_{вх}=1$, соотношения T_1/T_2 указано на рис. 1.10.

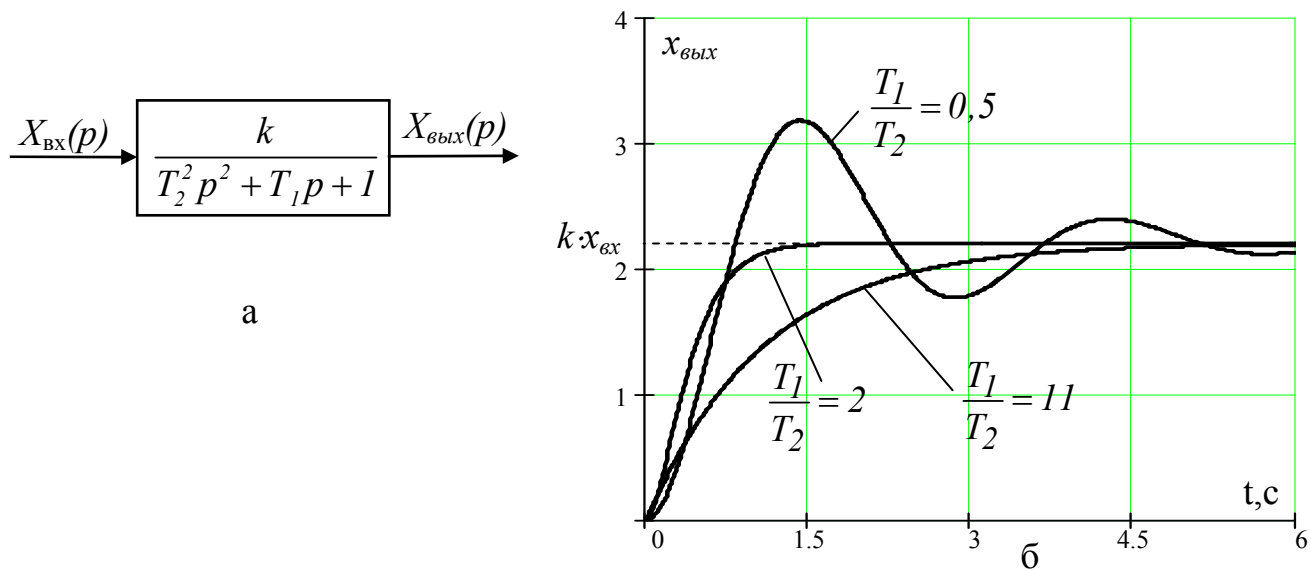


Рисунок 1.10 – Инерционное звено второго порядка:
а – обозначение в структурной схеме САУ, б – переходная характеристика

Переходная характеристика звена определяется соотношением:

$$x_{вых}(t) = kx_{вх} \left(1 - \frac{1}{\Omega_0 T_2} e^{-\alpha t} \sin(\Omega_0 t + \varphi) \right),$$

где: $\varepsilon = T_1 / (2T_2)$ – относительный коэффициент затухания; $\varphi = \arccos(\varepsilon)$ – начальная фаза колебаний; $\alpha = T_1 / (2T_2^2)$ – декремент затухания; $\Omega_0 = \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{T_2}$ – частота свободных колебаний.

При колебательном переходном процессе огибающая амплитуд:

$$kx_{вх} (1 - e^{-\alpha t})$$

На рис. 1.11 приведена реализация колебательного звена при помощи RLC – схемы.

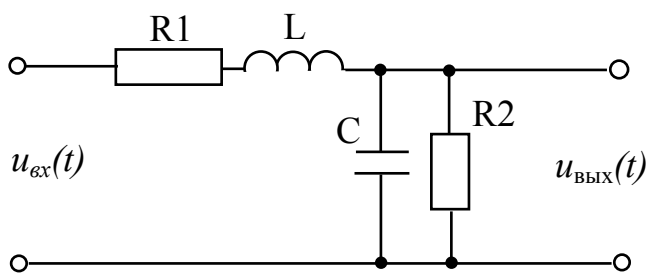


Рисунок 1.11 – Электрическая схема, реализующая колебательное звено

Расчет параметров колебательного звена для схемы на рис. 1.11 выполняется по следующим соотношениям:

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$T_1 = k \left(\frac{L}{R_2} + R_1 \cdot C \right), \quad T_2 = \sqrt{L \cdot C}.$$

Консервативное звено имеет два параметра : постоянную времени T_2 , коэффициент передачи k и описывается дифференциальным уравнением:

$$T_2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}(t)}{d^2 t} + x_{\text{вых}}(t) = k x_{\text{вх}}(t).$$

Ему соответствует передаточная функция:

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + 1}.$$

Консервативное звено идеально. Оно не имеет демпфирования (потерь энергии), поэтому после подачи на его вход любого по величине сигнала $x_{\text{вх}} = \text{const}$ на выходе появляются незатухающие колебания с одинаковой амплитудой и частотой:

$$\omega_0 = \frac{1}{T_2}. \text{ Период этих колебаний } T_0 = 2\pi T_2.$$

Переходная характеристика звена показана на рис. 1.12,б. Характеристика построена при следующих параметрах $k=2,2$; $x_{\text{вх}}=1$; $T_2=0,2$ с. Переходная характеристика описывается следующим соотношением :

$$x_{\text{вых}}(t) = k x_{\text{вх}} \left(1 - \cos \left(\frac{t}{T_2} \right) \right)$$

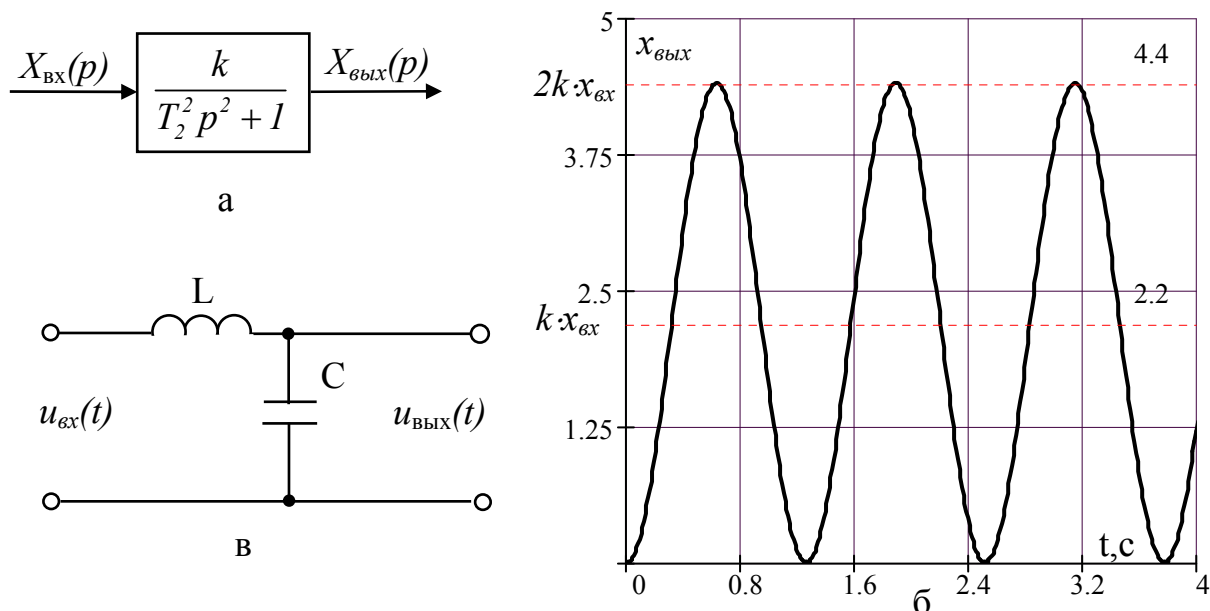


Рисунок 1.12 – Консервативное звено: а – обозначение в структурной схеме САУ, б – переходная характеристика, в – реализация в виде LC – схемы

Звено называется консервативным, поскольку оно сохраняет постоянство амплитуды выходного сигнала (рис. 1.12,б).

Реальное дифференцирующее звено имеет два параметра T и k .

Дифференциальное уравнение этого звена имеет вид:

$$T \frac{dx_{\text{вблх}}(t)}{dt} + x_{\text{вблх}}(t) = kT \frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt}.$$

Этому уравнению соответствует передаточная функция:

$$W(p) = \frac{kTp}{Tp + 1}.$$

Переходная характеристика звена определяется следующим соотношением:

$$x_{\text{вблх}}(t) = kT x_{\text{вх}} e^{-t/T}.$$

При $t=T$ получим $x_{\text{вблх}}(t) = kT x_{\text{вх}} e^{-1} = kT \cdot 0,368 \cdot x_{\text{вх}}$.

На рис. 1.13 показано обозначение звена в структурной схеме САУ, его переходная характеристика и пример физической реализации.

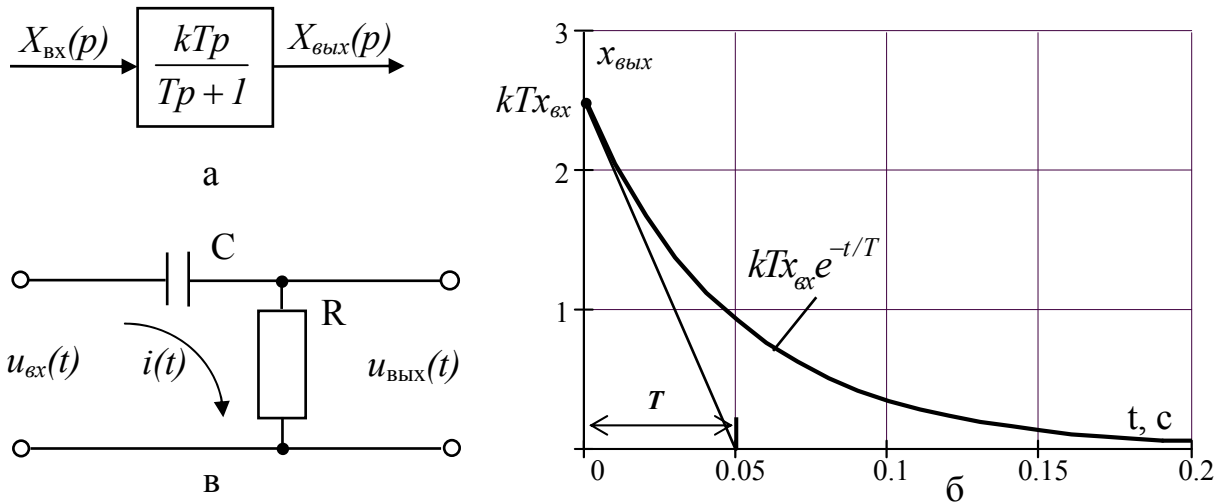


Рисунок 1.13 – Реальное дифференцирующее звено: а – обозначение, б – переходная характеристика, в – реализация в виде RC – схемы

Из характеристики рис. 1.13,б следует, чем больше коэффициент передачи k и меньше постоянная времени T тем ближе реальное дифференцирующее звено приближается к идеальному. Чем больше постоянная времени звена, тем ближе оно к усилительному (пропорциональному). При $T=\infty$ оно превращается в усилительное.

Пример 1.3. Определить передаточную функцию схемы на рис. 1.13,в и получить соотношения для расчета ее параметров.

Для схемы на рис. 1.13 при помощи второго закона Кирхгофа составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u_{\text{вх}} = \frac{1}{C} \int i \cdot dt + u_{\text{вблх}}, & (1.4) \\ u_{\text{вблх}} = i \cdot R. & (1.5) \end{cases}$$

Продифференцируем уравнение (1.4) и найдем из него ток схемы:

$$\frac{du_{ex}}{dt} = \frac{i}{C} + \frac{du_{вых}}{dt} \quad (1.6)$$

Из (1.5) определим ток:

$$i = \frac{u_{вых}}{R}.$$

Подставим это выражение в (1.6). В результате после преобразований получим дифференциальное уравнение, связывающее входное и выходное напряжение:

$$RC \frac{du_{ex}}{dt} = RC \frac{du_{вых}}{dt} + u_{вых}.$$

Преобразуем это дифференциальное уравнение в операторное:

$$RCpU_{ex}(p) = RCpU_{вых}(p) + U_{вых}(p).$$

Согласно определению передаточной функции имеем:

$$W(p) = \frac{RCp}{RCp + 1}.$$

Сравним полученное выражение с передаточной функцией реального дифференцирующего звена. Следовательно параметры передаточной функции через параметры схемы электрической цепи определяются по следующими соотношениями:

$$k = 1, \quad T = RC.$$

Идеальное дифференцирующее звено имеет один параметр k и описывается дифференциальным уравнением:

$$x_{вых}(t) = k \frac{dx_{ex}(t)}{dt}.$$

Передаточная функция: $W(p) = kp.$

На рис. 1.14 показано обозначение звена в структурной схеме САУ, его переходная характеристика.

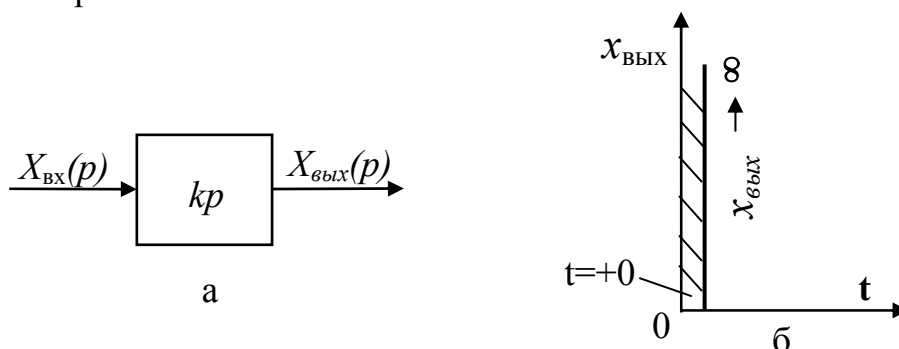


Рисунок 1.14 – Идеальное дифференцирующее звено:
а – обозначение в структурной схеме, б – переходная характеристика

Идеальное дифференцирующее звено это математическая абстракция, поскольку не один реальный элемент не может дать импульс с бесконечно большой амплитудой.

Интегрирующее звено. Это звено имеет один параметр k . Сигнал на выходе интегрирующего звена в каждый момент времени пропорционален интегралу входного сигнала:

$$x_{\text{вх}}(t) = k \int x_{\text{вых}}(t) dt$$

Продифференцировав обе части этого уравнения получим уравнения интегрирующего звена:

$$\frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} = kx_{\text{вх}}(t).$$

Применив преобразование Лапласа к дифференциальному уравнению звена, получим передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{k}{p}.$$

Переходная характеристика представляет собой отрезок прямой выходящий из начала координат под углом $\alpha = \text{arctg}(k \cdot x_{\text{вх}})$. В интегрирующем звене нет определенного соотношения между установившимися значениями входной и выходной величинами. При постоянном значении входной величины выходная величина непрерывно растет с постоянной скоростью. После отключения $x_{\text{вх}}$ в момент времени t_1 значение $x_{\text{вых}}$ сохраняется равным $x_{\text{вых}}(t_1)$. Следовательно интегрирующее звено обладает безразличным равновесием, характеризуемым термином астатичность. Такое звено является необходимой принадлежностью астатических САУ. Переходные характеристики интегрирующего звена приведены на рис. 1.15.

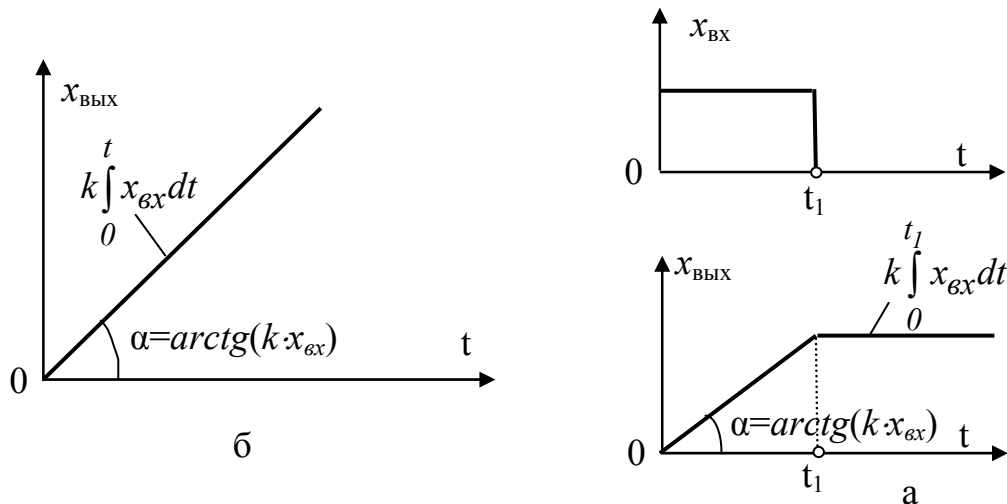


Рисунок 1.15 – Переходные характеристики интегрирующего звена:
а – при подаче на вход $x_{\text{вх}} = \text{const}$, б – при подаче на вход импульсного сигнала

Рассмотрим примеры практического выполнения интегрирующего звена на рис.1.16.

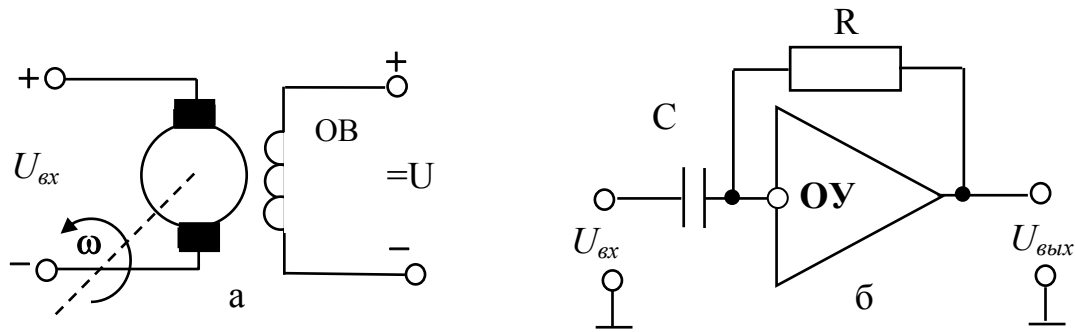


Рисунок 1.16 –Реализации интегрирующего звена:
а – электродвигатель, б – операционный усилитель

На рис. 1.16,а приведен электродвигатель с независимым возбуждением. Угол поворота вала при подаче на него $U_{вх} = \text{const}$ определяется соотношением:

$$\delta(t) = \int \omega dt = k \int U_{вх} \cdot dt ,$$

где δ – угол поворота вала двигателя.

На рис. 1.16,б приведен интегратор, выполненный на операционном усилителе (ОУ). Сигнал на выходе определяется соотношением:

$$U_{вых}(t) = -RC \frac{dU_{вх}(t)}{dt} .$$

В качестве интегрирующего звена можно рассматривать также идеальную индуктивность и емкость. Они описываются следующими дифференциальными уравнениями:

$$\text{индуктивность } e(t) = -L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad \text{емкость } i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} .$$

Запаздывающее звено.

Выходная величина в этом звене повторяет входную величину, но с некоторым запаздыванием τ :

$$x_{вых}(t) = x_{вх}(t - \tau) .$$

Динамическим параметром звена является величина запаздывания τ .

Передаточная функция звена:

$$W(p) = e^{-p\tau}$$

Запаздывающее звено воспроизводит $x_{вых}$ без изменения, но с опозданием на время τ . Устройства обладающие такой передаточной функцией: механические транспортеры сыпучих материалов, линии задержки, длинные линии без потерь, некоторые тепловые объекты и т.п.

Длинная линия без потерь длиной l нагруженная на согласованное сопротивление Z_H , при индуктивности L_0 и емкости C_0 на единицу длины имеет:

$$\tau = l \sqrt{L_0 C_0} .$$

Пусть транспортер сыпучих материалов имеет длину l и движется со скоростью v . Параметр запаздывающего звена в этом случае равен:

$$\tau = \frac{l}{v}$$

Временные диаграммы запаздывающего звена приведены на рис. 1.17.

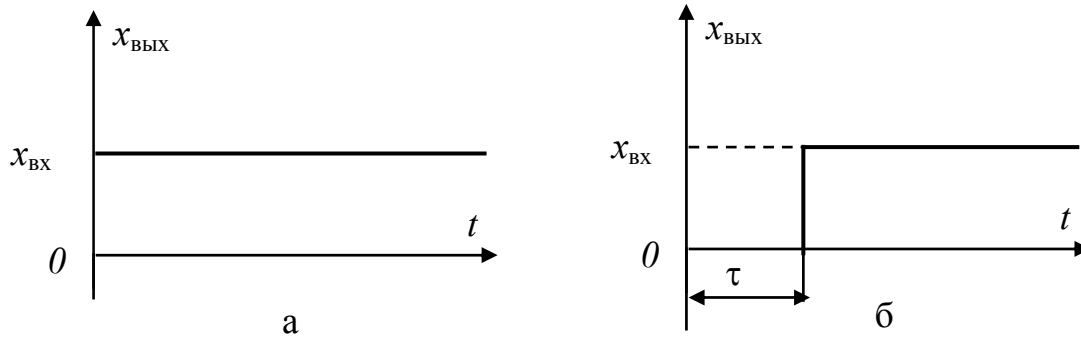


Рисунок 1.17 – Сигналы на входе (а) и выходе (б) запаздывающего звена

1.4 Интегро-дифференцирующее звено

Элементы САУ могут быть представлены несколькими типовыми звеньями. Рассмотрим в качестве примера интегро-дифференцирующее звено.

Дифференциальное уравнение звена:

$$T_u \frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} + x_{\text{вых}}(t) = kT_d \frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt} + x_{\text{вх}}(t).$$

Передаточная функция звена : $W(p) = k \frac{T_d p + 1}{T_u p + 1}$,

где T_u – постоянная времени интегрирования, T_d – постоянная времени дифференцирования.

Постоянная времени T_d определяет степень влияния на процесс производной $\frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt}$. Постоянная времени T_u , определяет инерционную составляющую переходного процесса.

Переходные характеристики звена при различных соотношениях параметров приведены на рис. 1.18.

Переходная характеристика звена определяется по соотношению:

$$x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}} \left(1 + \left(\frac{T_d}{T_u} - 1 \right) e^{-\frac{t}{T_u}} \right).$$

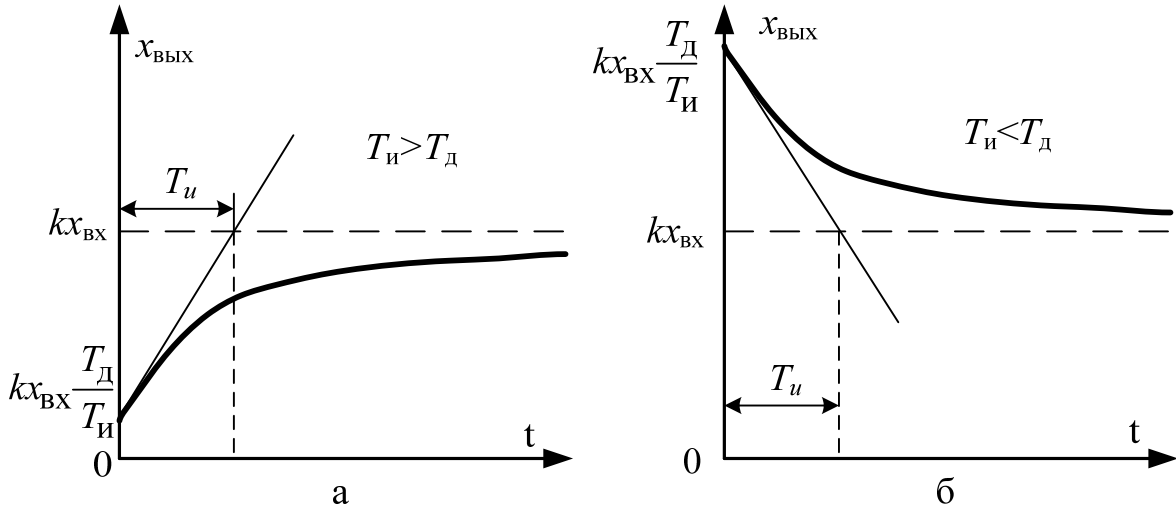


Рисунок 1.18 – Переходные характеристики интегро-дифференцирующего звена

Реализация интегро-дифференцирующего звена при помощи типовых звеньев показана на рис. 1.19. Верхнее звено в схеме рис 1.19,а представляет собой последовательное соединение звеньев апериодического и идеального дифференцирующего звеньев соответственно с передаточными функциями $W(p)=T_d p$ и $W(p)=k/(T_i p+1)$.

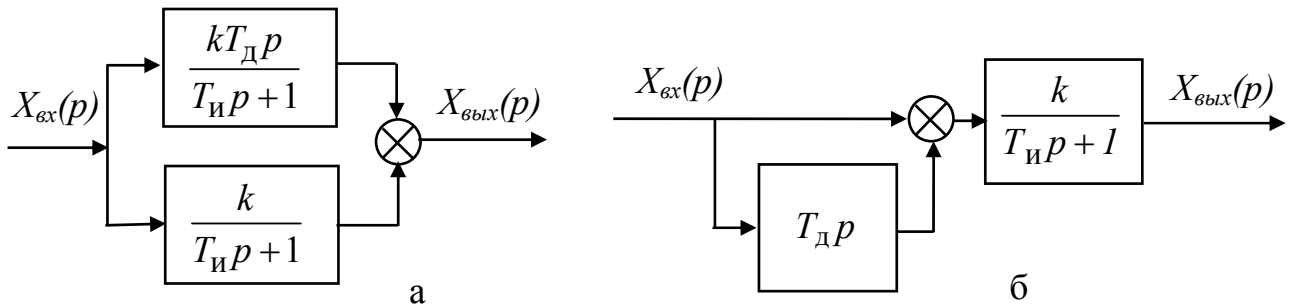


Рисунок 1.19 –Реализации интегро-дифференцирующего звена при помощи типовых звеньев: а - схема1, б – схема 2

Примеры реализации звена при помощи электрических схем приведены на рис. 1.20:

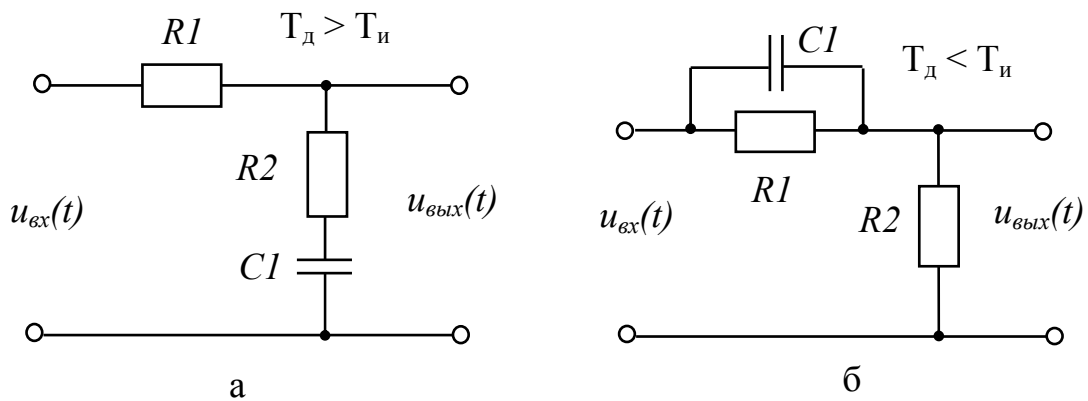


Рисунок 1.20 –Реализации интегро-дифференцирующего звена при помощи электрических схем: а – схема 1, б – схема 2

1.5 Структурные схемы и их преобразование

Структурной называется схема, отражающая математическое преобразование сигналов. Она является, по сути, графической иллюстрацией к уравнениям системы. Структурные схемы составляются для статических и динамических режимов и содержат следующие обозначения:

- звено обозначается прямоугольником, в котором записана математическая модель звена, например, в виде передаточной функции;
- сумматор обозначается кружком, разбитым на секторы, или кружком, в котором вписан знак плюс, т.е.



- входные и выходные величины обозначают в виде стрелок, а узлы разветвлений – в виде точек.

Целью преобразования структурной схемы обычно является получение уравнения системы, связывающего выходную и входные величины. При этом структурная схема постепенно упрощается путем замены соединений звеньев эквивалентными звеньями, передаточные функции которых находятся по определенным формулам. Вывод этих формул может быть произведен посредством совместного решения уравнений звеньев. Причем эквивалентность предполагает, что при одних и тех же входных величинах выходные так же одинаковы. В структурных схемах обычно встречаются три вида соединений: последовательное, параллельное и встречно–параллельное.

При *последовательном соединении* звеньев выходная величина предыдущего звена равна входной величине последующего звена (рис. 1.21).

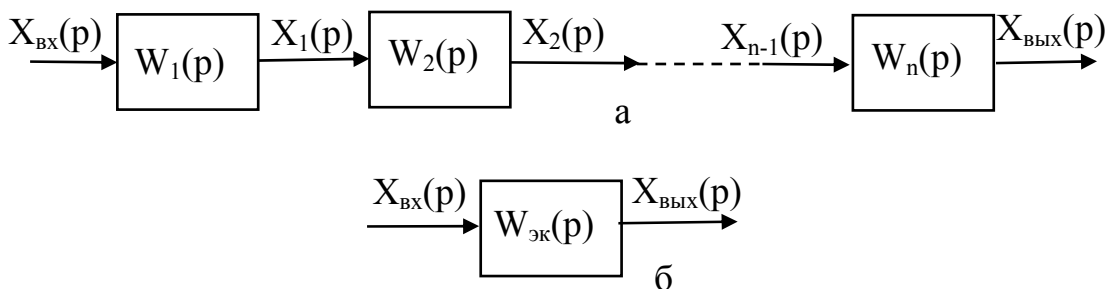


Рисунок 1.21 – Последовательное соединение звеньев:
а – исходная схема, б – эквивалентное звено

Последовательно соединенные звенья (рис. 1.21,а) заменяются одним эквивалентным звеном (рис 1.21,б). Передаточная функция эквивалентного звена равна произведению передаточных функций этих звеньев:

$$W_{\text{эк}}(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p),$$

При *параллельном соединении* входная величина одинакова для всех звеньев, а выходные величины алгебраически суммируются (рис. 1.22,а).

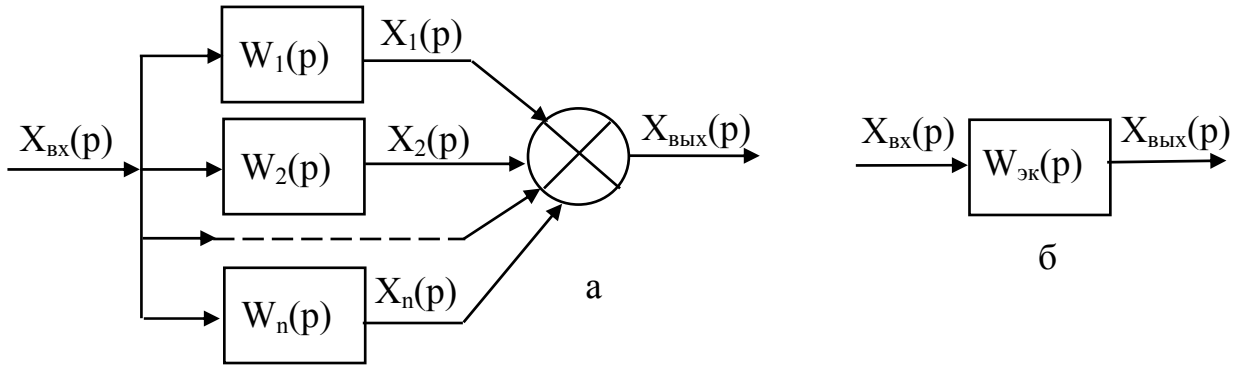


Рисунок 1.22 – Параллельное соединение звеньев:
а – исходная схема, б – эквивалентное звено

Эквивалентная передаточная функция параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций этих звеньев:

$$W_{\text{экв}}(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)$$

Встречно-параллельное это такое соединение звеньев – это такое соединение звеньев, в котором имеется звено обратной связи, звено, охваченное этой обратной связью и сумматор. Схема соединения звеньев приведена на рис. 1.23,а. Эта схема может быть заменена одним звеном с передаточной функцией $W_{\text{экв}}(p)$ (рис. 1.23,б)

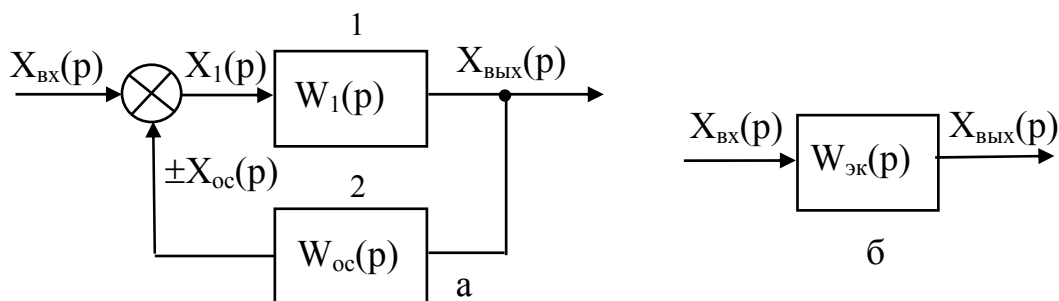


Рисунок 1.23 – Встречно-параллельное соединение звеньев:
а – исходная схема, б – эквивалентное звено

Звено 2 является звеном обратной связи. Обратные связи могут быть положительные и отрицательные. При отрицательной обратной связи воздействие поступающее на вход звена в прямом канале равно разности воздействий $X_{\text{ex}}(p)$ и обратной связи $X_{\text{oc}}(p)$, а при положительной обратной связи – их сумме:

$$X_1(p) = X_{\text{ex}}(p) \pm X_{\text{oc}}(p) = X_{\text{ex}}(p) \pm W_{\text{oc}}(p) \cdot X_{\text{вых}}(p), \quad (1.7)$$

где $X_{\text{oc}}(p) = W_{\text{oc}}(p) \cdot X_{\text{вых}}$ – сигнал на выходе звена обратной связи.
Сигнал на выходе первого звена:

$$X_{\text{вых}}(p) = W_1(p) \cdot X_1(p).$$

Подставим в это выражение для сигнала $\Delta X_{oc}(p)$ (1.7) и после преобразования определим передаточную функцию схемы:

$$W_{эк}(p) = \frac{X_{вых}(p)}{X_{вх}(p)} = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_{oc}(p)}, \quad (1.8)$$

где *минус* « \mp » соответствует положительной, а *плюс* « $+$ » – отрицательной обратной связи.

Если о канале обратной связи отсутствует какое либо звено, то такая связь будет единичной ($W_{oc}(p)=1$), то имеем:

$$W_{эк}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)}. \quad (1.9)$$

Выражение (1.8) или (1.9) используется для получения уравнений и передаточных функций замкнутых САУ. Обычно для обеспечения устойчивости САУ применяется отрицательная обратная связь. Она может быть жесткой (ЖОС) или гибкой (ГОС). На выходе ЖОС формируется сигнал, пропорциональный выходному сигналу элемента к которому она подключена. На выходе ГОС появляется сигнал пропорциональный первой производной входной величины элемента ГОС. Связь ЖОС действует как в установившемся, так и в переходном режиме.

Если ГОС, то отрицательная обратная связь проявляется только в переходных режимах. ЖОС обычно реализуется пропорциональным звеном, а ГОС – реальным дифференцирующим звеном.

Пример 1.4. Определить передаточную функцию схемы в виде интегрирующего звена охвачено отрицательной ЖОС на рис. 1.24 и ее параметры. Построить в одной и той же системе координат переходные характеристики исходного и эквивалентных звеньев.

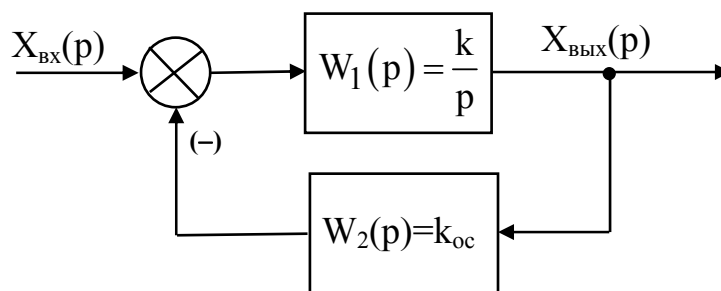


Рисунок 1.24 –Схема соединения звеньев

Звенья на рис. 1.24 соединены встречно-параллельно, поэтому эквивалентная передаточная функция равна:

$$W_{эк}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{\frac{k}{p}}{1 + \frac{k}{p}k_{oc}}.$$

Приведем выражение в знаменателе к общему знаменателю и после преобразований получим:

$$W_{ек}(p) = \frac{\frac{k}{p}}{\frac{p+k \cdot k_{oc}}{p}} = \frac{k}{p+k \cdot k_{oc}}.$$

Вынесем за скобки в знаменателе $k \cdot k_{oc}$ и разделим числитель и знаменатель на 'выражение:

$$W_{ек}(p) = \frac{\frac{1}{k_{oc}}}{\frac{1}{k \cdot k_{oc}} p + 1}.$$

Полученное выражение соответствует передаточной функции апериодического звена с параметрами:

$$\text{коэффициентом передачи } k_{ек} = \frac{1}{k_{oc}} \text{ и постоянной времени } T_{ек} = \frac{1}{k_{oc}k}.$$

Таким образом, использование ЖОС для интегрирующего звена преобразует его в апериодическое.

Построим переходные характеристики исходного и эквивалентного звена для следующих данных:

$$k_{oc} = 0,2; \quad k = 1 \text{ и } x_{вх} = 1 \text{ ое.}$$

Переходная характеристика исходного звена это прямая линия, выходящая из начала координат под углом:

$$\alpha = \arctg(k) = \arctg(1) = 45^\circ \text{ к оси времени } t.$$

Для построения переходной характеристики апериодического звена выполним следующие расчеты.

Параметры эквивалентного звена:

$$k_{ек} = \frac{1}{k_{oc}} = \frac{1}{0,2} = 5; \quad T_{ек} = \frac{1}{k_{oc}k} = \frac{1}{0,2 \cdot 1} = 5 \text{ с,}$$

Сигналы на выходе эквивалентного звена в разные моменты времени:

$$x_{вых}(t=0) = 0 \text{ ое; } \quad x_{вых}(t=\infty) = k_{экс} x_{вх} = 5 \cdot 1 = 5 \text{ ое; } \quad x_{вых}(t=T_{ек}) = 0,632 \cdot k_{экс} x_{вх} = 3,16 \text{ ое;}$$

при $t=3T=15 \text{ с}$ получим $x_{вых} = 0,95 \cdot k \cdot x_{вх} = 0,95 \cdot 5 = 4,75 \text{ ое.}$

С учетом выполненных расчетов переходные характеристики исходного и эквивалентного звеньев приведены на рис. 1.25.

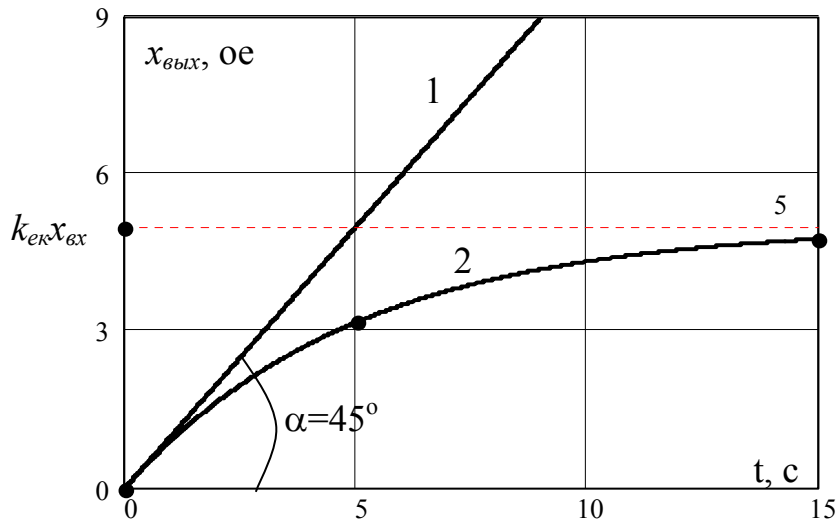


Рисунок 1.25 – Переходные характеристики звеньев:
1 – исходное, 2 – эквивалентное.

Пример 1.5. Найти эквивалентную передаточную функцию и ее параметры схемы соединения звеньев, когда аperiodическое звено охватывается жесткой отрицательной обратной связью. Схема соединения звеньев показана на рис. 1.26.

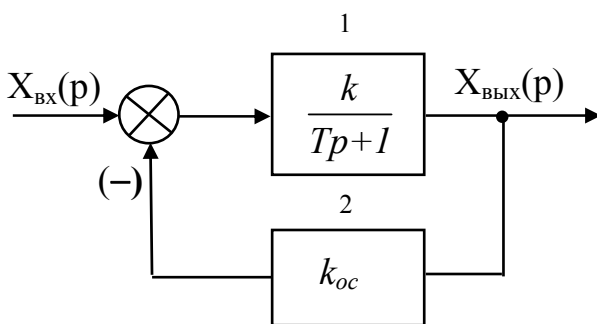


Рисунок 1.26 – Схема соединения звеньев

На схеме рис. 1.26 аperiodическое звено включено встречно-параллельно пропорциональному звену. Эквивалентная передаточная функция определяется по соотношению:

$$W_{ек}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{\frac{k}{Tp+1}}{1 + \frac{k}{Tp+1}k_{ок}}$$

После приведения к общему знаменателю и сокращения имеем:

$$W_{ек}(p) = \frac{k}{Tp+1+kk_{ок}}$$

Разделим числитель и знаменатель на $1+kk_{ок}$:

$$W_{ек}(p) = \frac{\frac{k}{1+kk_{ок}}}{\frac{T}{1+kk_{ок}}p+1}$$

Полученное выражение соответствует аperiodическому звену, поэтому параметры эквивалентной передаточной функции следующие:

$$k_{ек} = \frac{1}{1+kk_{ок}} \quad \text{и} \quad T_{ек} = \frac{T}{1+kk_{ок}}$$

Следовательно, охват ЖОС аperiodического звена изменяет его коэффициент передачи и постоянную времени. Тип звена остается прежним. Рассмотренные схемы соединения звеньев могут использоваться для коррекции САУ.

В практике встречаются структурные схемы САУ с перекрестными связями. Эти схемы при помощи правил переноса могут быть приведены к комбинации последовательного, параллельного и встречно-параллельного соединений звеньев. Общий принцип переноса заключается в том, что при преобразованиях входные и выходные величины должны быть неизменными. Такие преобразования являются эквивалентными. При этом передаточная функция САУ не изменяется и не зависит оттого, на сколько звеньев разбита система.

Перенос сумматора через звено.

По направлению передачи воздействия (рис. 1.27):

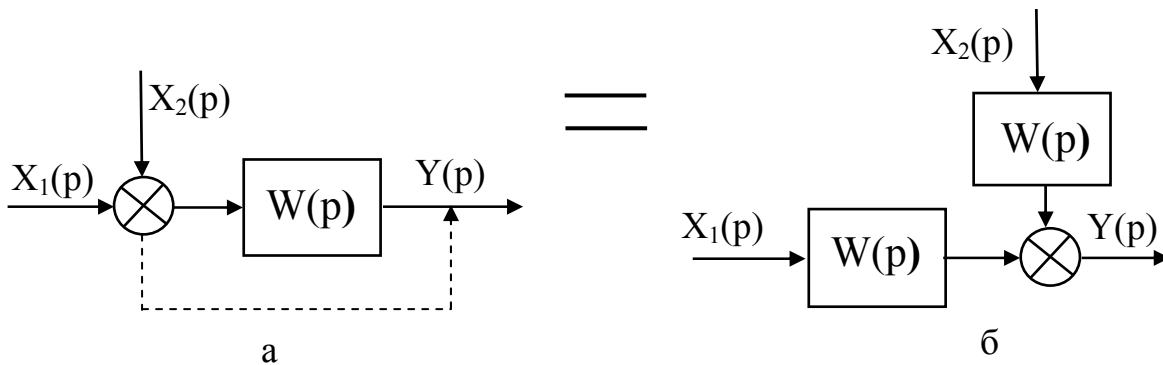


Рисунок 1.27 – Перенос сумматора со входа на выход:
а – исходная схема, б – преобразованная схема

При переносе на рис. 1.27 в подходящие к сумматору ветви включаются звенья с такими же передаточными функциями, что следует из равенства правых частей уравнений:

$$Y(p) = W(p)(X_1(p) + X_2(p)) = W(p)X_1(p) + W(p)X_2(p).$$

Против направления воздействия (рис. 1.28):

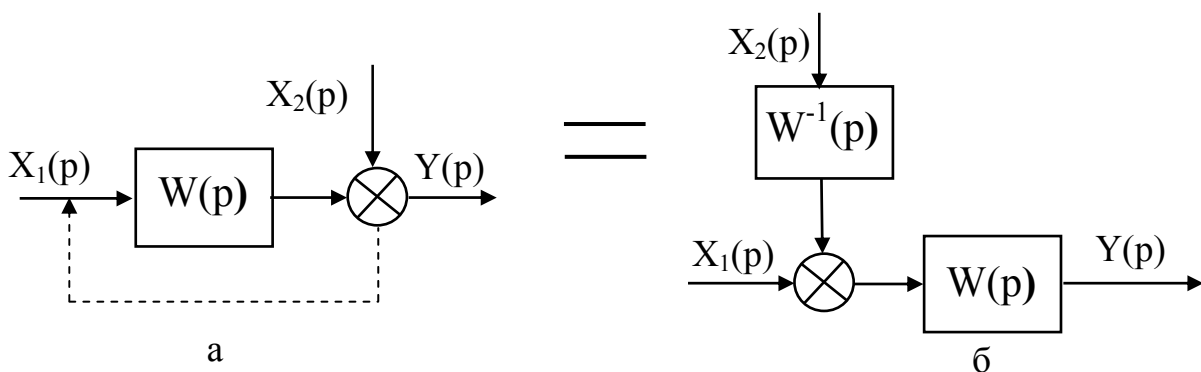


Рисунок 1.28 – Перенос сумматора с выхода на вход:
а – исходная схема, б – преобразованная схема

При этом в подходящие к сумматору звенья с включаются звенья с обратными передаточными функциями, что следует из равенства правых частей уравнений:

$$Y(p) = W(p)X_1(p) + X_2(p) = \left(X_1(p) + \frac{1}{W(p)}X_2(p) \right) W(p).$$

Перенос узла разветвления через звено.

По направлению передачи воздействия (рис. 1.29).

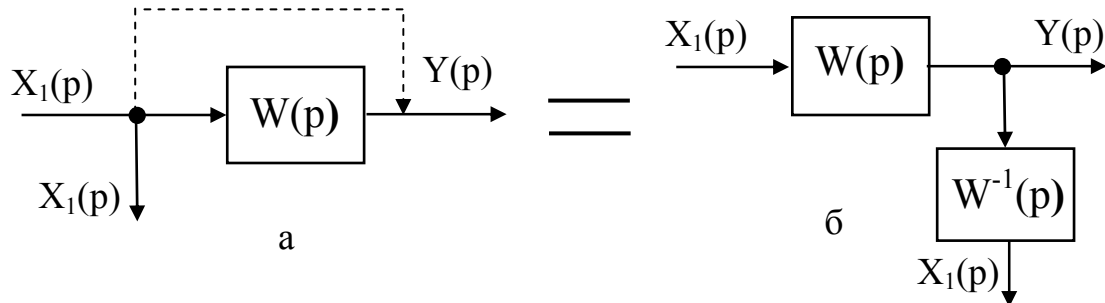


Рисунок 1.29 – Перенос узла разветвления со входа на выход:
а – исходная схема, б – преобразованная схема

При этом в отходящие от узла ветви включаются звенья с обратными передаточными функциями.

Против направления передачи воздействия (рис. 1.30).

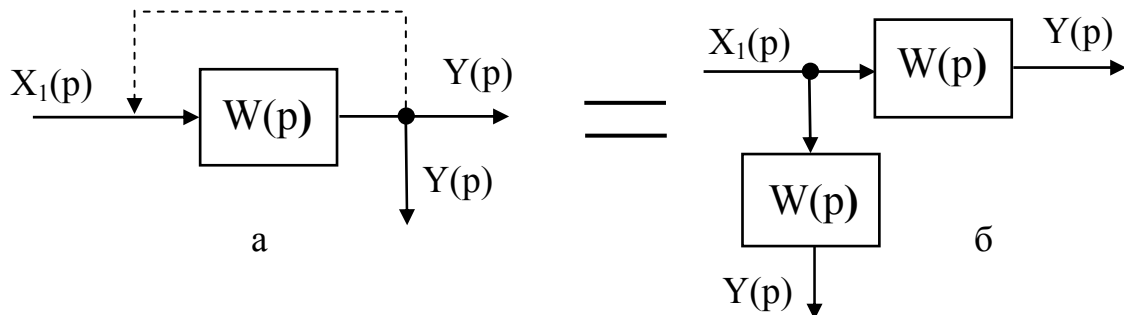


Рисунок 1.30 – Перенос узла разветвления со выхода на вход:
а – исходная схема, б – преобразованная схема

При таком преобразовании в каждую из отходящих от узла ветвей включаются звенья с такими же передаточными функциями.

Перенос рядом расположенных сумматоров или узлов разветвления.

Рядом расположенные узлы разветвления или сумматоры можно менять местами между собой или объединять в один.

Пример 1.6. Для схемы САУ на рис. 1.31 определить эквивалентную передаточную функцию.

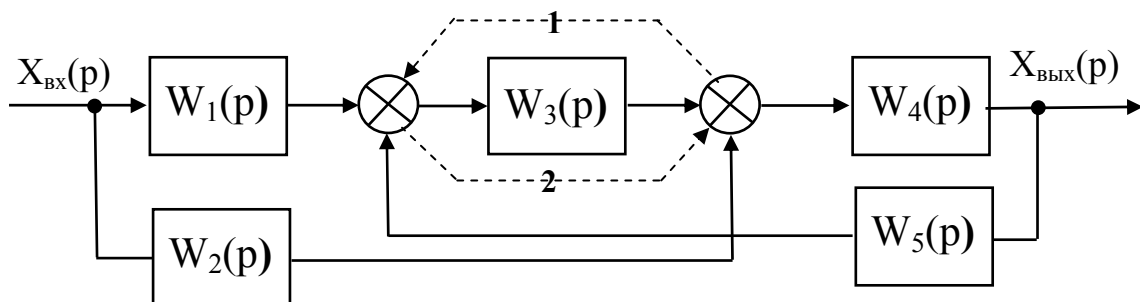


Рисунок 1.31 – Структурная схема САУ с перекрестными связями

Для схемы САУ на рис. 1.31 возможны два варианта исключения перекрестной связи связанных с переносом сумматоров либо против направления (вариант 1) либо по направлению (вариант 2) передачи воздействия. Реализация первого варианта исключения перекрестной связи приведена на рис. 1.32. В преобразованной схеме САУ вместо двух сумматоров будет один и последовательно со вторым звеном будет включено шестое звено с передаточной функцией:

$$W_6(p) = \frac{1}{W_3(p)}.$$

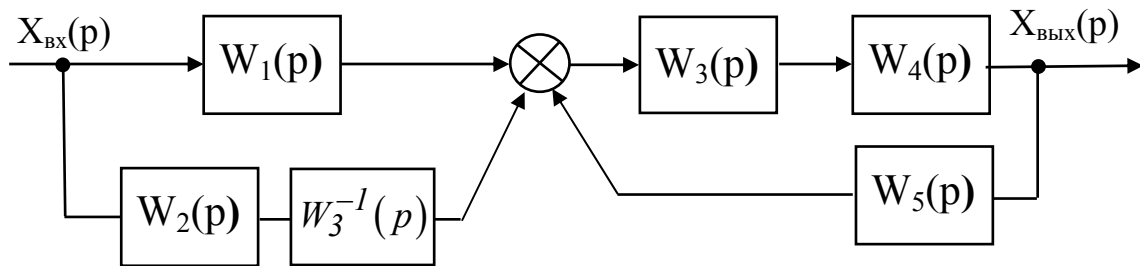


Рисунок 1.32 – Преобразованная структурная схема САУ (вариант 1)

Звено 1 включено параллельно с последовательно соединенными звеньями два и шесть. Их заменим седьмым звеном с передаточной функцией:

$$W_7(p) = W_1(p) + W_2(p) \cdot W_6(p) = W_1(p) + \frac{W_2(p)}{W_3(p)}.$$

Звенья три и четыре соединены последовательно им встречно-параллельно включено звено пять. Заменим эти звенья одним звеном с передаточной функцией:

$$W_8(p) = \frac{W_3(p) \cdot W_4(p)}{1 - W_3(p) \cdot W_4(p) \cdot W_5(p)}.$$

Структурная схема САУ на втором этапе преобразований приведена на рис. 1.33.

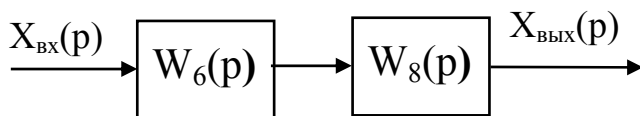


Рисунок 1.33 – Структурная схема САУ на втором этапе преобразования

На рис. 1.33 звенья соединены последовательно, поэтому эквивалентная передаточная функция САУ произведению их передаточных функций:

$$W_{САУ}(p) = W_7(p) \cdot W_8(p).$$

Подставим вместо передаточных функций их выражения:

$$W_{САУ}(p) = \left(W_1(p) + \frac{W_2(p)}{W_3(p)} \right) \frac{W_3(p) \cdot W_4(p)}{1 - W_3(p) \cdot W_4(p) \cdot W_5(p)}$$

2 ИДЕАЛЬНЫЕ ТИПОВЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ ЛИНЕЙНЫХ САУ

В составе структуры САУ содержится управляющее устройство, которое называется регулятором. Он выполняет основные функции управления, путем выработки управляющего воздействия $x_{\text{рег}}(t)$ в зависимости от отклонения (ошибки), т.е. $x_{\text{рег}}(t) = f(\Delta x_{\text{вых}}(t)) = f(\varepsilon(t))$. Закон регулирования определяет вид этой зависимости без учёта инерционности элементов регулятора и основные качественные и количественные характеристики системы. Закон регулирования (алгоритм регулирования) связывает выходное воздействие регулятора со входным.

Различают линейные и нелинейные законы регулирования. Кроме того, законы регулирования могут быть реализованы в непрерывном виде или в цифровом. Цифровые законы регулирования реализуются путем построения регуляторов с помощью средств вычислительной техники (микро ЭВМ или микропроцессорных систем). Далее проанализируем законы регулирования, которые реализуются типовыми линейными регуляторами.

Рассмотрим пять линейных идеальных автоматических регуляторов: пропорциональный (П), интегральный (И), пропорционально – интегральный (ПИ), пропорционально – дифференциальный (ПД), и пропорционально – интегрально – дифференциальный (ПИД).

Пропорциональный регулятор воздействует на объект управления пропорционально отклонению регулируемой величины от заданного значения:

$$x_{\text{рег}}(t) = k x_{\text{вх}}(t), \text{ где } x_{\text{вх}}(t) = \Delta x_{\text{вых}}(t) = \varepsilon(t).$$

Передаточная функция регулятора $W(p) = k$.

Закон П – регулирования является статическим. Для такого типа закона регулирования установившееся значение регулируемой величины отличается от заданного значения на величину установившейся ошибки ($\varepsilon(t=\infty) = \varepsilon_{\text{уст}} \neq 0$). Полная ликвидация ошибки в статических САУ даже теоретически невозможна. В этих системах установившаяся ошибка при постоянной величине задающего воздействия не равна нулю и возрастает с увеличением возмущающего воздействия на систему.

При настройке П – регулятора его коэффициент передачи должен быть оптимальным. При малом значении k увеличивается запас устойчивости, но при этом затягивается переходный процесс и увеличивается установившаяся ошибка регулирования. Увеличивать k можно до некоторого предельного значения $k_{\text{пред}}$. При $k > k_{\text{пред}}$ в САУ возникают незатухающие автоколебания.

Преимущества П – регулятора – *простота и быстрое действие*, недостатки – *ограниченная точность* (особенно при управлении объектами с большой инерционностью и запаздыванием).

Интегральный регулятор воздействует на объект управления пропорционально интегралу отклонения регулируемой величины от заданного значения.

$$x_{\text{рег}}(t) = k \int_0^t x_{\text{вх}}(t) \cdot dt$$

Этому интегральному уравнению соответствует операторное уравнение:

$$X_{\text{рез}}(p) = \frac{k}{p} X_{\text{вх}}(p),$$

откуда получим передаточную функцию регулятора:

$$W(p) = \frac{k}{p}.$$

Следовательно, динамические свойства регулятора соответствуют динамическим свойствам интегрирующего звена.

И – регулятор астатический, поэтому он обеспечивает ликвидацию статической установившейся ошибки (имеет $\varepsilon_{\infty}=0$).

Интегральный регулятор имеет один параметр для настройки постоянную времени интегрирования $T_{\text{и}}$. Она зависит от коэффициента передачи k :

$$T_{\text{и}} = \frac{1}{k} \quad (\text{коэффициент } k \text{ имеет размерность } \text{с}^{-1}).$$

В этом случае интегральный закон регулирования и соответствующий И – регулятор будет реализовать следующую зависимость:

$$x_{\text{рез}}(t) = \frac{1}{T_{\text{и}}} \int_0^t x_{\text{вх}}(t) dt.$$

Пусть на вход регулятора поступает постоянный сигнал $x_{\text{вх}}=x_{0\text{вх}}$. При этом имеем:

$$x_{\text{рез}}(t) = \frac{1}{T_{\text{и}}} \int_0^t x_{0\text{вх}} dt = x_{0\text{вх}} \frac{t}{T_{\text{и}}}.$$

Из полученного соотношения следует, что при истечении времени $t=T_{\text{и}}$ значение сигнала на выходе регулятора $x_{\text{рез}}=x_{0\text{вх}}$. Следовательно, *постоянная времени интегрирования это время, за которое сигнал на выходе регулятора становится равным входному.*

Преимущества И–регулятора – *лучшая* (по сравнению с П–регулятором) *точность в установившихся режимах*, недостатки – *худшие свойства в переходных режимах* (меньшее быстродействие и более высокая колебательность).

Пропорционально-интегральный регулятор оказывает воздействие на объект регулирования пропорционально отклонению и пропорционально интегралу отклонения регулируемой величины от заданного значения:

$$x_{\text{рез}}(t) = k \cdot x_{\text{вх}}(t) + \frac{1}{T_{\text{и}}} \int_0^t x_{\text{вх}}(t) dt.$$

Передаточная функция ПИ – регулятора:

$$W(p) = k + \frac{I}{T_{\text{и}} p}$$

В динамическом отношении ПИ – регулятора эквивалентен П – регулятору и И – регулятору соединенными параллельно. Он астатический. Структурная схема САУ с ПИ – регулятором приведена на рис. 2.1.

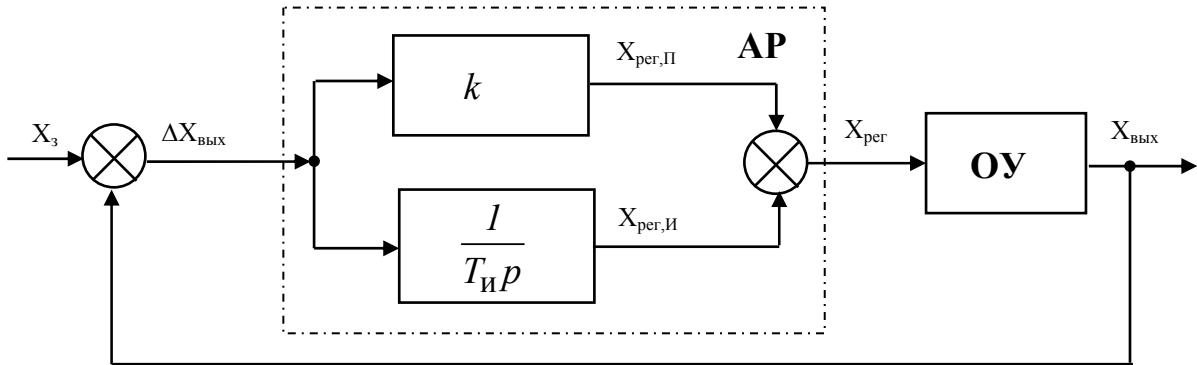


Рисунок 2.1 – Структурная схема САУ с ПИ – регулятором 1 типа

Регулятор со структурной схемой на рис. 2.1 имеет независимые друг от друга параметры настройки k и $T_{\text{и}}$. Если при настройке регулятора установить очень большую величину $T_{\text{и}}$, то он превращается в П – регулятор. Если при настройке будет установлено малое значение k , то получим И – регулятор.

Временная характеристика ПИ – регулятора показана на рис. 2.2.

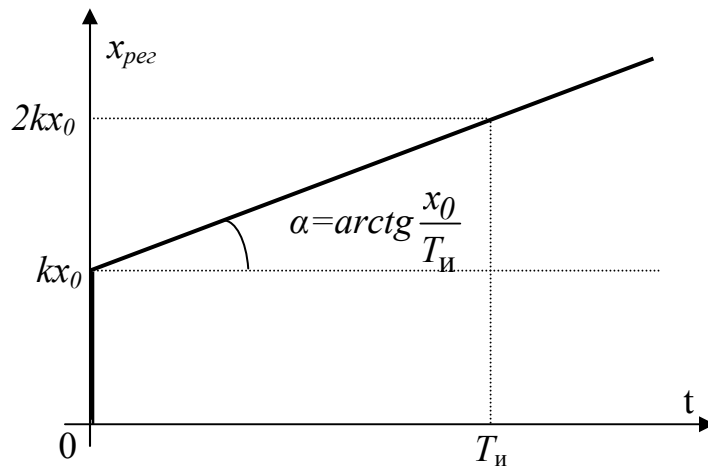


Рисунок 2.2 – Временная характеристика ПИ – регулятора

Из рис. 2.2 следует, что при скачкообразном изменении $x_{\text{вх}}$ на величину x_0 регулятор в начале мгновенно перемещает исполнительный механизм (ИМ) на величину kx_0 . После этого ИМ перемещается в ту же сторону со скоростью $x_0/T_{\text{и}}$.

Следовательно, в ПИ – регуляторе при отклонении регулируемой величины от заданного значения мгновенно срабатывает пропорциональная (статическая) часть регулятора. Затем воздействие на объект постепенно увеличивается под действием интегральной (астатической) части регулятора.

Пропорционально – интегральный регулятор может быть выполнен по схеме с взаимосвязанным регулирование коэффициента передачи и постоянной времени. Схема такого регулятора приведена на рис. 2.3.

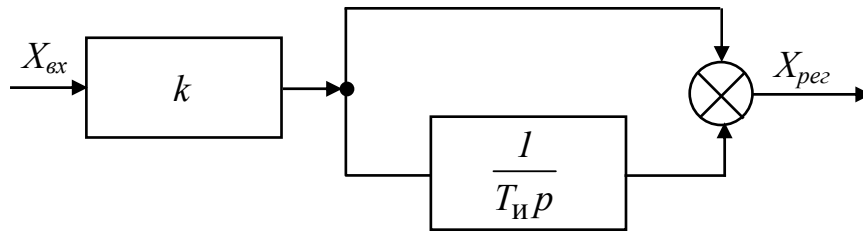


Рисунок 2.3 – Структурная схема ПИ – регулятора 2 типа

Схема ПИ – регулятора на рис. 2.3 реализует такой закон регулирования:

$$x_{рег}(t) = k \left(X_{вх}(t) + \frac{1}{T_{из}} \int_0^t x_{вх}(t) dt \right).$$

Постоянную времени $T_{из}$ принято называть постоянной времени изодрома или временем изодрома.

Передаточная функция такого ПИ – регулятора следующая:

$$W(p) = k \frac{T_{из} + 1}{T_{из} p}.$$

Регулятор со структурной схемой рис. 2.3 обеспечивает пропорциональное изменение скорости нарастания интегральной составляющей на выходе регулятора в случае изменения коэффициента передачи k . В первой схеме рис. 2.1 скорость интегральной составляющей постоянна и от k не зависит.

Сравнительные временные характеристики рассмотренных ПИ – регуляторов для двух значений k приведены на рис. 2.4.

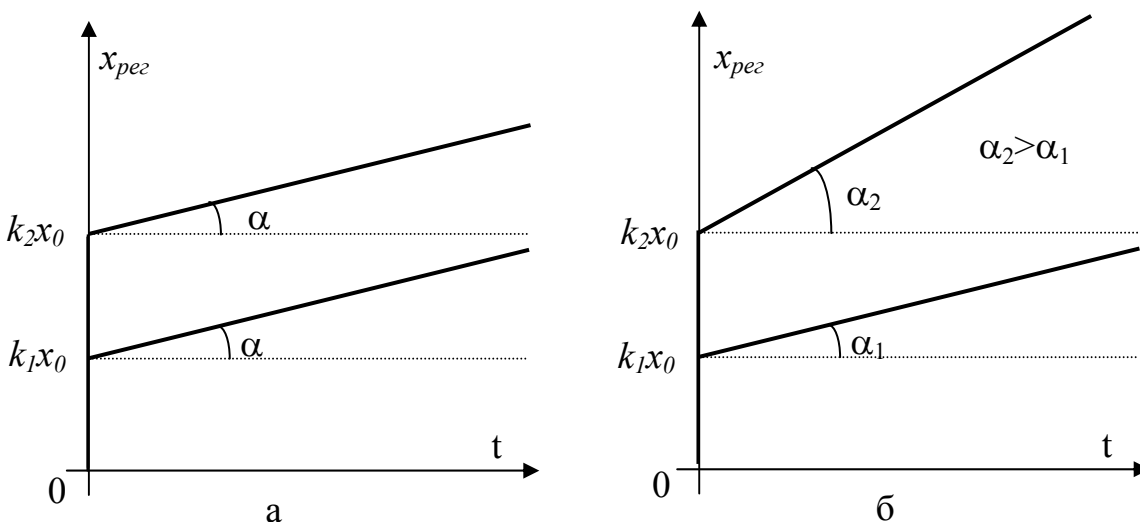


Рисунок 2.4 – Временные характеристики ПИ – регуляторов при разных значениях k : а – первая схема, б – вторая схемы

Благодаря наличию интегральной составляющей в алгоритме, ПИ-регулятор обеспечивает высокую точность в установившихся режимах, а при определенном соотношении коэффициентов k и $1/T_{из}$ ($1/T_{из}$) имеет хорошие показатели качества и

в переходных режимах. Поэтому он получил наибольшее распространение в промышленной автоматике.

Пропорционально – дифференциальный регулятор воздействует на объект управления пропорционально отклонению регулируемой величины и скорости изменения отклонения:

$$x_{рег}(t) = kx_{вх}(t) + k_{д} \frac{d x_{вх}(t)}{d t}, \text{ где } x_{вх}(t) = \Delta x_{вых}(t).$$

Этому дифференциальному уравнению соответствует операторное уравнение:

$$X_{рег}(p) = \left(k + \frac{k_{д} T_{д} p}{T_{д} p} \right) X_{вх}(p).$$

Величины $k_{д}$ и $T_{д}$ определяют составляющую регулирующего воздействия по скорости.

В динамическом отношении свойства ПД – регулятора определяются свойствами параллельно-соединенных пропорционального и реального дифференцирующего звеньев. ПД–регулятор реализует статический закон регулирования. Передаточная функция регулятора имеет вид:

$$W(p) = k + \frac{k_{д} T_{д} p}{T_{д} p}.$$

ПД – регулятор может иметь структурную схему с взаимосвязанным регулирование коэффициентов передачи пропорциональной и дифференциальной частей регулятора. Закон такого регулятора в операторной форме следующий:

$$X_{рег}(p) = k \left(1 + \frac{T_{д} p}{T_{д} p} \right) X_{вх}(p).$$

ПД – регулятор «предугадывает» направление изменения регулируемой величины, что ускоряет процесс регулирования: $t_{рег, ПД} \gg t_{рег, П}$. Кроме того при ПД регулировании переходный процесс заканчивается быстрее при меньших максимальных отклонениях регулируемой величины от ее установившегося значения.

ПД – регулятор реагирует не только на величину сигнала ошибки, но и на скорость его изменения. Благодаря этому при регулировании достигается *эффект опережения*.

Недостатком ПД – регулятора является невозможность обеспечения высокой точности регулирования, так как он статического типа.

Пропорционально–интегрально- дифференциальный регулятор обладает положительными свойствами ПИ и ПД регуляторов. Он реализует следующий астатический закон регулирования:

$$X_{рег}(p) = \left(k + \frac{I}{T_{и} p} + \frac{k_{д} T_{д} p}{T_{д} p} \right) X_{вх}(p).$$

Регулятор осуществляет астатическое регулирование с ускорением процесса регулирования благодаря пропорциональному П и дифференциальному Д каналам.

ПИД – регулятор по возможностям настройки является более универсальным по сравнению с остальными регуляторами. С его помощью можно реализовать различные законы регулирования:

при $T_d=0$ и бесконечно большой величине T_i получаем П – регулятор;

при $T_d=0$ получим ПИ – регулятор;

при бесконечно большой величине T_i и конечных значениях к T_d получим ПД – регулятор.

ПИД – регулятор среди всех рассмотренных имеет наиболее гибкий алгоритм регулирования. Он сочетает в себе преимущества более простых выше рассмотренных регуляторов.

Эффект регулирования зависит от типа закона регулирования. П– и ПД– регуляторы реализуют статический, а И–, ПИ–, ПИД–регуляторы астатический закон регулирования. Эффективность регулирования САУ по отклонению показана на рис. 2.5. Рассматриваются три случая: объект не регулируется (1), объект регулируется по статическому закону (2), объект регулируется по астатическому закону (3).

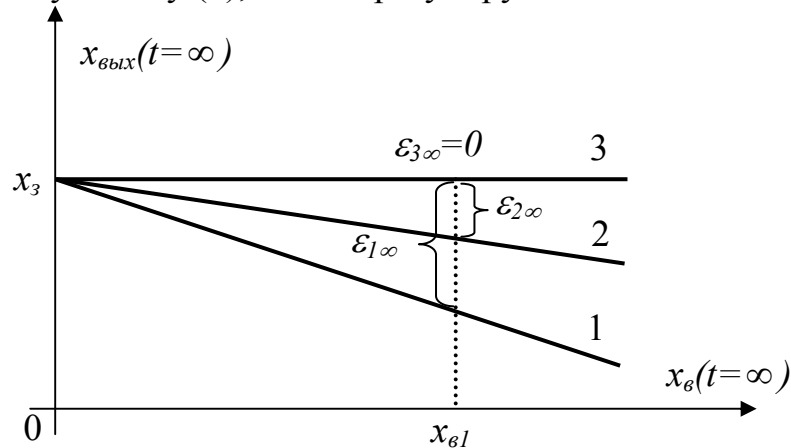


Рисунок 2.5 – Внешние характеристики САУ по отклонению

В соответствии рис. 2.5 для некоторого возмущающего воздействия $x_{в1}$ имеем: $\varepsilon_{1\infty} > \varepsilon_{2\infty} > \varepsilon_{3\infty}$. Для астатических систем установившаяся статическая ошибка всегда равна нулю ($\varepsilon_{3\infty}=0$).

Пример 2.1. Для оценки динамических свойств типовых регуляторов рассмотрим результаты расчета на ЭВМ переходных характеристик САУ поочередно со всеми типовыми регуляторами, но с одним и тем же объектом управления. При этом структурная схема регулятора состоит из трех включенных параллельно звеньев: пропорционального, реального дифференцирующего и интегрирующего. Тип регулятора зависит от того какие звенья подключены ко входу сумматора: П – регулятор состоит из одного пропорционального звена, ПД – регулятор – из соединенных параллельно пропорционального и реального дифференцирующего звеньев, И – регулятор – из интегрирующего звена, ПИ – регулятор – из соединенных параллельно пропорционального и интегрирующего звеньев. Для моделирования ПИД – регулятора необходимо подключение к сумматору всех трех звеньев одновременно: пропорционального, реального дифференцирующего и интегрирующего.

Расчет на ЭВМ переходных характеристик $x_{вых}(t)$ выполнялся для САУ со структурной схемой приведенной на рис. 2.6. Закон регулирования этой САУ определяется количеством и типом звеньев, подключенных к сумматору.

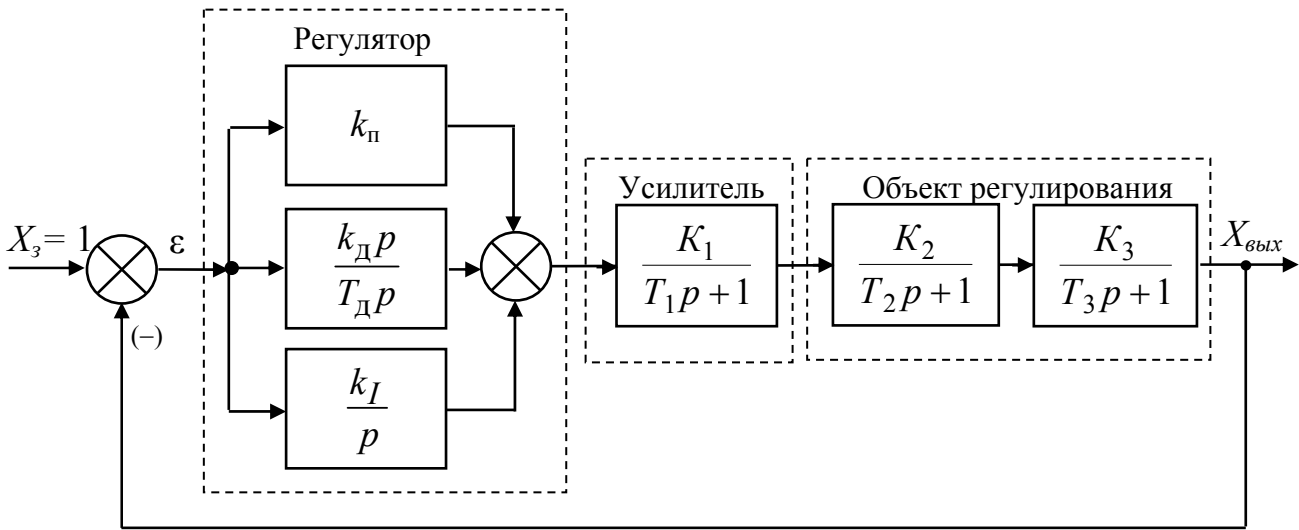


Рисунок 2.6 – Структурная схема САУ с типовым регулятором

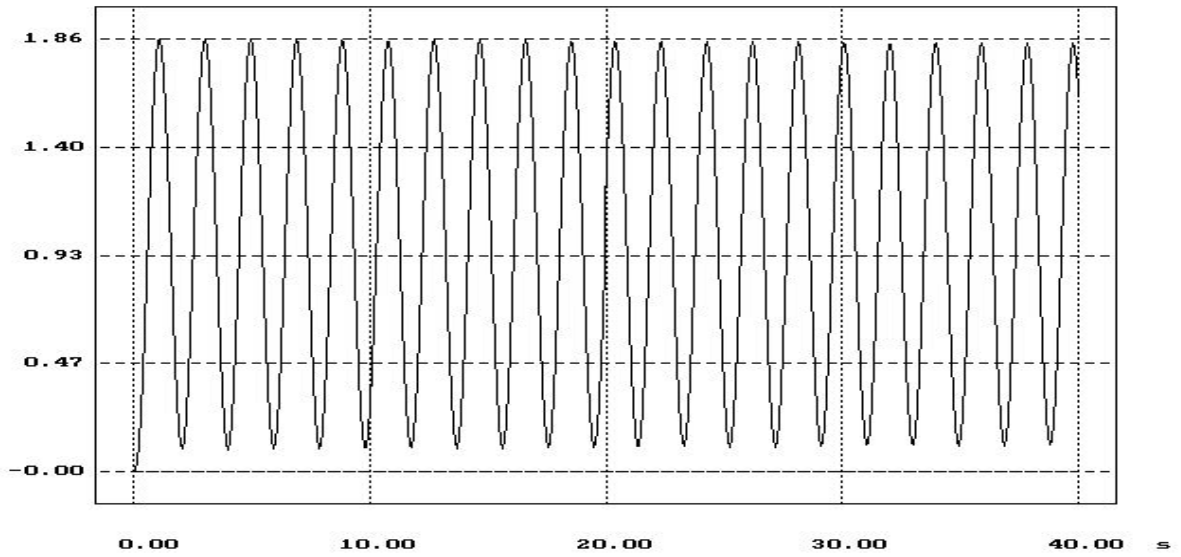
Исходные данные для расчета САУ следующие. Параметры модели регулятора: $k_p=0,9$; $k_d=0,9$; $T_d=0,02$; $k_I=0,018$. Параметры усилителя K_1 – базовое значение определяется в процессе исследования качества регулирования Π – регулятора; $T_1=0,2$ с. Объект регулирования имеет параметры $K_2=2$; $T_2=0,53$ с и $K_3=5$; $T_3=6,2$ с.

Результаты расчета Π – регулятора при разных значениях коэффициента усиления K_1 приведены на рис. 2.7.

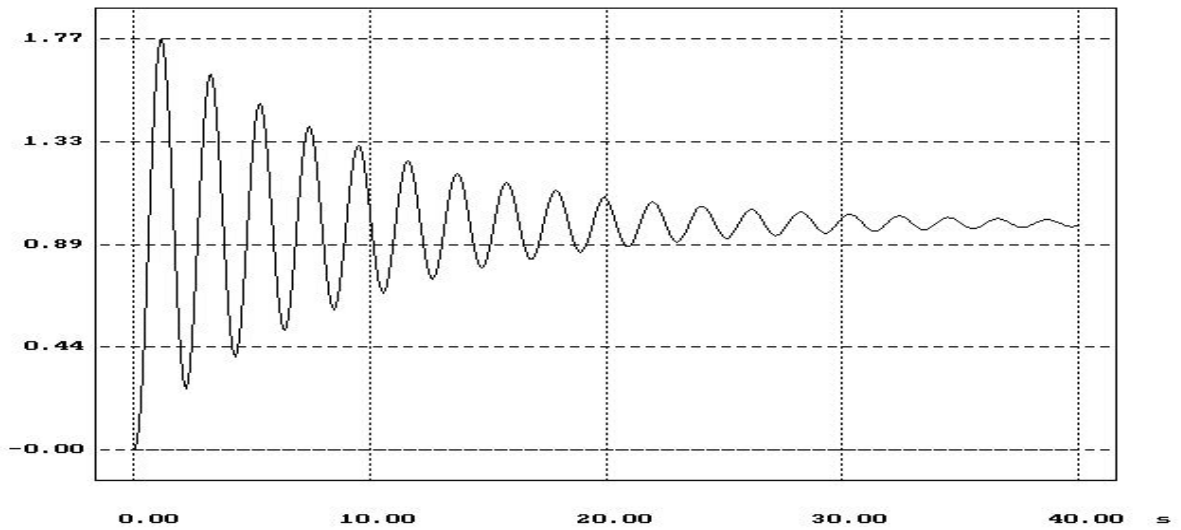
При предельном значении $K_{пред}=K_1=5,4$ система находится на границе устойчивости, так как на ее выходе возникают незатухающие с одинаковой амплитудой колебания. Система становится устойчивой при $K_1 < K_{пред}$. При $K_1=4,5$ переходная характеристика имеет колебательно-затухающий характер и приемлемое значение установившейся ошибки ϵ_∞ (при $X_3=1$ это 2,16%). Значение $K_1=4,5$ принимается за базовое. Колебательность переходного процесса можно уменьшить путем уменьшения коэффициента усиления K_1 . При значительном снижении значения K_1 происходит существенное уменьшение количество колебаний и максимального значения $x_{вых}(t)$ (рис. 2.7,в), но будет большая установившаяся ошибка регулирования $\epsilon_\infty=10,97\%$. Следовательно, для САУ на рис. 2.6 при использовании Π – регулятора достичь необходимого качества регулирования нельзя.

Результаты расчета ПД – регулятора при разных значениях коэффициента усиления K_1 и неизменных параметрах регулятора $k_d=0,9$; $T_d=0,02$ приведены на рис. 2.8.

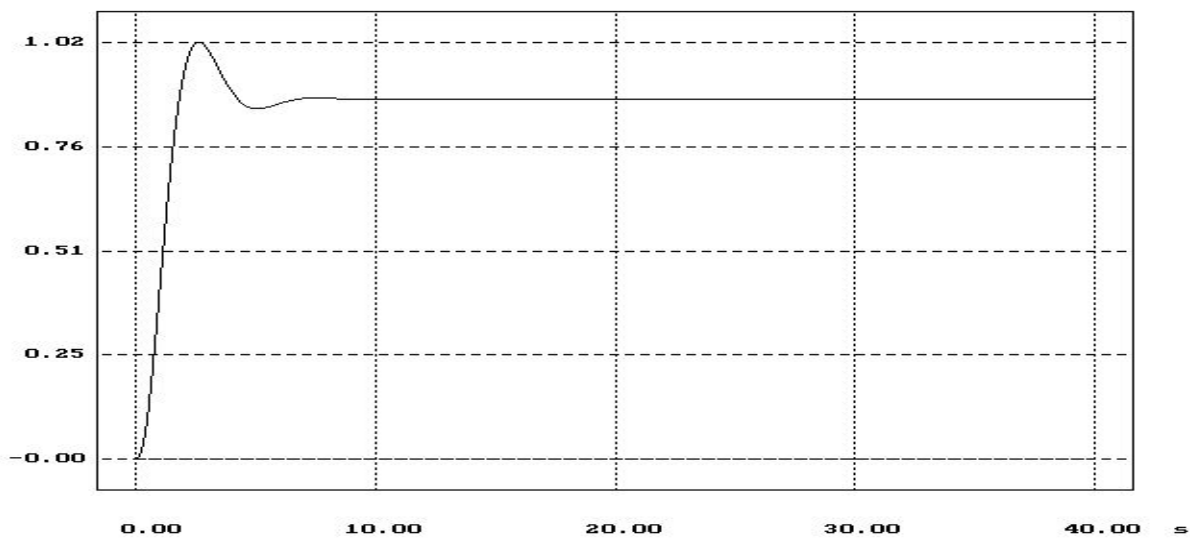
Как следует из переходных характеристик (рис. 2.8) благодаря включению параллельно пропорциональному звену реального дифференцирующего звена значительно улучшилась динамика регулирования. При $K_1=4,5$ (рис. 2.8,б) была получена та же установившаяся ошибка $\epsilon_\infty=2,16\%$ как и в Π – регуляторе (рис. 2.7,б) при $K_1=4,5$, но в ПД – регуляторе время регулирования оказалось меньше около 3 с при приемлемой колебательности переходного процесса. Колебательность ниже из-за того, что САУ будет находится на границе устойчивости при большем значении коэффициента усиления $K_1=26$. Для Π – регулятора это было при $K_1=5,3$. Следовательно ПД – регулятор имеет больший запас устойчивости по усилению.



а

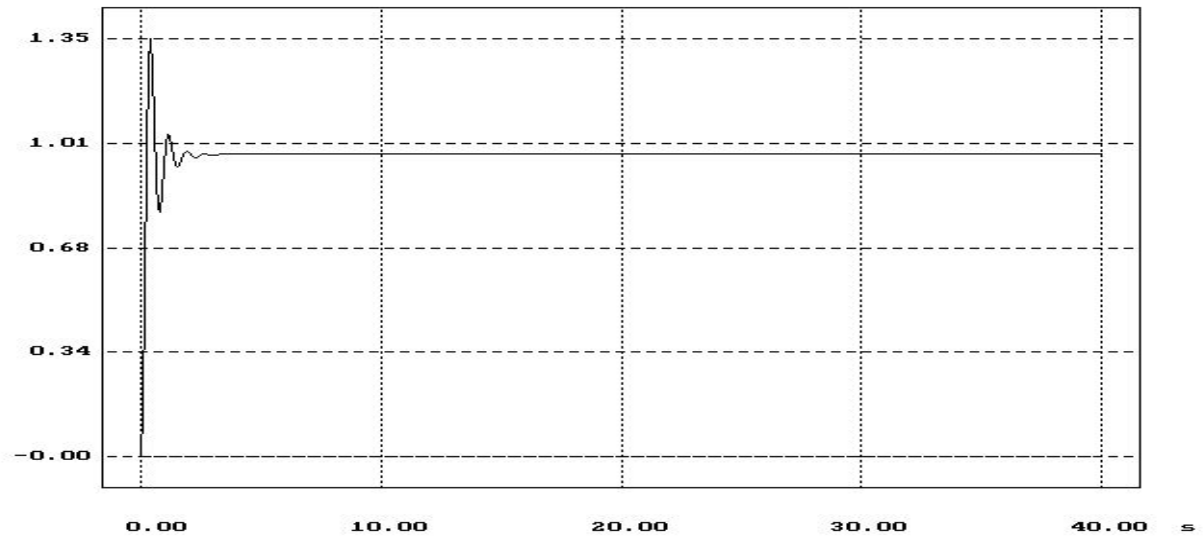


б

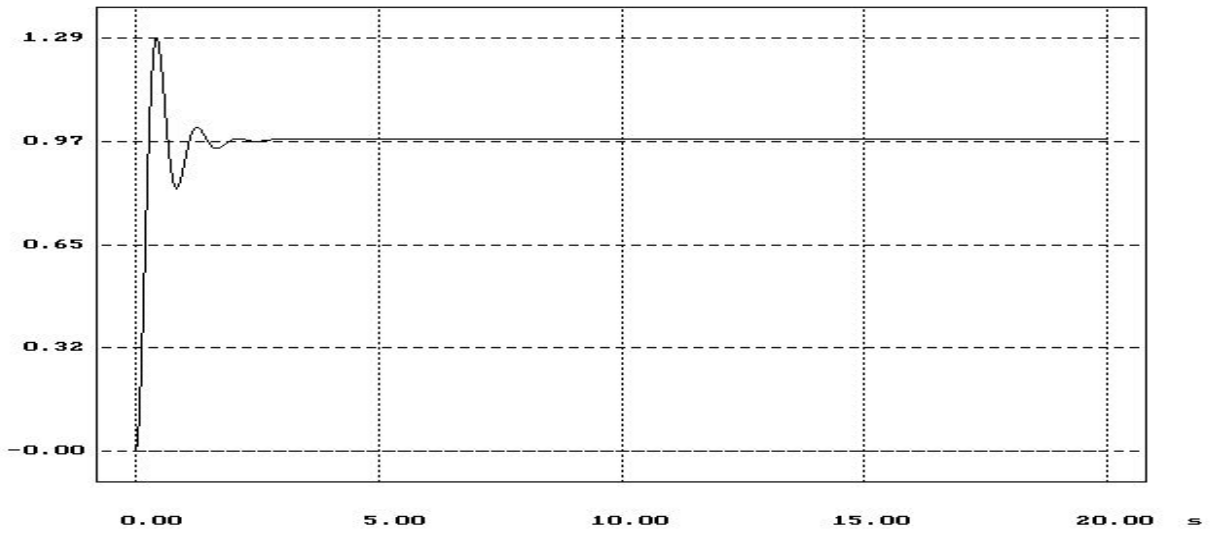


в

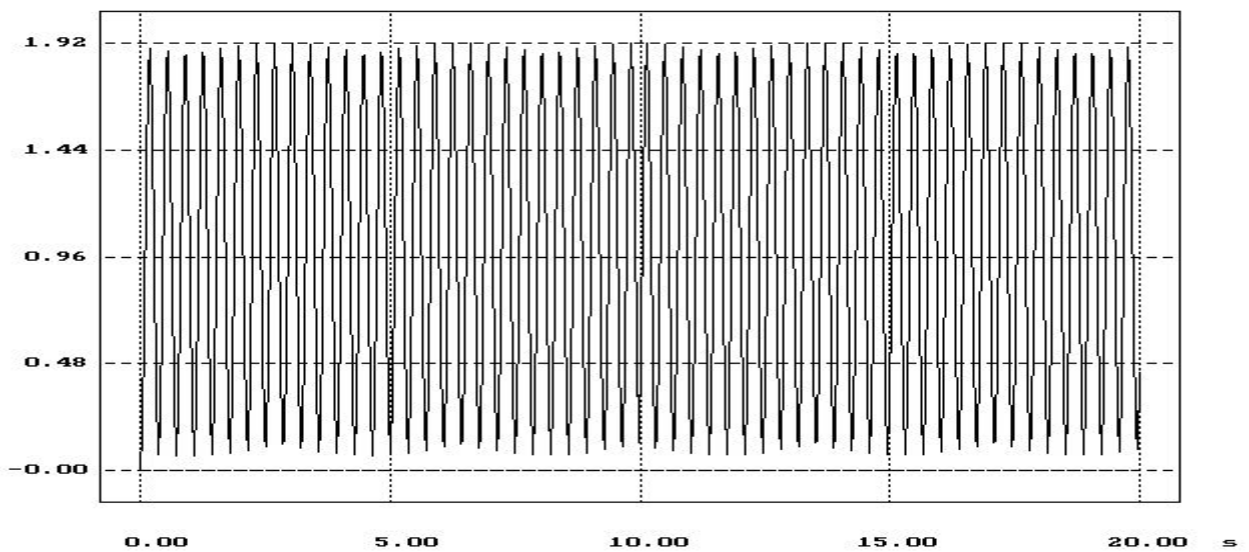
Рисунок 2.7 – Переходные характеристики П – регулятора: а – при $K_1=5,4$, $k_{\text{п}}=0,9$; б – при $K_1=4,5$, $k_{\text{п}}=0,9$; в – при $K_1=0,8$, $k_{\text{п}}=0,9$



а



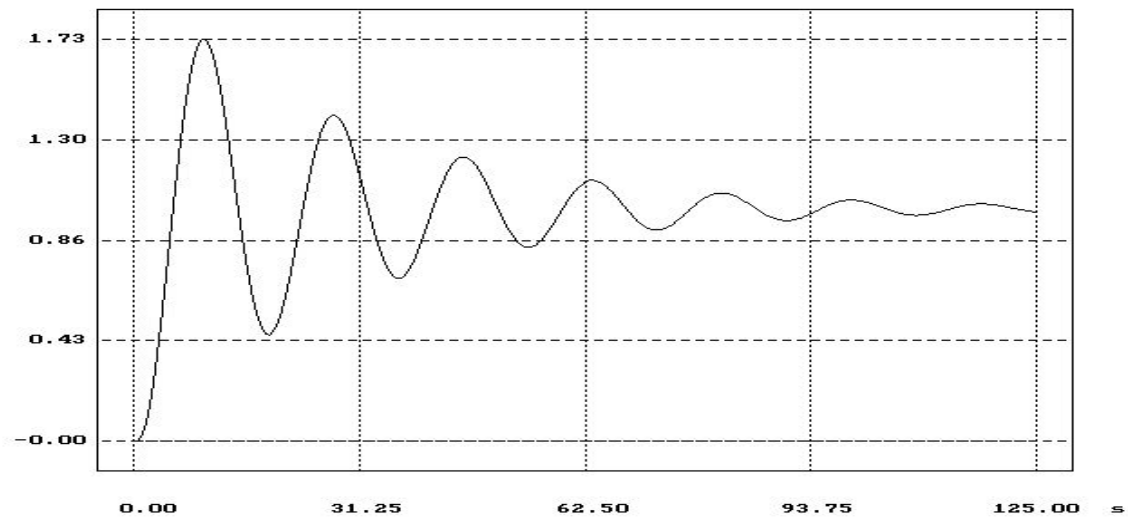
б



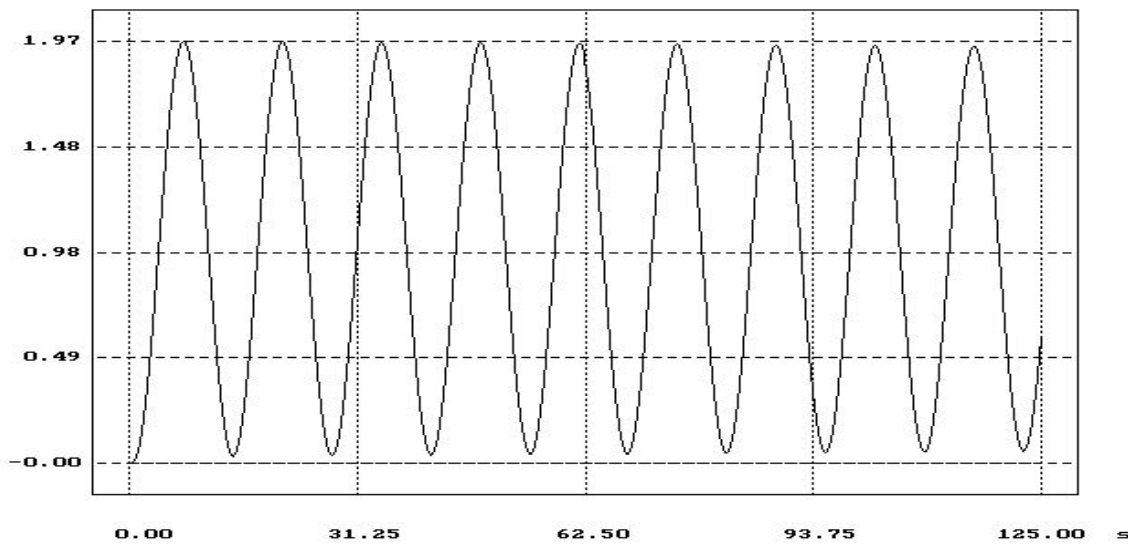
в

Рисунок 2.8 – Переходные характеристики ПД – регулятора: а – при $K_1=5,4$, $k_n=0,9$, $k_d=0,9$; б – при $K_1=4,5$, $k_n=0,9$, $k_d=0,9$; в – при $K_1=26$, $k_n=0,9$, $k_d=0,9$;

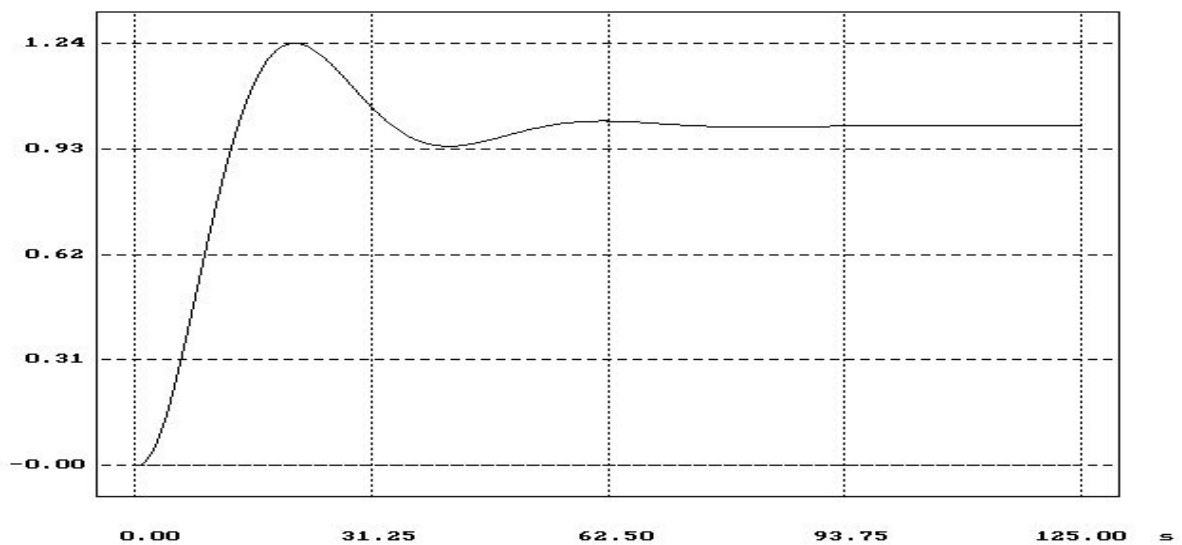
Переходные характеристики САУ с И – регулятором приведены на рис. 2.9.



а



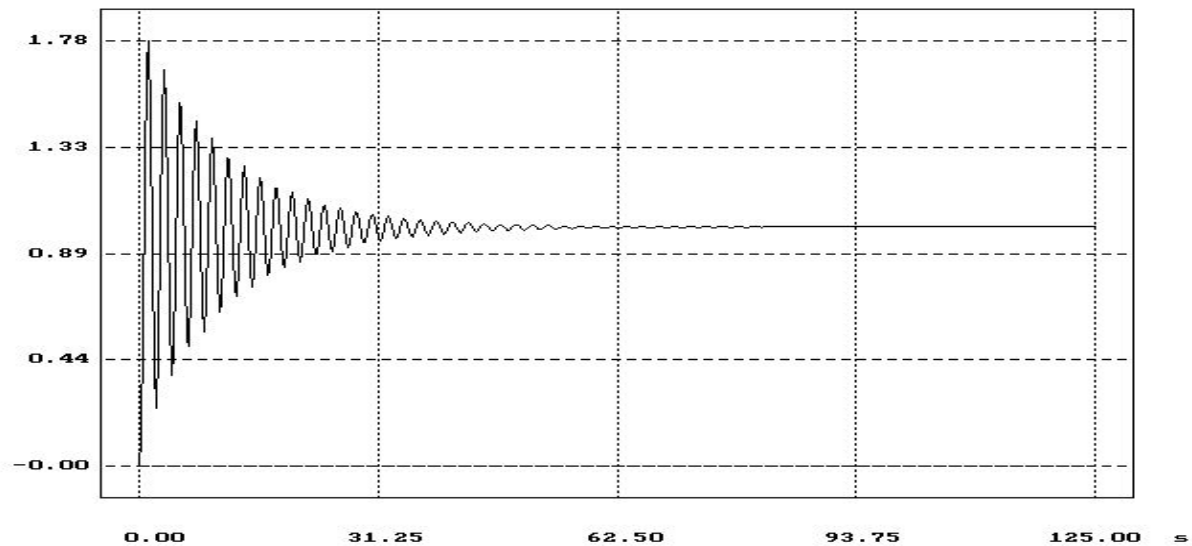
б



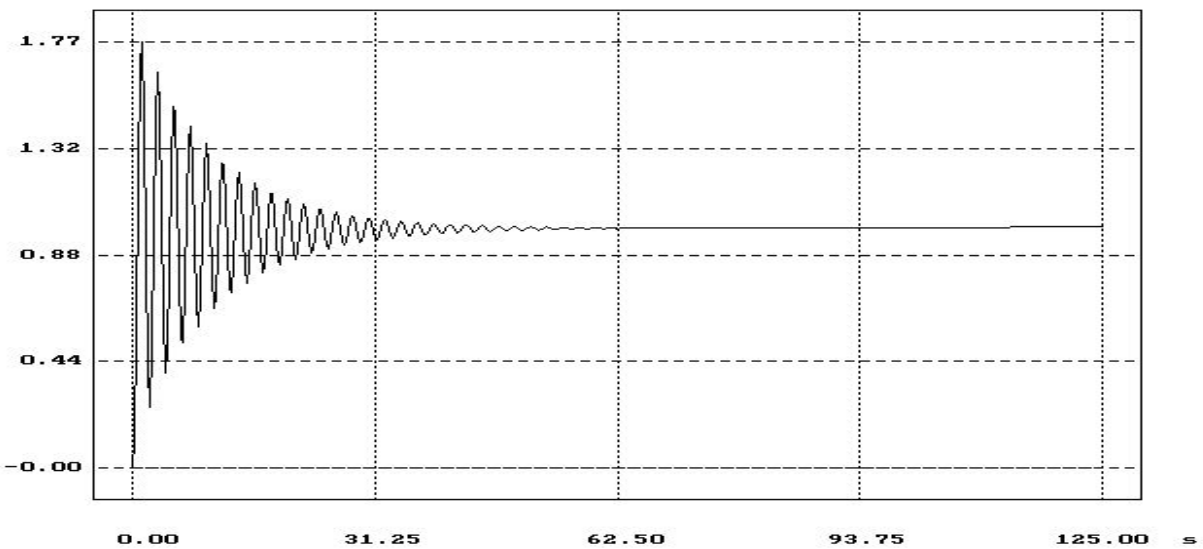
в

Рисунок 2.9 – Переходные характеристики И – регулятора:
а – при $K_1=4,5$, $k_I=0,018$, б – при $K_1=4,5$, $k_I=0,0325$; в - при $K_1=4,5$, $k_I=0,004$

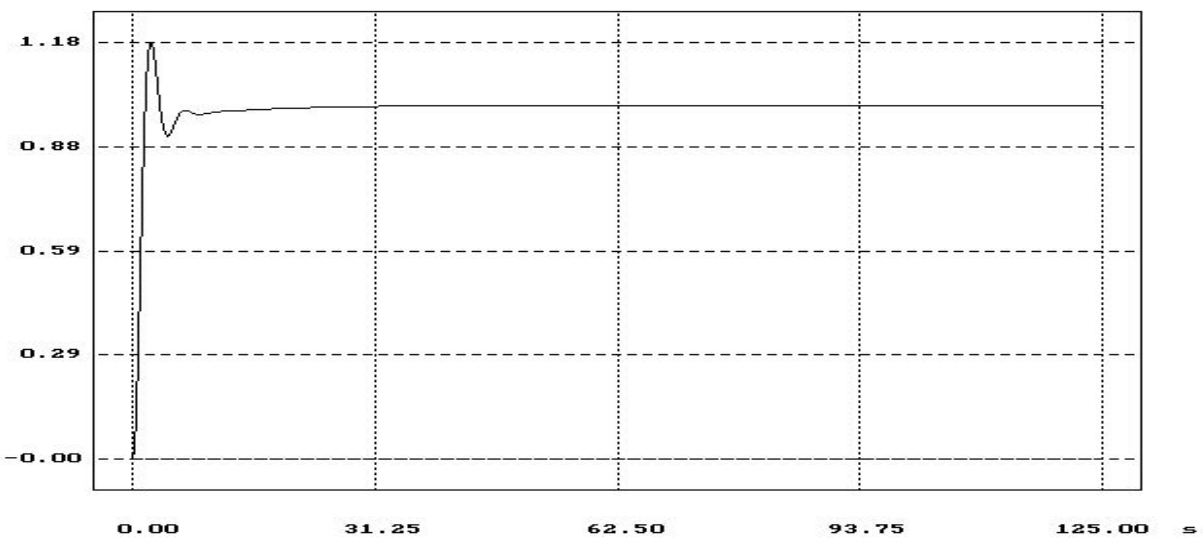
Переходные характеристики САУ с ПИ – регулятором приведены на рис. 2.10.



а



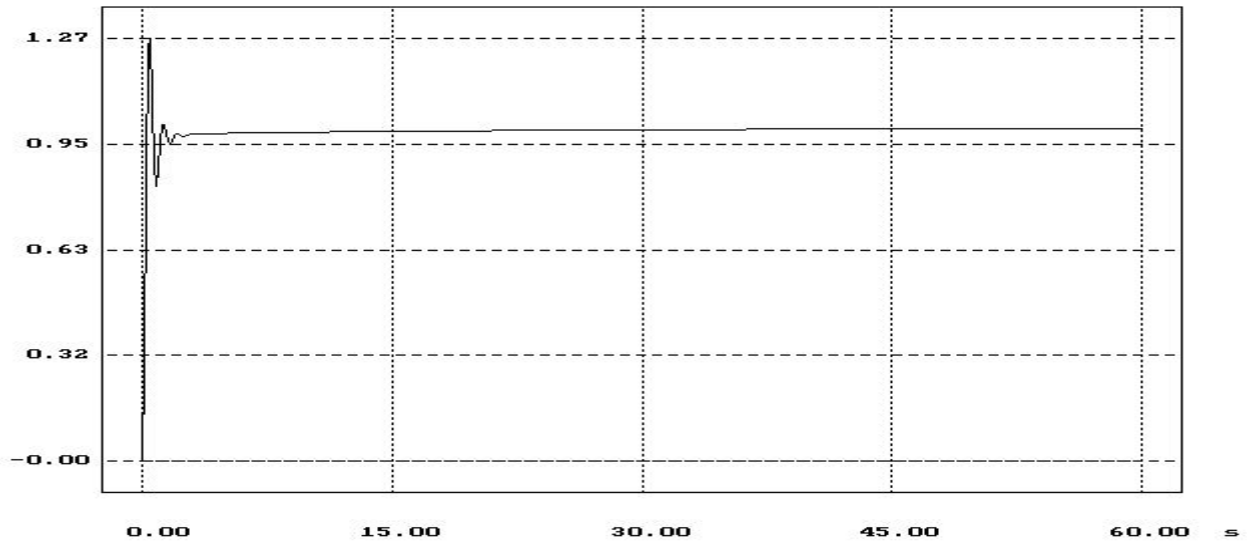
б



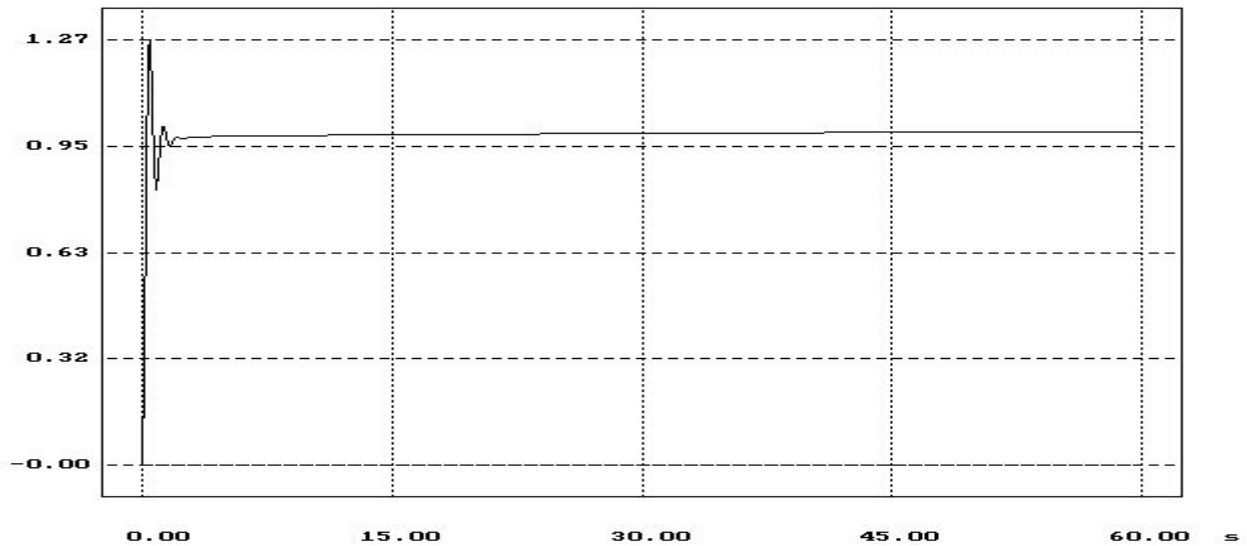
в

Рисунок 2.10 – Переходные характеристики ПИ – регулятора: а – при $K_1=4,5$, $k_I=0,0325$, $k_P=0,9$, б – при $K_1=4,5$, $k_I=0,018$, $k_P=0,9$; в - при $K_1=4,5$, $k_I=0,018$, $k_P=0,2$

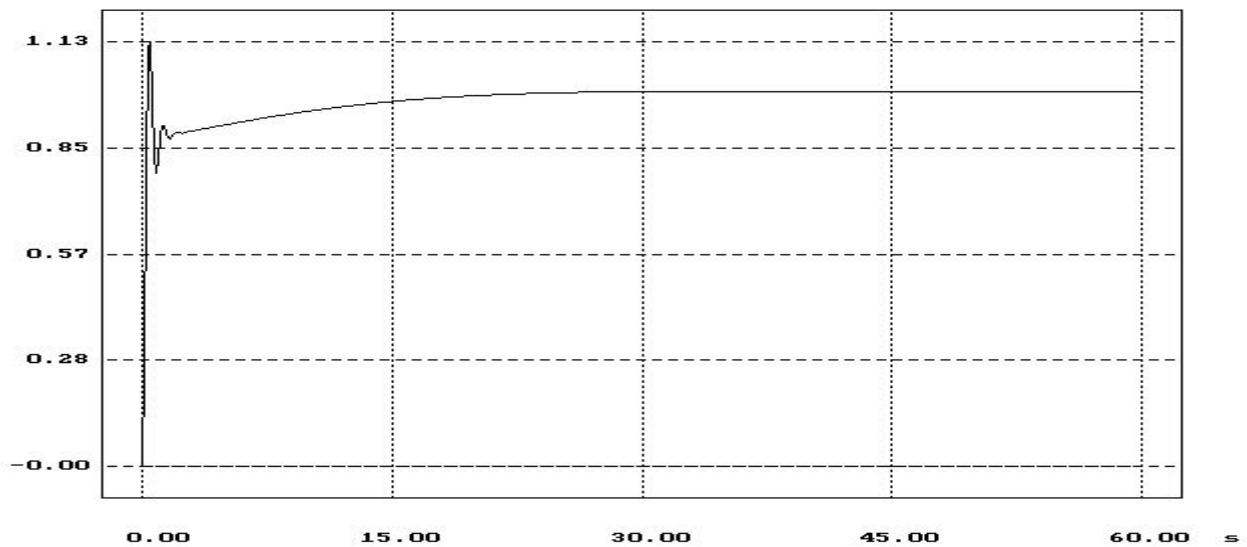
Переходные характеристики САУ с ПИД – регулятором показаны на рис. 2.11.



а



б



в

Рисунок 2.11 – Переходные характеристики ПИД – регулятора при $k_d=0,9$, $T_d=0,02$ с и $K_I=4,5$: а – при $k_I=0,0325$, $k_p=0,9$, б – при $k_I=0,018$, $k_p=0,9$; в - при $k_I=0,018$, $k_p=0,2$

Из анализа переходных характеристик САУ с И – регулятором (рис. 2.9) следует, что при $k_I=0,018$ и $K_I=4,5$ переходный процесс имеет колебательно-затухающий характер. Установившаяся ошибка ε_∞ такого регулятора равна нулю. Однако на практике при конечном времени расчета переходного процесса, например 250с, ошибка некое малое значение равна $\varepsilon(t=250с)=0,000165$ (0,0165%). Увеличение k_I до 0,0325 (постоянная интегрирования $T_n=30,77с$) приводит к появлению на выходе САУ незатухающих и одинаковых по амплитуде колебаний. Уменьшение k_I до 0,004 позволяет получить переходный с требуемой колебательностью. В этом случае колебательность уменьшилось и соответственно уменьшилась время регулирования. Так при времени расчета $t_n=125с$ имеем $\varepsilon=0,018\%$ и при $t_n=250с$ уже получим $\varepsilon=0,000003\%$.

Преобразование И – регулятора в ПИ – регулятор осуществляется подключением параллельно интегрирующего и пропорционального звеньев. Этот регулятор астатический и он также имеет установившуюся ошибку регулирования $\varepsilon_\infty=0$. Анализ переходных характеристик системы (рис. 2.10) показал, что при $k_I=0,0325$ и $k_I=0,018$ САУ устойчива. Причем, при $k_I=0,0325$ имеет место улучшение качества регулирования (САУ стала устойчивой), а при $k_I=0,018$ – ухудшение (колебательность переходного процесса увеличилась). Для получения необходимого качества регулирования требуется оптимальное соотношение коэффициентов передачи пропорционального и интегрирующего звеньев. Оно было получено при настройке регулятора $k_p=0,02$ для $k_I=0,018$ (рис. 2.10,в).

ПИД – регулятор астатический и имеет все положительные свойства ранее рассмотренных регуляторов. Переходные характеристики системы с таким регулятором приведены на рис. 2.11. Переходные характеристики показаны на интервале от 0 до 60с с целью более детального показа переходного процесса в начальной стадии. Для получения значения ε_∞ близкого к нулю необходимо время расчета не менее 125с. Минимальное максимальное значение регулируемой величины имеет место при $k_I=0,018$, $k_p=0,2$ (рис. 2.11,в). Две остальные переходные характеристики (рис. 2.11,а и рис. 2.11,б) рассчитаны на ЭВМ для случая, $k_p=0,9$, а значения k_I равны 0,018 и 0,0325. Из этих характеристик следует, что указанные изменения коэффициента передачи интегрирующего звена k_I не оказывают влияния на динамику процесса регулирования.

3 ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Принято точность САУ оценивать при помощи *прямых* и *косвенных* показателей качества.

Прямые показатели качества определяют по графику переходного процесса, возникающего в системе при ступенчатом внешнем воздействии.

Косвенные показатели качества определяют по распределению корней характеристического уравнения или по частотным или переходным характеристикам.

3.1 Прямые показатели качества

Прямые показатели используются в тех случаях, когда графики переходного процесса $x_{\text{вых}}(t)$ (рис. 3.1) получены экспериментально либо путем моделирования реальной САУ на ЭВМ. Рассмотрим показатели качества для САУ по отклонению.

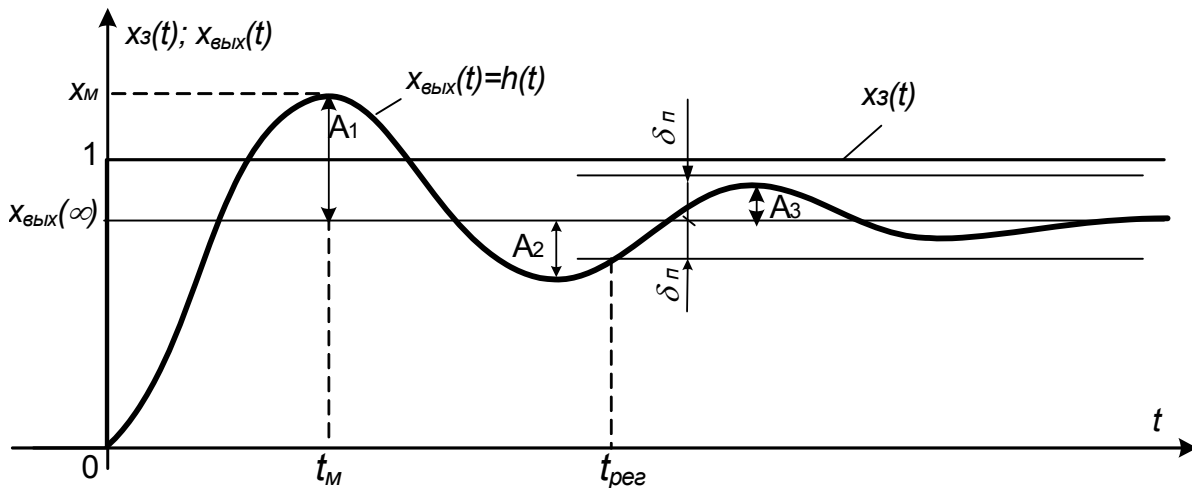


Рисунок 3.1 - Оценка качества регулирования по переходной характеристике САУ по отклонению

Перерегулирование σ - величина, равная отношению первого максимального отклонения x_M управляемой величины $x_{\text{вых}}(t)$ от ее установившегося значения $x_{\text{вых}}(\infty)$ к этому установившемуся значению:

$$\sigma = \frac{x_M - x_{\text{вых}}(\infty)}{x_{\text{вых}}(\infty)} 100\% = \frac{A_1}{x_{\text{вых}}(\infty)} 100.$$

Качество управления считается удовлетворительным, если перерегулирование не превышает 20% ÷ 30%.

Степень затухания

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \frac{A_3}{A_1}.$$

Интенсивность затухания колебаний в системе считается удовлетворительной, если

$$\psi = 0,75 \dots 0,95.$$

Время регулирования $t_{рег}$ – интервал времени от момента приложения ступенчатого воздействия до момента, после которого отклонения управляемой величины $x(t)$ от ее нового установившегося значения $x(\infty)$ становятся меньше некоторого заданного числа $\delta_{п}$, т. е. до момента, после которого выполняется условие

$$|x_{вых}(t) - x_{вых}(\infty)| \leq \delta_{п}.$$

В промышленной автоматике величину $\delta_{п}$ обычно принимают равной 5% от установившегося значения $x(\infty)$ [$\delta_{п} = 0,05 x_{вых}(\infty)$, а в некоторых случаях $\delta_{п} = 0,02 x_{вых}(\infty)$].

Колебательность N – число переходов управляемой величины $x_{вых}(t)$ через ее установившееся значение $x_{вых}(\infty)$ за время регулирования $t_{рег}$ (обычно $2 \div 3$).

Установившаяся ошибка статической САУ – определяется как разность заданного x_3 и установившегося значения регулируемой величины $x_{вых}(\infty)$: в именованных $\varepsilon_{\infty} = \varepsilon(\infty) = x_3 - x_{вых}(\infty)$ и в относительных единицах $\varepsilon_{\infty} \% = \varepsilon_{\infty} / x_3 \cdot 100\%$

Три главных показателя качества – перерегулирование σ , первое максимальное отклонение A_1 и время регулирования $t_{рег}$ – тесно связаны между собой. Они зависят от всех параметров системы, но наиболее сильно – от передаточного коэффициента разомкнутой системы $k_{раз}$. Причем, с увеличением этого коэффициента установившееся значение ошибки в статических САУ уменьшается, а максимальное отклонение по каналу задающего воздействия x_m , перерегулирование и время регулирования увеличиваются (рис. 3.2).

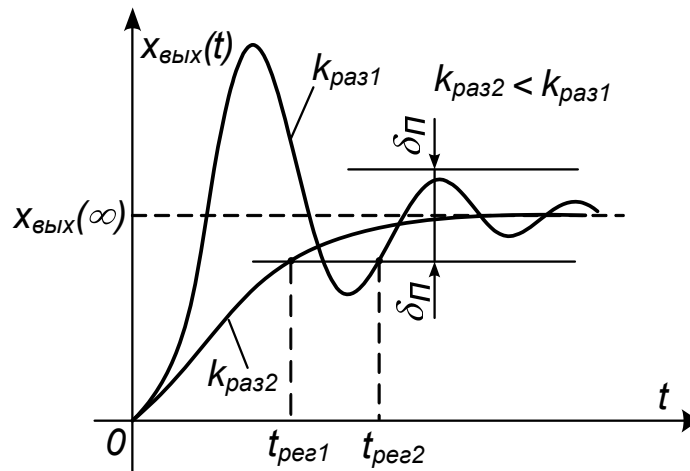


Рисунок 3.2 – Влияние передаточного коэффициента разомкнутой системы на показатели переходного процесса

3.2 Косвенные показатели качества.

В инженерной практике для оценки качества регулирования используются также косвенные методы. Их можно разделить на частотные и интегральные. Косвенные методы позволяют сравнительно просто без решения дифференциального уравнения системы управления приближенно судить об отдельных показателях качества регулирования САУ. Рассмотрим более подробно интегральные оценки качества регулирования.

Каждый из рассмотренных выше прямых показателей качества характеризует лишь одно какое-либо свойство АСУ, лишь один признак переходного процесса.

Причем, все показатели связаны с настроечными параметрами регулятора сложными зависимостями, имеющими, как правило, противоречивый характер: изменение параметра приводит к *улучшению* одних показателей качества и *ухудшению* других. Это обстоятельство существенно затрудняет выбор параметров регулятора. Поэтому в инженерной практике широко используются *интегральные показатели (оценки) качества*.

Интегральная оценка качества – определенный интеграл по времени (в пределах от 0 до ∞) от некоторой функции регулируемой величины $x_{\text{вых}}(t)$, а чаще сигнала динамической ошибки регулирования $\varepsilon(t) = \Delta x_{\text{вых}}(t) = x_{\text{вых}}(t) - x_3(t)$:

$$I = \int_0^{\infty} f(\varepsilon(t), t) dt. \quad (3.1)$$

Подынтегральная функция f выбирается таким образом, чтобы интеграл (3.1) лучше характеризовал качество системы и проще выражался через коэффициенты передаточной функции замкнутой системы. Чтобы интеграл был сходящимся, в функцию f вводят не абсолютные значения $x(t)$ или $\varepsilon(t)$, а их отклонения от конечных, установившихся значений.

Простейшей интегральной оценкой является **линейная интегральная оценка**:

$$I_{\text{л}} = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt, \quad (3.2)$$

которая равна площади, заключенной между осью времени t и кривой переходного процесса $\varepsilon(t)$ (рис. 3.3, а). Интегральная оценка (3.1) учитывает как величину динамических отклонений, так и длительность их существования. Поэтому *чем меньше оценка, тем лучше качество процесса регулирования*.

Недостатком линейной интегральной оценки $I_{\text{л}}$ является то, что ее можно применять лишь для заведомо неколебательных, апериодических переходных процессов. Интеграл (3.2), вычисленный для знакопеременной кривой 1, (рис. 3.3, б) будет существенно меньше интеграла, вычисленного для апериодической кривой 2 (хотя качество переходного процесса 2 явно лучше).

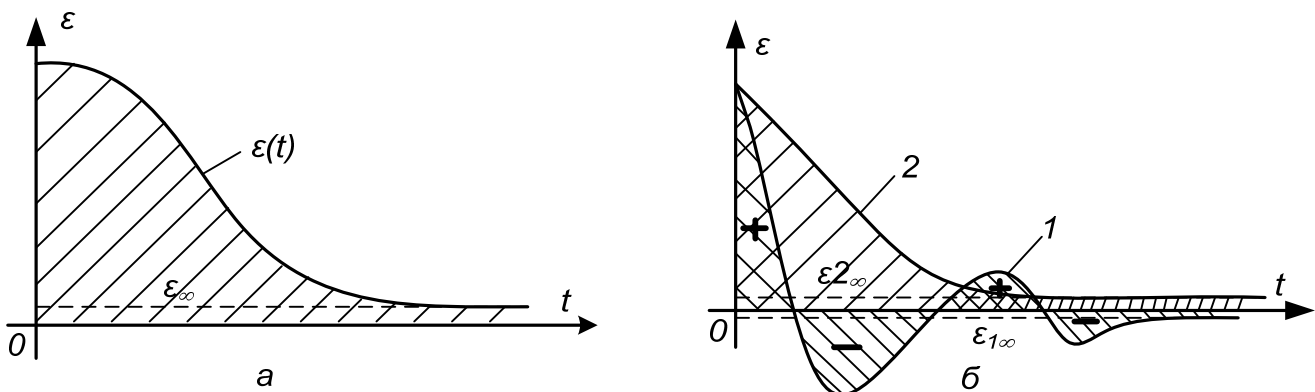


Рисунок 3.3 – Переходная характеристика САУ по ошибке:
а – без перерегулирования, б – с перерегулированием

В связи с этим для колебательных переходных процессов применяют такие интегральные оценки, знакопеременность подынтегральной функции которых тем или иным способом устранена. Такой оценкой является, например, *модульная интегральная оценка*:

$$I_M = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt. \quad (3.3)$$

Все рассмотренные интегральные показатели используют не только для оценки качества, но и для *определения оптимальных значений настроечных параметров САУ*. Оптимальными считают такие значения, которые соответствуют минимуму интегрального показателя:

$$I \rightarrow \min. \quad (3.4)$$

3.3 Частотные показатели качества

Частотные критерии качества применяют, когда известны или можно определить экспериментально частотные характеристики. Вид переходного процесса при этом не рассматривается.

Оценить частотными критериями можно: запас устойчивости и быстродействие

При использовании амплитудно-частотной характеристики АЧХ замкнутой САУ возможно определение: запаса устойчивости по фазе и степени колебательности, который является удобным критерием запаса устойчивости.

По вещественной частотной характеристике ВЧХ замкнутой САУ можно определить: величину перерегулирования и быстродействие САУ

По виду АФХ разомкнутой системы оценивают величины запаса устойчивости: по амплитуде и по фазе.

4 ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОКОНТУРНОЙ САУ

4.1 Передаточная функция САУ по задающему воздействию

Структурная схема замкнутой САУ по задающему воздействию показана на рис. 4.1.

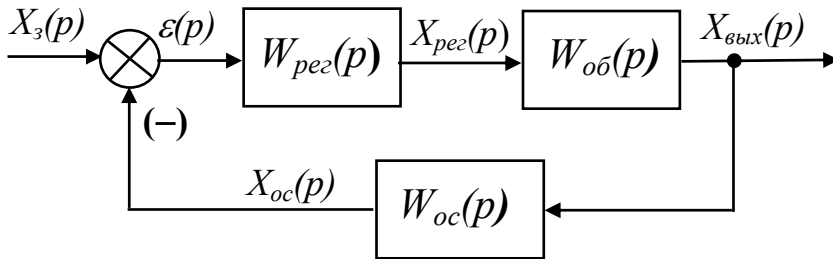


Рисунок 4.1 – Структурная схема САУ по отклонению

Регулятор и объект регулирования с передаточными функциями $W_{рег}(p)$ и $W_{об}(p)$ соединены последовательно. Им встречно-параллельно включено звено с передаточной функцией $W_{ос}(p)$. Следовательно, *передаточная функция замкнутой САУ по отклонению определится следующим соотношением:*

щим соотношением:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{рег}(p)W_{об}(p)}{1 + W_{рег}(p)W_{об}(p)W_{ос}(p)}. \quad (4.1)$$

Из рис. 4.1 следует, что одноконтурная САУ при размыкании главной отрицательной обратной связи состоит из последовательно соединенных звеньев. Поэтому *передаточная функция системы в разомкнутом состоянии равна произведению передаточных функций этой системы:*

$$W_{раз}(p) = W_{рег}(p) W_{об}(p) W_{ос}(p). \quad (4.2)$$

В частном случае при $W_{ос}(p)=1$ получим:

$$W_{раз}(p) = W_{рег}(p) W_{об}(p).$$

Следовательно, передаточную функцию замкнутой САУ по задающему воздействию можно представить так же в следующем виде:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)}. \quad (4.3)$$

Следует отметить, что при $W_{ос}(p) \neq 1$ передаточная функция $W_{зам}(p)$ определяется по соотношению (4.1).

В одноконтурных САУ нет местных обратных связей. Есть только один контур образованный главной отрицательной обратной связью (ГООС). При нахождении передаточной функции $W_{зам}(p)$ многоконтурной САУ ее преобразуют в одноконтурную. Затем размыкают обратную связь. Далее определяют передаточную функцию $W_{раз}(p)$ как произведение передаточных функций всех звеньев и по (4.3) или по (4.1) $W_{зам}(p)$.

Таким образом, для нахождения $W_{зам}(p)$ по отклонению многоконтурной САУ эти системы должны быть преобразованы в эквивалентные одноконтурные.

Пример 4.1. Определить $W_{зам}(p)$ и $W_{раз}(p)$ для структурной схемы САУ, приведенной на рис. 4.2.

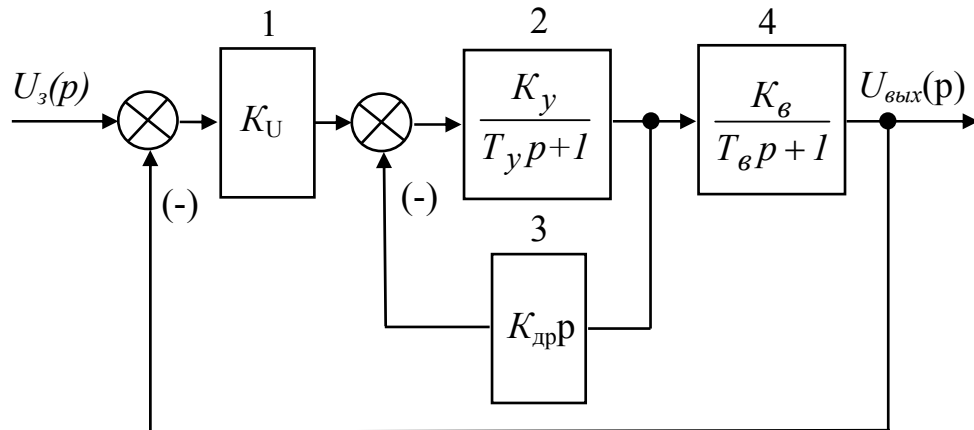


Рисунок 4.2 – Структурная схема САУ по отклонению

Для определения передаточных функций двухконтурной САУ на рис. 4.1 преобразуем ее в одноконтурную. Для этого определим эквивалентную передаточную функции включенных встречно-параллельно второго и третьего звеньев:

$$W_{ек}(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)} = \frac{\frac{K_y}{T_y p + 1}}{1 + \frac{K_y}{T_y p + 1} K_{др} p} = \frac{K_y}{T p + 1 + K_y K_{др} p}$$

В полученном выражении выполним в знаменателе группировку однородных членов:

$$W_{ек}(p) = \frac{K_y}{(T_y + K_y K_{др}) p + 1}$$

После замены первого и второго звеньев одним можно определить передаточную функцию разомкнутой САУ:

$$W_{раз}(p) = W_1(p) \cdot W_{ек}(p) \cdot W_4(p) = K_U \frac{K_y}{(T_y + K_y K_{др}) p + 1} \frac{K_г}{T_г p + 1},$$

где $K_{раз} = K_U K_y K_г$ – коэффициент передачи САУ в разомкнутом состоянии. Передаточная функция замкнутой САУ с учетом выражения для $W_{раз}(p)$:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{K_U \frac{K_y}{(T_y + K_y K_{др}) p + 1} \frac{K_г}{T_г p + 1}}{1 + K_U \frac{K_y}{(T_y + K_y K_{др}) p + 1} \frac{K_г}{T_г p + 1}}$$

После приведения к общему знаменателю получим окончательное выражение для передаточной функции САУ при замкнутой обратной связи:

$$W_{зам}(p) = \frac{K_{раз}}{((T_y + K_y K_{др})p + 1)(T_в p + 1) + K_{раз}}$$

4.2 Передаточная функция САУ по возмущающему воздействию.

Рассмотрим схему САУ по отклонению (рис. 4.1), когда $W_{ос}(p)=1$ и на вход объекта управления приложено некоторое возмущающее воздействие $X_в(p)$, а так же нет задающего воздействия $X_з(p)=0$. В этом случае структурная схема САУ по отклонению будет иметь вид, показанный на рис. 4.3.

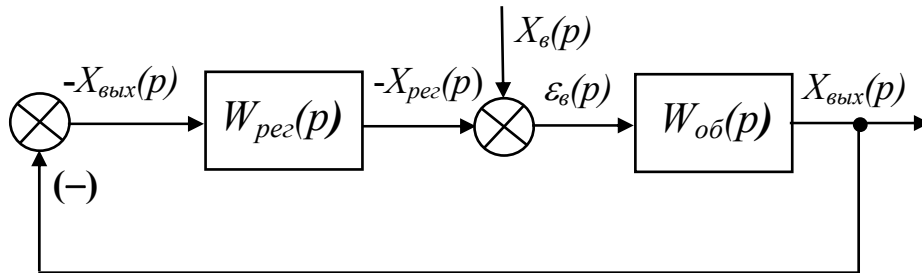


Рисунок 4.3 – Преобразованная схема САУ при $X_з=0$ и $W_{ос}(p)=1$

В схеме на рис. 4.3 сигнал на выходе объекта $X_{вых}(p)$ зависит от возмущающего воздействия $X_в(p)$. Сигнал с выхода объекта с обратным знаком поступает на вход регулятора, который преобразует его в сигнал $-X_{рег}(p)$. Этот сигнал алгебраически суммируется с возмущающим воздействием:

$$\varepsilon_в(p) = X_в(p) - X_{рег}(p).$$

Ошибка по возмущению $\varepsilon_в(p)$ поступает на вход объекта и изменяет значение регулируемой величины $X_{вых}(p)$.

После исключения из схемы на рис. 4.3 сумматора и представления $X_в(p)$ в качестве задающего воздействия получим структурную схему замкнутой САУ по возмущению (рис. 4.4).

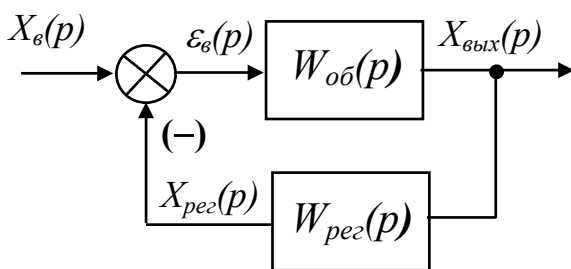


Рисунок 4.4 – Структурная схема по возмущению

Звенья на рис. 4.4 соединены встречно-параллельно. Поэтому передаточная функция замкнутой САУ по возмущению определяется следующим соотношением:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{об}(p)}{1 + W_{рег}(p)W_{об}(p)}.$$

С учетом (4.2) при $W_{ос}(p)=1$ имеем:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{об}(p)}{1 + W_{раз}(p)} \quad (4.4)$$

4.3 Передаточная функция САУ по ошибке

Для схемы САУ по отклонению (рис. 4.1) при $W_{ос}(p)=1$ можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon(p) = X_3(p) - X_{\text{вых}}(p), & (4.5) \\ X_{\text{вых}}(p) = W_{\text{раз}}(p) \cdot \varepsilon(p). & (4.6) \end{cases}$$

Из первого уравнения (4.5) получим:

$$X_{\text{вых}}(p) = X_3(p) - \varepsilon(p).$$

Подставим это выражение во второе уравнение (4.6). В результате получим операторное уравнение САУ по ошибке:

$$X_3(p) = (1 + W_{\text{раз}}(p)) \varepsilon(p).$$

В соответствии с определением передаточной функции имеем:

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{X_3(p)} = \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(p)}. \quad (4.7)$$

Выражение (4.7) называется *передаточной функцией по ошибке САУ по отклонению*. При помощи (4.7) по $X_3(p)$ и $W_{\varepsilon}(p)$ можно определить изображение ошибки:

$$\varepsilon(p) = W_{\varepsilon}(p) \cdot X_3(p). \quad (4.8)$$

Для схемы САУ по возмущению на рис. 4.1 можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon_B(p) = X_B(p) - W_{\text{рег}}(p) X_{\text{вых}}(p), \\ X_{\text{вых}}(p) = W_{\text{об}}(p) \cdot \varepsilon_B(p). \end{cases}$$

Подставим выражение для ошибки $X_{\text{вых}}(t)$ в первое уравнение и после преобразований получим *передаточную функцию по ошибке САУ по возмущению* при $W_{\text{ос}}(p) = 1$ такую же как и $W_{\varepsilon}(p)$:

$$W_{\varepsilon_B}(p) = \frac{\varepsilon_B(p)}{X_B(p)} = \frac{1}{1 + W_{\text{об}}(p) W_{\text{рег}}(p)} = \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(p)}.$$

4.4 Ошибки регулирования статических и астатических САУ.

Система автоматического управления будет статическая по точности, если она всегда имеет установившуюся ошибку регулирования:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} W_{\varepsilon}(p) X_3(p) = \text{const} \neq 0.$$

Если в установившемся режиме работы САУ ошибка равна нулю:

$$\lim_{p \rightarrow 0} W_{\varepsilon}(p) X_3(p) = 0, \text{ то она будет астатической по точности.}$$

Статичность или астатичность *по точности* САУ зависит от наличия или отсутствия в ней интегрирующего звена. Если такого звена нет либо оно охвачено жесткой обратной связью, то такая будет статической по точности и всякое конечное задающее воздействие будет вызывать конечное установившееся отклонение регулируемой величины $\varepsilon_{\infty} = x_{вых}(\infty) - x_3 \neq 0$.

Статичность и астатичность САУ можно рассматривать так же относительно влияния воздействий $x_3(t)$ и $x_8(t)$ на выходной сигнал САУ $x_{вых}(t)$. В этом случае статичность или астатичность САУ зависит от места расположения интегрирующего звена. Пусть часть САУ между выходом системы и точкой приложения воздействия будет внутренней, а остальная часть – внешней. Для выявления роли интегрирующего звена можно вынести его передаточную функцию как множитель к передаточным функциям внутренней части или внешней части. Для САУ на рис. 4.4 передаточные функции: внешней части – $W_{pez}(p)$, внутренней части – $W_{об}(p)$

Если интегрирующее звено находится во внешней части, то можно записать:

$$W_{зам}(p) = \frac{X_{вых}(p)}{X_3(p)} = \frac{W_{об}(p)}{1 + \frac{k}{p} W'_{pez}(p) W_{об}(p)} = \frac{p W_{об}(p)}{p + k W_{pez}(p) W_{об}(p)}$$

После перехода САУ в установившейся режим имеет место $p=0$:

$$k_{зам} = \frac{0 \cdot k_{об}}{0 + k_{pez} k_{об}} = 0$$

Следовательно, интегрирующее звено во внешней части САУ делает ее астатичной относительно воздействия.

Если интегрирующее звено находится во внутренней части, то передаточная функция замкнутой САУ следующая:

$$W_{зам}(p) = \frac{X_{вых}(p)}{X_3(p)} = \frac{\frac{k}{p} W'_{об}(p)}{1 + \frac{k}{p} W'_{об}(p) W_{pez}(p)} = \frac{k W'_{об}(p)}{p + k W'_{об}(p) W_{pez}(p)}$$

В установившемся режиме эта передаточная функция преобразуется в коэффициент передачи:

$$k_{зам} = \frac{k \cdot k_{об}}{0 + k \cdot k_{pez} k_{об}} = \frac{1}{k_{pez}} > 0$$

При таком $k_{зам}$ САУ будет статической по воздействию.

Таким образом, в зависимости от места приложения воздействия в САУ с интегрирующим звеном она может быть астатична относительно одних и статична относительно других воздействий.

Пример 4.2. Для структурной схемы на рис. 4.5 определить тип САУ относительно воздействий. Исходные данные: интегрирующее звено содержится в передаточной функции $W_k(p)$.

Система со структурной схемой на рис. 4.5 будет астатична относительно воздействия $X_{\epsilon 2}$ и статична относительно $X_{\epsilon 1}$. Относительно воздействия X_3 САУ статична поскольку интегрирующее звено оказывается во внутренней ее части.

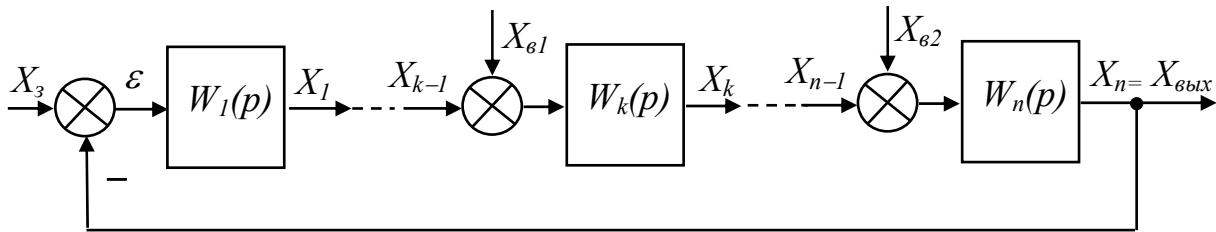


Рисунок 4.5 – Структурная схема одноконтурной САУ

Рассмотрим САУ точного воспроизведения. Характерной особенностью такой системы по отклонению является единичная обратная связь. Пусть задающее воздействие представляет собой постоянную величину $x_3(t) = const$.

Согласно (4.8) изображение ошибки определяется соотношением:

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(p)} X_3(p) \quad (4.9)$$

Преобразуем передаточную функцию разомкнутой системы к виду:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k_v \bar{K}(p)}{p^v \bar{D}(p)},$$

где $\bar{K}(p)$ и $\bar{D}(p)$ – нормированные полином воздействия и характеристический полином (при $p=0$ $\bar{K}(p)=1$ и $\bar{D}(p)=1$); k_v – коэффициент передачи разомкнутой САУ; v – порядок астатизма САУ.

Подставим выражение для $W_{\text{раз}}(p)$ в (4.9). С учетом этого получим следующее изображение ошибки:

$$\varepsilon(p) = \frac{p^v \bar{D}(p)}{p^v \bar{D}(p) + k_v \bar{K}(p)} X_3(p).$$

Согласно теореме о конечном значении оригинала установившаяся ошибка САУ равна:

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^v \bar{D}(p)}{p^v \bar{D}(p) + k_v \bar{K}(p)} X_3(p).$$

Рассмотрим случай когда задающее воздействие постоянно: $x_3(t) = x_0 = const$. В этом случае изображение для $x_3(t)$ равно $X_3(p) = x_0/p$. Подставим изображение $X_3(p)$ в выражение для ε_{∞} :

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\nu} \bar{D}(p)}{p^{\nu} \bar{D}(p) + k_{\nu} \bar{K}(p)} x_0 \quad (4.10)$$

$$\text{или } \varepsilon_{\infty} = W_{\varepsilon}(p=0) x_0. \quad (4.11)$$

Из (4.11) следует, что ошибка будет конечной, а система автоматического управления статической по точности при $W_{\varepsilon} = \text{const}$. Это возможно тогда, когда порядок астатизма системы $\nu=0$. В этом случае $p^0=1$ и нормированные полиномы тоже равны единице ($\bar{K}(p)=1$ и $\bar{D}(p)=1$), поэтому *установившаяся статическая ошибка* равна:

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{1}{1+k_0} x_0,$$

где k_0 – коэффициент передачи статической САУ в разомкнутом состоянии.

Коэффициентом статизма называется относительное значение установившейся ошибки:

$$S = \frac{\varepsilon_{\infty}}{x_0} = \frac{1}{1+k_0}.$$

Он определяет угол наклона α статической характеристики САУ. На рис. 4.6 приведена статическая характеристика САУ.

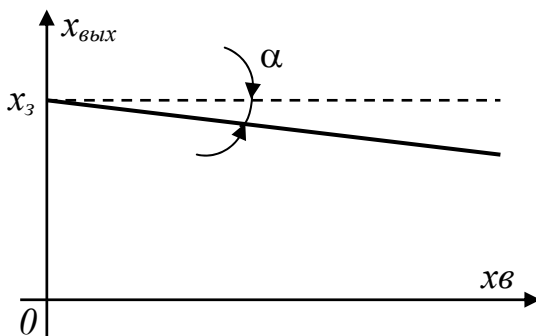


Рисунок 4.6 – Статическая характеристика САУ

Коэффициент статизма характеристики на рис. 4.6 равен тангенсу угла ее наклона $S = \text{tg}(\alpha)$. Точность системы – удовлетворительная, если коэффициент статизма системы $S = 0,1 \div 0,01$. Следовательно, передаточный коэффициент разомкнутой системы k_0 должен быть $10 \div 100$.

Таким образом, передаточная функция по ошибке $W_{\varepsilon}(p)$ в установившемся режиме при $\nu=0$ и $x_0 = \text{const}$ преобразуется в постоянную величину (коэффициент передачи больше нуля). Значение этого коэффициента передачи обратно пропорционально $k_{\text{раз}}$ статической САУ. Следовательно, чем больше k_0 тем меньше ошибка ε_{∞} , но с учетом ограничения $k_0 \leq k_{0,\text{пред}}$.

Из соотношений (4.9), (4.10) и (4.11) следует, что статическая ошибка $\varepsilon_{\infty}=0$ возможна при $W_{\varepsilon}(0)=0$ либо $W_{\text{раз}}(0)=\infty$. Последнее требует выполнение условия $\nu \geq 1$. При этом, при $\nu=1$ система имеет астатизм первого порядка, при $\nu=2$ второго порядка и т.д.

Пусть задающее воздействие определяется уравнением:

$$x_3(t) = x_0 \cdot t^n, \text{ где } n=0, 1, 2, \dots$$

Изменения этого воздействия во времени при $x_0=4$ приведено на рис. 4.7.

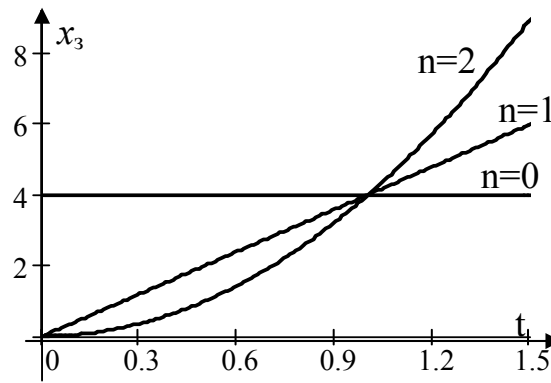


Рисунок 4.7 – Графики задающих воздействий

При $n=0$ задающее воздействие во времени не изменяется $x_3(t)=x_0$.

При $n=1$ $x_3(t)=x_0 t=Vt$, где $V=x_0$ – скорость. В этом случае задающее воздействие изменяется с постоянной скоростью. Установившаяся ошибка при обработке этого сигнала будет по скорости.

При $n=2$ $x_3(t)=x_0 t^2=\frac{a}{2}t^2$, где $a=2x_0$ – ускорение. Для такого воздействия установившаяся ошибка это ошибка по ускорению.

Учитывая, что изображение $x_3(t)=x_0 t^n$ это $X_3(p)=\frac{n!}{p^{n+1}}$, получим следующее выражение для нахождения установившейся ошибки:

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{v-n} \bar{D}(p)}{p^v \bar{D}(p) + k_v \bar{K}(p)} x_0 n! \quad (4.12)$$

Из (4.12) можно определить соотношения для определения установившихся ошибок САУ при разных значениях n и v .

В табл. 4.1 приведены величины установившихся ошибок для САУ со степенью астатизма $v=0, 1, 2$ и соответственно коэффициентами передачи в разомкнутом состоянии k_0, k_1, k_2 . Так как на практике применяются И, ПИ, ПИД регуляторы, то порядок астатизма САУ принят не больше двух.

Таблица 4.1 – Установившиеся ошибки САУ

Порядок астатизма	Установившаяся ошибка при разных типах $x_3(t)$		
	n=0	n=1	n=2
v=0 система статическая	$\varepsilon_{\infty} = \frac{1}{1+k_0} x_0$	$\varepsilon_{\infty} = \infty$	$\varepsilon_{\infty} = \infty$
v=1 система астатическая первого порядка	$\varepsilon_{\infty} = 0$	$\varepsilon_{\infty} = \frac{1}{k_1} V$	$\varepsilon_{\infty} = \infty$
v=2 система астатическая второго порядка	$\varepsilon_{\infty} = 0$	$\varepsilon_{\infty} = 0$	$\varepsilon_{\infty} = \frac{1}{k_2} a$

Установившийся режим САУ наступает после окончания переходного процесса. В этом режиме управляемая величина и сигнал ошибки имеют только вынужденную составляющую, т. е. они изменяются только под действием внешних воздействий. В зависимости от свойств САУ и вида внешнего воздействия ошибка: равна нулю; равна постоянной величине или неограниченно возрастает.

В свою очередь, свойства САУ характеризуются: передаточным коэффициентом $k_{раз}$ разомкнутой САУ; порядком астатизма системы ν – числом идеальных интегрирующих звеньев в разомкнутой САУ ($\nu = 0$ – статическая система; $\nu \geq 1$ – астатическая система по точности).

На рис. 4.8 приведены переходные процессы в САУ с различными степенями астатизма по точности при двух законах изменения задающего воздействия ($n=0$ и $n=1$). Соотношения для расчета установившейся ошибки выбирается по табл. 4.1

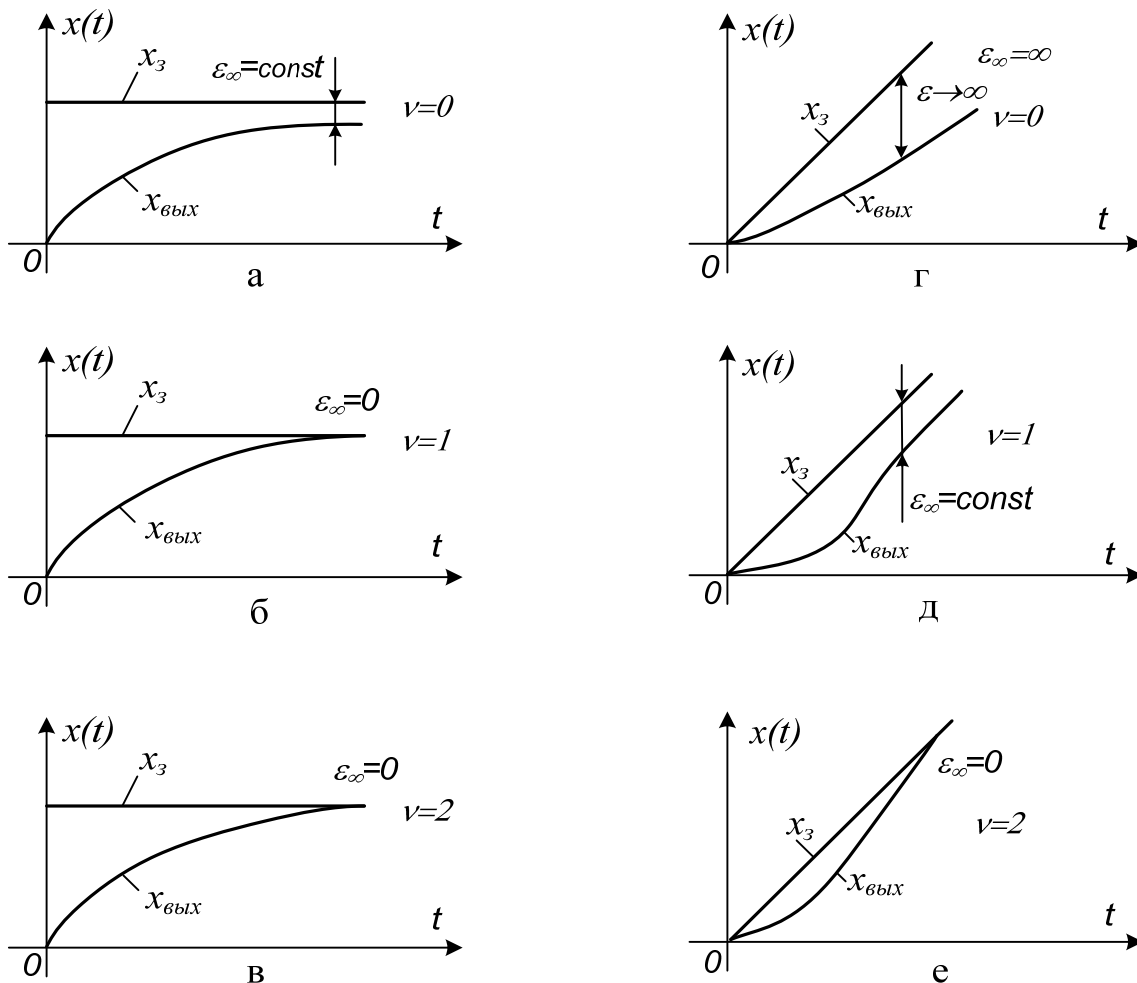


Рисунок 4.8 – Задающее воздействие $x_3(t)$ и переходные характеристики и $x_{вых}(t)$ САУ с разными ν при ступенчатом (а÷в) и линейном (г÷е) изменении $x_3(t)$

Пример 4.3. Определить установившуюся ошибку САУ структурная схема, которой приведена на рис. 4.9 при включенной и при отключенной местной обратной связи. Исходные данные: $T_1=0,1с$; $K_2=10$; $T_2=0,2с$ и два типа задающих воздействия $x_3(t)=1$; $x_3(t)=5 \cdot t$.

Тип САУ по точности зависит от того включена или отключена местная обратная связь. При включенной обратной связи система будет статической, а при отключенной – астатической.

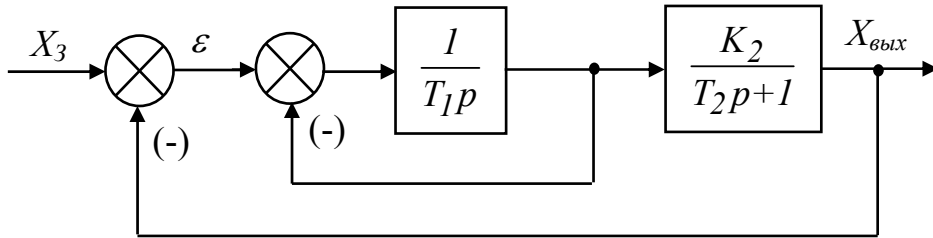


Рисунок 4.9 – Структурная схема САУ

При замыкании единичной отрицательной обратной связи интегрирующее звено оно преобразуется в апериодическое, поэтому САУ будет статической. Определим для этого случая установившуюся ошибку. Для этого нужно определить коэффициент передачи САУ в разомкнутом состоянии. В рассматриваемом случае структурная схема САУ имеет два контура. Для преобразования ее в одноконтурную определим передаточную функцию интегрирующего, охваченного обратной связью.

Эквивалентная передаточная функция определяется соотношением:

$$W_{ек}(p) = \frac{W_1(p)}{1+W_1(p)} = \frac{\frac{1/T_1}{p}}{1+\frac{1/T_1}{p}} = \frac{1}{T_1 p + 1},$$

где $K_{эк}=1$ – коэффициент передачи эквивалентного звена.

В соответствии с табл. 4.1 для двух типов задающего воздействия получим:

$$- \varepsilon_{\infty} = \frac{1}{1+k_0} x_3 = \frac{1}{1+10} 1 = 0,091 \text{ для } x_3(t)=1;$$

$$- \varepsilon_{\infty} = \infty \text{ при } x_3(t)=5 \cdot t.$$

При размыкании местной отрицательной связи САУ на рис. 4.8 становится одноконтурной состоящей из двух последовательно включенных звеньев интегрирующего и апериодического, поэтому она преобразуется в астатическую систему первого порядка $\nu=1$. Коэффициент передачи астатической (местная обратная связь отключена) САУ в разомкнутом состоянии:

$$k_1 = K_1 \cdot K_2 = \frac{1}{T_2} K_2 = \frac{1}{0,1} 10 = 100.$$

Согласно табл. 4.1 для двух типов задающего воздействия имеем:

$$- \varepsilon_{\infty} = 0 \text{ для } x_3(t)=1;$$

$$- \varepsilon_{\infty} = \frac{1}{k_1} V = \frac{1}{100} 5 = 0,05 \text{ при } x_3(t)=5 \cdot t.$$

5 ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

5.1 Общие сведения

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и САУ в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием. Они находят применение в ТАУ, так как реальные возмущения, а следовательно и реакции на них элемента или САУ могут быть представлены как сумма гармонических сигналов.

Рассмотрим *сущность* и *разновидности* частотных характеристик. Пусть на вход линейного элемента (рис. 5.1, а) в момент времени $t = 0$ подано гармоническое воздействие с частотой ω :

$$x(t) = x_m \sin(\omega t). \quad (5.1)$$

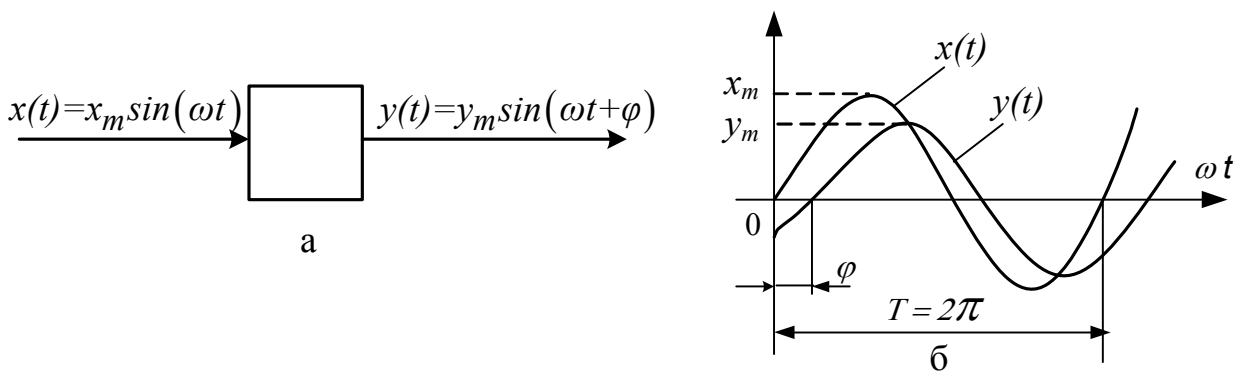


Рисунок 5.1 – Схема и кривые, поясняющие сущность частотных характеристик

По завершении переходного процесса установится режим вынужденных колебаний и выходная величина $y(t)$ будет изменяться по тому же закону, что и входная $x(t)$, но в общем случае с другой амплитудой x_m и с фазовым сдвигом φ по оси времени относительно входного сигнала (рис. 5.1, б):

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (5.2)$$

Проведя аналогичный опыт при том же x_m , но при другой частоте ω , можно увидеть, что амплитуда y_m и фазовый сдвиг φ изменились, т. е. они зависят от частоты. Можно убедиться также, что для другого элемента зависимости параметров y_m и φ от частоты ω иные. Поэтому такие зависимости могут служить характеристиками динамических свойств элементов.

В ТАУ наиболее часто используют следующие частотные характеристики:

- амплитудная частотная характеристика (АЧХ);
- фазовая частотная характеристика (ФЧХ);
- амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ).

Амплитудная частотная характеристика (АЧХ) – зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигналов от частот:

$$W(\omega) = \frac{y_m}{x_m}. \quad (5.3)$$

Характеристика АЧХ показывает, как элемент пропускает сигналы различной частоты. Пример АЧХ приведен на рис. 5.2, а.

Фазовая частотная характеристика ФЧХ – зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты. Эта характеристика показывает, какое отставание или опережение выходного сигнала по фазе создает элемент при различных частотах. Пример ФЧХ приведен на рис. 5.2, б.

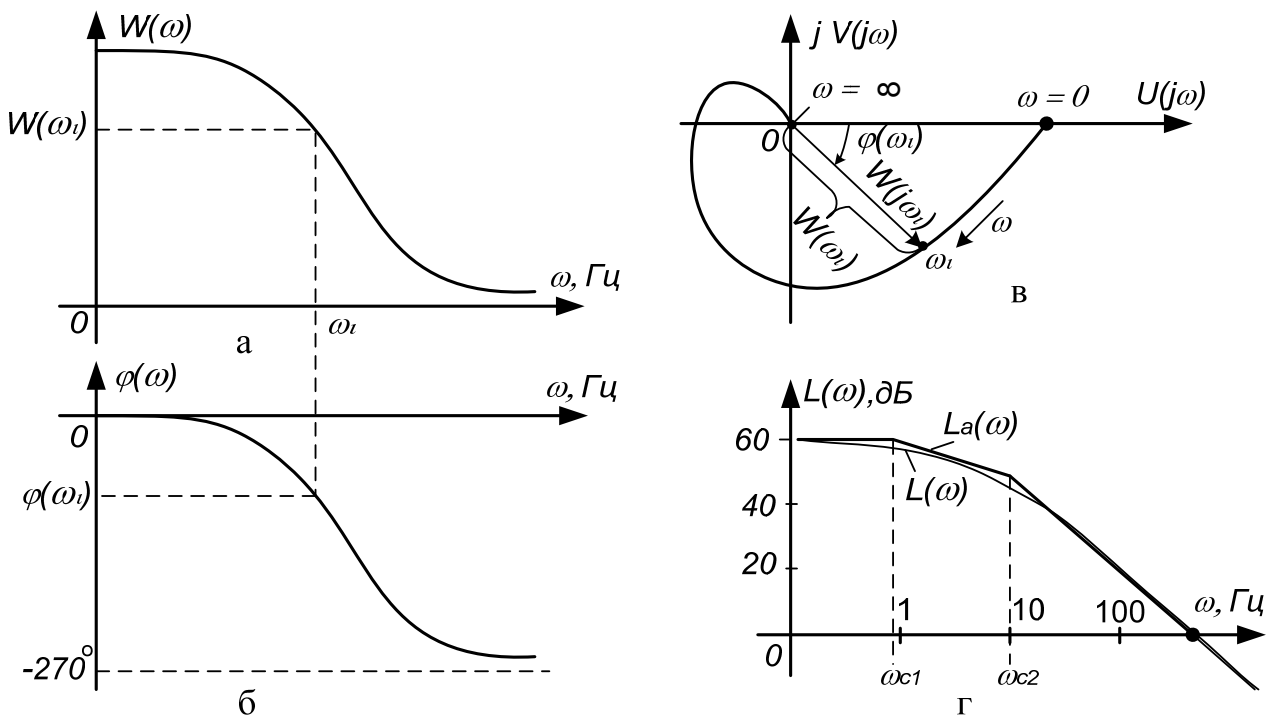


Рисунок 5.2 – Частотные характеристики:

а – амплитудная; б – фазовая; в – амплитудно-фазовая; г – логарифмическая

Амплитудную и фазовую характеристики можно объединить в одну общую – **амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ)**. АФЧХ представляет собой функцию комплексного переменного $j\omega$ и определяется **комплексной передаточной функцией (КПФ)**. Она представляет собой отношение выходного ко входному сигналу в комплексной форме. Для построения АФЧ используется показательная форма КПФ:

$$W(j\omega) = \frac{y_m e^{j(\omega t + \varphi)}}{x_m e^{j\omega t}} = W(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (5.4)$$

где $W(\omega)$ – модуль функции; $\varphi(\omega)$ – аргумент функции.

Каждому фиксированному значению частоты ω_i соответствует комплексное число $W(j\omega_i)$, которое на комплексной плоскости можно изобразить вектором, имеющим длину $W(\omega_i)$ и угол поворота $\varphi(\omega_i)$ (рис. 5.2, в). Отрицательные значения $\varphi(\omega)$, соответствующие отставанию выходного сигнала от входного, принято отсчитывать по часовой стрелке от положительного направления действительной части оси абсцисс.

При изменении частоты от нуля до бесконечности вектор $W(j\omega)$ поворачивается вокруг начала координат, при этом одновременно изменяется длина вектора. Кривая, которую при этом опишет конец вектора, и есть АФЧХ. Каждой точке характеристики соответствует определенное значение частоты.

Проекции вектора $W(j\omega)$ на действительную и мнимую оси называют соответственно *действительной* и *мнимой частотными характеристиками* и обозначают $U(\omega)$, $V(\omega)$. Это позволяет записать АФЧХ в алгебраической форме:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega). \quad (5.5)$$

АФЧХ, как и любую комплексную величину, можно также представить в тригонометрической форме:

$$W(j\omega) = W(\omega)\cos\varphi(\omega) + jW(\omega)\sin\varphi(\omega). \quad (5.6)$$

Аналитическое выражение для АФЧХ конкретного элемента можно получить из его передаточной функции путем подстановки $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}. \quad (5.7)$$

Связь между различными частотными характеристиками следующая:

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad (5.8)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (5.9)$$

При практических расчетах САУ (без применения ЭВМ) удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат. Такие характеристики называют *логарифмическими*. Они имеют меньшую кривизну и поэтому могут быть приближенно заменены ломаными линиями, составленными из нескольких прямолинейных отрезков. Причем, эти отрезки в большинстве случаев удается построить без громоздких вычислений при помощи некоторых простых правил. Кроме того, в логарифмической системе координат легко находить характеристики различных соединений элементов, так как умножению и делению обычных характеристик соответствует сложение и вычитание ординат логарифмических характеристик.

За единицу длины по оси частот логарифмических характеристик принимают декаду. *Декада* – интервал частот, заключенный между произвольным значением частоты ω_i и его десятикратным значением $10\omega_i$. Отрезок логарифмической оси частот, соответствующий одной декаде, равен 1. Это означает, что отрезок изображающий декаду имеет одну и ту же длину для любого участка оси частот:

$$\lg(10\omega) - \lg(\omega) = \lg(10) = 1.$$

Обычно в расчетах используют *логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАЧХ)*:

$$L(\omega) = 20\lg(W(\omega)) \quad (5.10)$$

ординаты, которой измеряют в логарифмических единицах – *Беллах* (Б) или *деци-Беллах* (дБ). В (5.10) значения $L(\omega)$ в дБ.

Белл – единица изменения мощностей двух сигналов. Если мощность одного сигнала больше (меньше) мощности другого сигнала в 10 раз, то эти мощности от-

личаются на 1 Б, ($\lg(10) = 1$). Так как мощность гармонического сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды, то при применении этой единицы для измерения отношения амплитуд перед логарифмом появляется множитель 2. Например, если на некоторой частоте $W(\omega) = 100$, то это означает, что мощности входного и выходного сигналов отличаются в 100^2 раз, т.е. на $2\lg 100 = 4$ Б или на 40 дБ, соответственно и $L(\omega) = 20\lg W(\omega) = 40$ дБ.

При построении фазовой частотной характеристики логарифмический масштаб применяют только для оси абсцисс (оси частоты).

На рис. 5.2, г показаны ЛАЧХ $L(\omega)$ (тонкая линия) и соответствующая ей приближенная (асимптотическая) характеристика $L_a(\omega)$ в виде прямолинейных отрезков (толстая линия). Частоты, соответствующие точкам стыковки отрезков, называют *сопрягающими* и обозначают ω_c .

По виду частотных характеристик все элементы делятся на две группы:

- минимально-фазовые,
- неминимально-фазовые.

Минимально-фазовый элемент – элемент, у которого все полюсы и нули передаточной функции $W(p)$ имеют отрицательные действительные части. Минимально-фазовые элементы дают минимальный фазовый сдвиг $\varphi(\omega)$ по сравнению с любыми другими элементами, имеющими такую же амплитудную характеристику $W(\omega)$, но у которой действительная часть хотя бы одного полюса или нуля положительна. Под полюсами понимают корни полинома знаменателя $D(p)$, а под нулями корни полинома числителя $K(p)$ передаточной функции $W(p)$. Минимально-фазовые элементы обладают важным для практических расчетов свойством: их частотная передаточная функция полностью определяется одной из трех составляющих – $W(\omega)$, $U(\omega)$ и $V(\omega)$. Это существенно упрощает задачи анализа и синтеза минимально-фазовых систем.

5.2 Частотные характеристики типовых динамических звеньев

Пропорциональное (усилительное) звено. Передаточная функция пропорционального звена $W(p) = k$. Путем замены оператора дифференцирования p на $j\omega$. Следовательно, КПФ этого звена $W(j\omega) = k$. Следовательно частотные характеристики пропорционального звена определяются следующими соотношениями:

$$W(j\omega) = k, \quad U(\omega) = k, \quad V(\omega) = 0$$

$$W(j\omega) = k; \quad \varphi(\omega) = 0$$

Таким образом, амплитудно-фазовая характеристика усилительного звена равна его коэффициенту передачи и не зависит от частоты. Она вырождается в точку, расположенную на вещественной оси на расстоянии k от начала координат (рис. 5.3,а). Модуль КПФ $W(\omega)$ постоянен на всех частотах и равен k (рис. 5.3,б), а фазовые сдвиги равны нулю $\varphi(\omega)$ равны нулю. Воздействия любой частоты, поступающие на вход этого звена, усиливаются в одинаковой степени без фазового сдвига. ЛАЧХ звена определяется выражением: $L(\omega) = 20\lg k$ и представляет собой прямую парал-

тельную ось частот (рис. 5.3,в). Она проходит на расстоянии $20\lg k$ от оси частот. Частотные характеристики звена приведены на рис. 5.3.

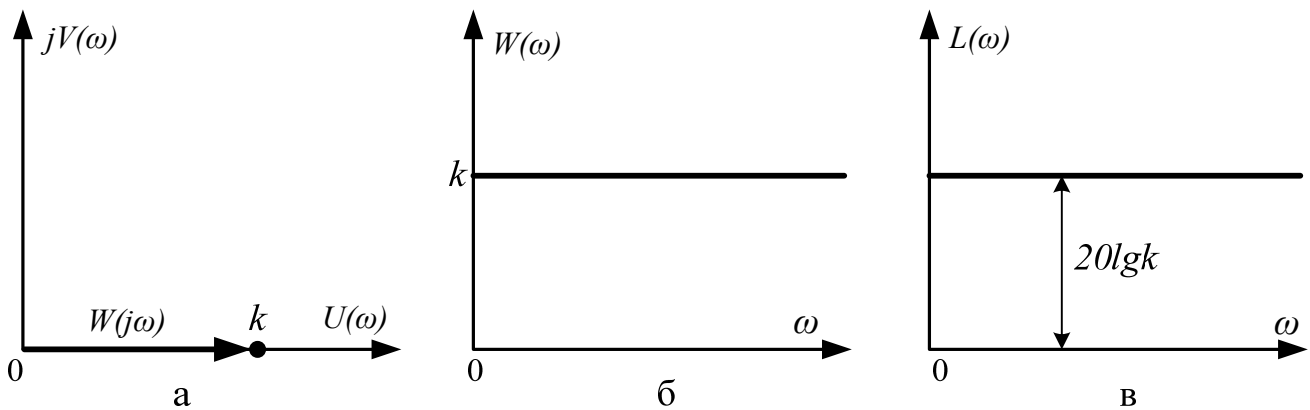


Рисунок 5.3 – частотные характеристики пропорционального звена

2. Интегрирующее звено. Из передаточной функции звена от p определяем следующие соотношения:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -\frac{k}{\omega}; \quad W(j\omega) = \frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}};$$

$$U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = -\frac{k}{\omega};$$

$$W(\omega) = \frac{k}{\omega}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

Частотные характеристики интегрирующего звена приведены на рис. 5.4

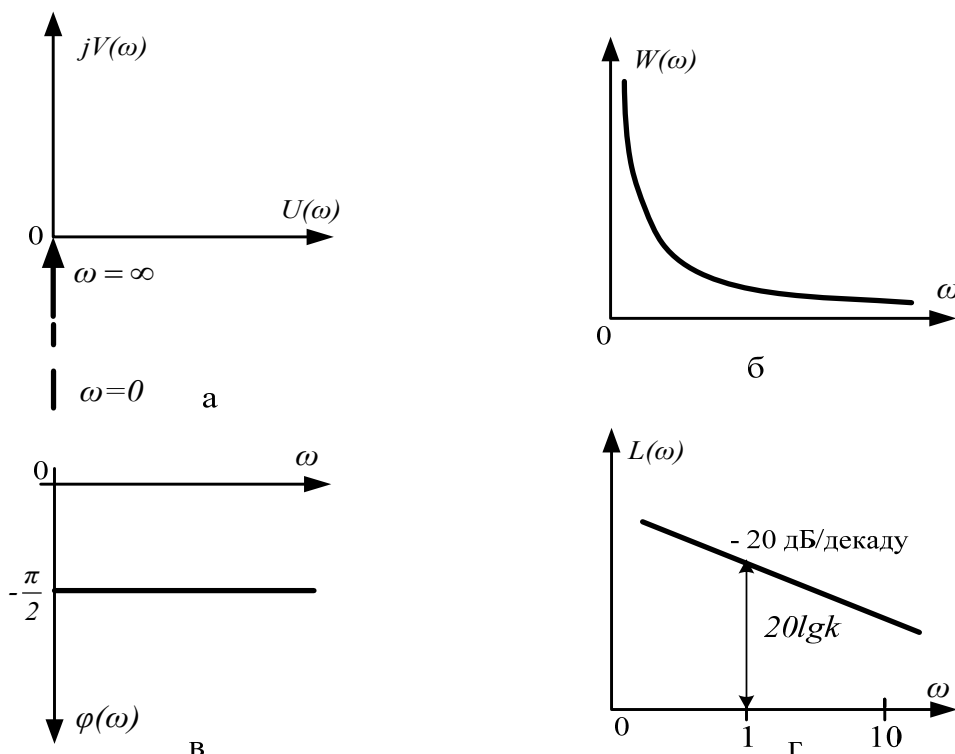


Рисунок 5.4 – Частотные характеристики интегрирующего звена

Из частотных характеристик звена интегрирующего звена следует :

а) амплитудно-фазовая характеристика звена $W(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ совпадает с отрицательной мнимой полуосью (рис. 5.4,а): при $\omega=0$ имеем $W(\omega)=\infty$, с увеличением частоты $W(\omega)$ уменьшается и при $\omega=\infty$ получим $W(\omega)=0$;

б) при всех частотах выходные колебания отстают по фазе от входных на угол 90° , т.е. он от частоты не зависит (рис. 5.4,в);

в) амплитудно-частотная характеристика $W(\omega)$ представляет собой гиперболу, т.е. чем меньше частота входного сигнала, тем больше этот сигнал усиливается звеном (рис. 5.4,б). При $\omega = 0$ коэффициент усиления равен бесконечности и, наоборот, при $\omega = \infty$ коэффициент усиления звена равен нулю.

Логарифмируя $W(\omega)$ получим $L(\omega)=20\lg k-20\lg\omega$. Следовательно ЛАЧХ звена представляет собой прямую проходящую с наклоном -20 дБ/декаду (рис. 5.4,г). При $\omega=1$ она имеет ординату $20\lg k$.

Инерционное звено первого порядка. Из передаточной функции звена находим его амплитудно-фазовую частотную характеристику:

$$W(j\omega)=\frac{k}{1+j\omega T}=\frac{k(1-j\omega T)}{T^2\omega^2+1}$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики:

$$U(\omega)=\frac{k}{T^2\omega^2+1} \text{ и } V(\omega)=-\frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

Амплитудно– и фазо–частотные характеристики имеют вид:

$$W(\omega)=\frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}; \quad \varphi(\omega)=-\arctg T\omega.$$

Задаваясь значениями ω по выражениям для $U(\omega)$ и $V(\omega)$ можно построить амплитудно-фазовую характеристику звена. Определим уравнение кривой $W(j\omega)$ в явной форме как функцию. Для этого выполним сложение выражений для вещественной и мнимой частотных характеристик:

$$U(\omega)+V(\omega)=\frac{k(1-T\omega)}{T^2\omega^2+1}.$$

Возведем во вторую степень левую и правую часть этого равенства:

$$U^2(\omega)+V^2(\omega)+2U(\omega)V(\omega)=\frac{k^2(T^2\omega^2-2T\omega+1)}{(T^2\omega^2+1)^2}. \quad (5.11)$$

Выполним преобразование правой части полученного равенства:

$$\frac{k^2(T^2\omega^2 - 2T\omega + 1)}{(T^2\omega^2 + 1)^2} = U(\omega) \left(k \frac{T^2\omega^2 + 1}{T^2\omega^2 + 1} - \frac{2T\omega}{T^2\omega^2 + 1} \right) = U(\omega)(k + 2V(\omega)).$$

Подставим в (5.11) вместо правой части полученное выражение:

$$U^2(\omega) + V^2(\omega) + 2U(\omega)V(\omega) = U(\omega)(k + 2V(\omega)), \text{ откуда получим}$$

$$U^2(\omega) + V^2(\omega) - kU(\omega) = 0$$

Прибавим к обеим частям последнего равенства слагаемое $(k/2)^2$. В результате получим уравнение окружности:

$$V^2(\omega) + \left(U(\omega) - \frac{k}{2} \right)^2 = \left(\frac{k}{2} \right)^2$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика звена приведена на рис. 5.5,а.

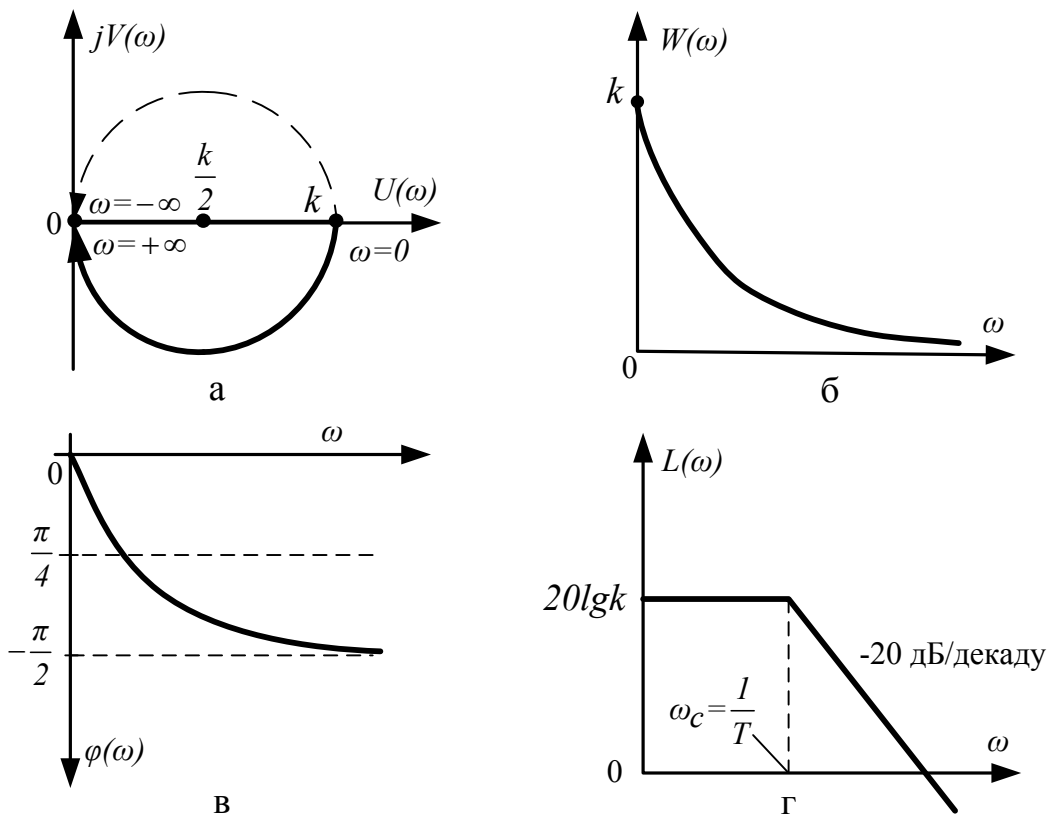


Рисунок 5.5 – Частотные характеристики инерционного звена первого порядка

АФЧЧ звена имеет вид окружности с радиусом $k/2$, центр которой расположен на положительной вещественной полуоси в точке с координатами $(k/2, 0)$. Окружность касается мнимой оси в начале координат. Изменениям ω от 0 до $+\infty$ соответствует полуокружность, расположенная в четвертом квадранте, а изменениям ω от 0 до $-\infty$ это полуокружность в первом квадранте. **Физический смысл имеют изменение частоты ω от 0 до $+\infty$.** Усиление звена по амплитуде при увеличении частоты уменьшается. Это уменьшение тем сильнее, чем больше постоянная времени. С ростом частоты увеличивается также фазовый сдвиг выходных колебаний по отно-

шению к входным. Фазо-частотная характеристика (рис. 5.5,в) звена отрицательна, следовательно выходные колебания по фазе отстают от входных. При одной и той же частоте фазовый сдвиг тем больше, чем больше постоянная времени звена. При небольших частотах ($\omega \sim 0$) инерционное звено ведет себя, как усилительное звено с коэффициентом усиления k . При больших частотах выходная величина по модулю стремится к нулю, а ее фаза $\varphi(\omega)$ - к значению $-\pi/2$. Амплитудно-частотная характеристика приведена рис. 5.5,б.

Логарифмируя выражение для $W(\omega)$ находим: выражение $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$ для построения ЛАЧХ (рис. 5,г). При $\omega \leq \frac{1}{T}$ ($T^2 \omega^2 \approx 0$) ЛАЧХ можно представить в виде горизонтальной прямой $L(\omega) = 20 \lg k$. Причем $\omega_c = \frac{1}{T}$ это частота сопряжения. Для частот больше чем сопрягающая частота можно пренебречь под корнем единицей. При этом получим выражение прямой линии с наклоном -20 дБ/декаду:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega T.$$

Идеальное дифференцирующее звено. Частотные характеристики идеального дифференцирующего звена определяются следующими выражениями:

$$W(j\omega) = j\omega k;$$

$$U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = \omega k;$$

$$W(\omega) = \omega k; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

Из приведенных соотношений следует, что АФЧХ совпадает с осью положительных мнимых чисел: при $\omega = 0$ имеет модуль $W(\omega) = 0$, а при $\omega = \infty$ имеет модуль $W(\omega) = \infty$ (рис. 5.6,а).

Аргумент $\varphi(\omega)$ (рис. 5.6,в) не зависит от частоты и равен 90° . АФЧХ это прямая выходящая из начала координат под углом $\arctg(k)$ на рис. 5.6,б.

Логарифмируя выражение для $W(\omega)$ получим:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega T.$$

Следовательно ЛАЧХ этого звена прямая линия с наклоном $+20$ дБ/декаду (рис. 5.6,г). При $\omega = 1$ ордината характеристики равна $20 \lg k$.

Особенности частотных характеристик реального дифференцирующего звена следующие.

При большой частоте входных колебаний ($\omega \rightarrow \infty$) реальное дифференцирующее звено ведет себя, как усилительное звено с коэффициентом усиления k . При одной и той же частоте входных колебаний амплитуда выходных колебаний тем больше, чем больше постоянная времени звена; при этом также уменьшается сдвиг фаз между входными и выходными колебаниями. Так как $\varphi(\omega) > 0$, то выходные колебания опережают по фазе входные колебания. При малых частотах ($\omega \sim 0$) это опережение равно 90° , а коэффициент усиления равен нулю.

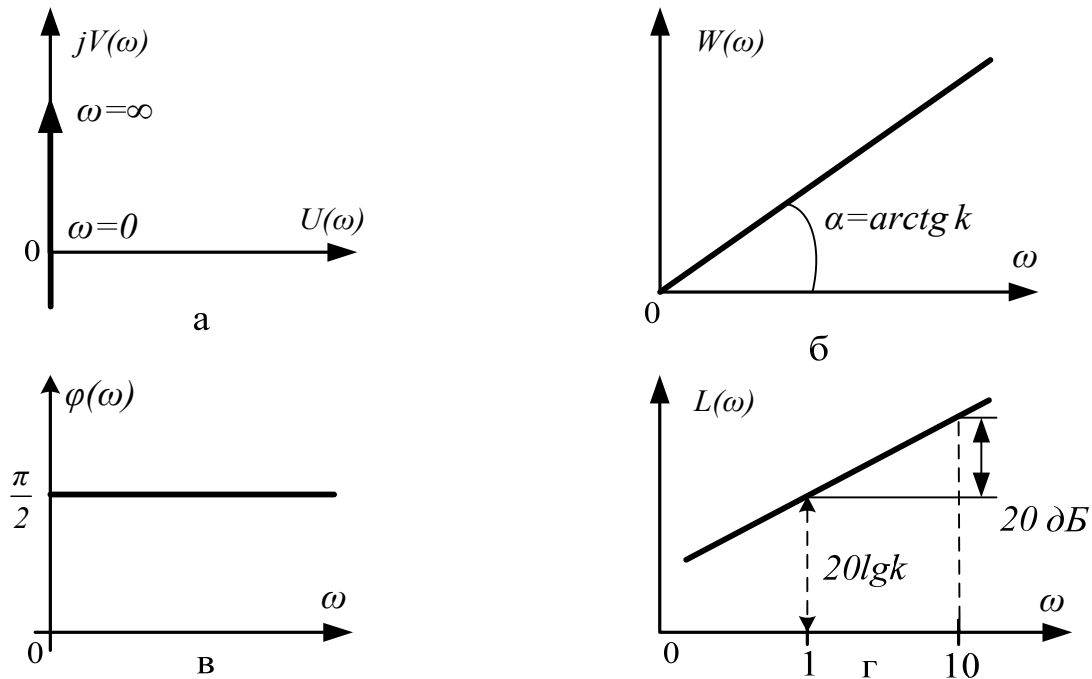


Рисунок 5.6 – Частотные характеристики идеального дифференцирующего звена

Инерционное звено второго порядка. На основании передаточной функции инерционного звена второго порядка комплексная передаточная функция звена следующая:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T_2^2 + j\omega T_1}$$

Вещественная и мнимая частотная характеристики:

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T_2^2 \omega^2)}{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}, \quad V(\omega) = \frac{kT_1 \omega}{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}.$$

Амплитудно – и фазо – частотная характеристики:

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2}.$$

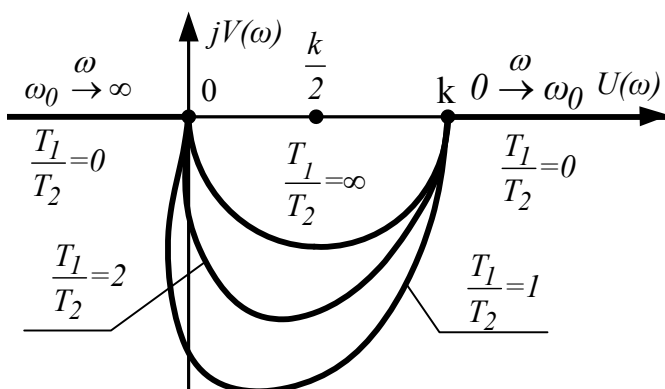


Рисунок 5.7 – АФЧХ звена

На рис. 5.7 изображена амплитудно-фазовая частотная характеристика звена.

Она начинается на вещественной оси в точке с абсциссой, равной k . Вид амплитудно-фазовой характеристики определяется величиной отношения постоянных времени T_1/T_2 . Амплитудно-частотные характеристики инерционного звена второго порядка для различных

значений постоянных времени представлены на рис. 5.7. При $T_1/T_2=0$ имеем $T_1=0$. в этом случае получим КПФ консервативного звена:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1-T_2^2\omega^2}.$$

Как известно, при подаче на вход такого звена сколь угодно малого сигнала на выходе его возникают незатухающие с одинаковой амплитудой синусоидальные колебаний с частотой $\omega_0=1/T_2$. С учетом этого имеем:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 T_2^2 \omega_0^2}$$

Заменим $T_2\omega_0$ на 1. В результате КПФ консервативного звена преобразуется к виду:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Из полученного выражения следует, что АФЧХ консервативного звена состоит из двух полупрямых. Первая начинается в точке с координатами $(k, 0)$ при $\omega=0$. При возрастании частоты от нуля до ω_0 уходит в бесконечность по положительной вещественной оси. При изменении частоты от ω_0 до ∞ возвращается по отрицательной вещественной оси в начало координат.

При $T_2=0$ будет $T_1/T_2=\infty$. В этом случае передаточная функция инерционного звена второго порядка преобразуется в передаточную функцию апериодического звена. Его АФЧХ, как уже отмечалась ранее, это полуокружность с центром в точке $(k/2, 0)$ и расположена в четвертом квадранте. Начинается характеристика при $\omega=0$ в точке $(k, 0)$, а заканчивается при $\omega=\infty$ в начале координат.

При T_1/T_2 имеющем конечное значение АФЧХ на рис. 5.7 будет соответствовать инерционному звену второго порядка. Ее вид напоминает полуэллипс. С Уменьшением отношения постоянных времени звена T_1/T_2 максимум характеристики увеличивается и одновременно смещается в направлении отрицательной полуоси.

На рис. 5.8 представлены амплитудная $W(\omega)$ и фазо-частотная $\varphi(\omega)$ характеристики звена.

В случае колебательного переходного процесса $T_1/T_2 > 2$ амплитудно-частотная характеристика имеет резонансный максимум с коэффициентом усиления амплитуды значительно большим коэффициента передачи звена k . Из фазо-частотной характеристики следует, что $\varphi(\omega)$ изменяется от 0^0 до -180^0 и на частоте $\omega_0=1/T_2$ сдвиг по фазе равен -90^0 .

Логарифмируя выражение для $W(\omega)$ инерционного звена второго порядка получим:

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg \sqrt{(1-T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2}$$

Разделим выражение под корнем на $T_2^2 \omega_0^2$ и учтем $T_2 \omega_0 = 1$:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{T_1^2}{T_2^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

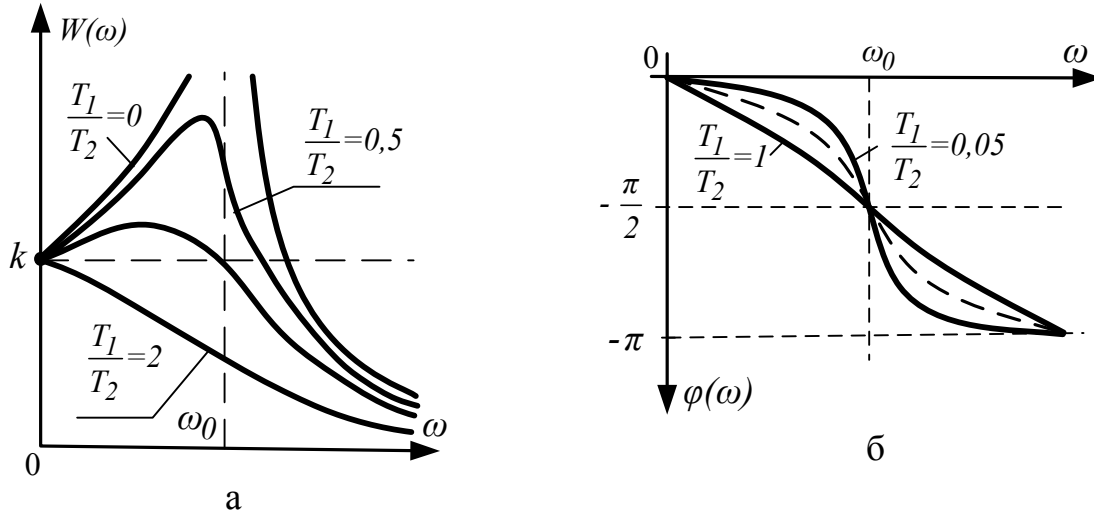


Рисунок 5.8 – Амплитудная (а) и фазо-частотная характеристики звена

Для области низких частот, где $\omega < 1/T_2$ можно пренебречь членами $T_2^2 \omega^2$ и $T_1^2 \omega^2$ по сравнению с единицей ($20 \lg \sqrt{1} = 0$), поэтому имеем следующее выражение для построения низкочастотной асимптоты ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg k.$$

При $k=1$ низкочастотная асимптота будет совпадать с осью частот (уровень 0 дБ).

В области высоких частот $\omega > 1/T_2$, поэтому имеют место соотношения $1 \ll T_2^2 \omega^2$ и $T_1^2 \omega^2 \ll T_2^2 \omega^2$ получим такое приближенное равенство:

$$\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2} \approx T_2 \omega.$$

Следовательно, выражение для построения высокочастотной асимптоты:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 40 \lg \omega T_2.$$

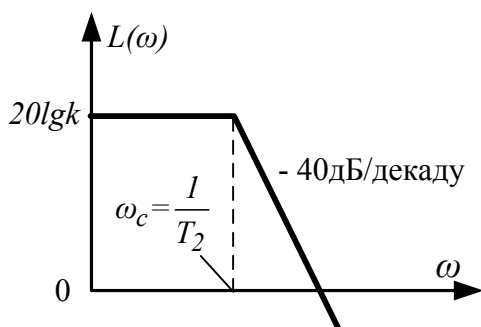


Рисунок 5.9 – ЛАЧХ звена

Асимптотическая ЛАЧХ инерционного звена второго порядка приведена на рис. 5.9.

Таким образом, асимптотическая ЛАЧХ инерционного звена второго порядка изображается двумя отрезками прямых: горизонтальной и отрезком с наклоном -40 дБ/декаду . Частота сопряжения равна $\omega_c = 1/T_2$.

Запаздывающее звено. В соответствии с выражением для передаточной функции запаздывающего звена его частотные характеристики определяются следующими соотношениями:

$$W(j\omega) = e^{j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau),$$

$$U(\omega) = \cos(\omega\tau); \quad V(\omega) = -\sin(\omega\tau),$$

$$W(\omega) = 1; \quad \varphi(\omega) = -\omega\tau$$

Так как амплитудно-частотная характеристика равна единице и не зависит от частоты, а фазо-частотная характеристика пропорциональна частоте с коэффициентом пропорциональности, равным τ , то амплитудно-фазовая характеристика представляет собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 5.9, а).

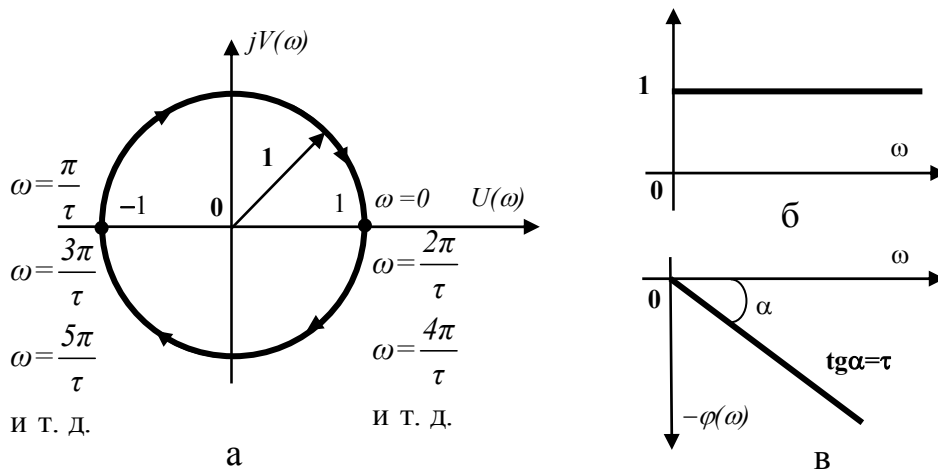


Рисунок 5.9 – Частотные характеристики запаздывающего звена

При $\omega = 0$ вектор амплитудно-фазовой характеристики совпадает с положительной вещественной полуосью и конец его расположен в точке $(1, j0)$. При увеличении частоты конец вектора амплитудно-фазовой характеристики поворачивается вдоль окружности по часовой стрелке, так как фазо-частотная характеристика отрицательна. При бесконечном увеличении частоты вектор $W(j\omega)$ бесчисленное число раз поворачивается вокруг начала координат. При его повороте на 360° он займет первоначальное положение. Так как приращение фазы при этом будет равно -2π , то $\varphi(\omega) = -\omega\tau = -2\pi$. Следовательно, в исходное положение вектор амплитудно-фазовой характеристики вернется при частоте $\omega = 2\pi/\tau$. При дальнейшем увеличении частоты вектор $W(j\omega)$ будет занимать исходное положение при частотах $4\pi/\tau$, $6\pi/\tau$, $8\pi/\tau$ и т. д.

6 АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ САУ

6.1 Общие сведения

Устойчивость САУ – свойство системы возвращаться в состояние равновесия после прекращения изменения воздействия, выведшего систему из этого состояния.

Неустойчивая САУ не возвращается в состояние равновесия, а непрерывно удаляется от него

От устойчивости САУ зависит ее работоспособность. Система, не обладающая устойчивостью, вообще не способна выполнять функции управления и имеет нулевую или даже отрицательную эффективность. Неустойчивая система может привести управляемый объект в аварийное состояние. Поэтому проблема устойчивости систем является одной из *центральных* в теории автоматического управления.

Проявлением, по которому можно судить об устойчивости или неустойчивости системы, является характер изменения ее сигналов во времени, например, управляемой величины $x_{вых}(t)$. Если управляемая величина $x_{вых}(t)$ после прекращения изменения, например, задающего воздействия $x_3(t)$ становится с течением времени постоянной, то система ведет себя *устойчиво*. Если же управляемая величина $x_{вых}(t)$ – возрастает, то система ведет себя *неустойчиво*.

Рассмотрим *причины* неустойчивости САУ.

Неустойчивость САУ возникает, как правило, из-за неправильного (*положительного*) или очень *сильного* действия главной обратной связи. В результате чего в систему в режиме гармонических колебаний непрерывно поступает (закачивается) энергия. Энергия системы увеличивается. Увеличиваются и связанные с ней режимные параметры, например, регулируемая величина. Такое явление в технике получило название *резонанса*.

Причинами неправильного действия главной обратной связи САУ:

- выполнение главной обратной связи САУ по ошибке *положительной* вместо отрицательной, что практически при любых параметрах делает систему неустойчивой.

- значительная *инерционность* элементов замкнутого контура САУ (например, объекта управления), из-за которой в режиме колебаний системы сигнал главной обратной связи (например, регулируемая величина) значительно отстает от входного сигнала (например, задающего воздействия) и оказывается с ним в фазе. Это означает, что связь, выполненная конструктивно как отрицательная, в динамическом режиме (режиме гармонических колебаний) начинает на определенной частоте действовать как положительная. Это ведет к раскачиванию системы и нарушению ее устойчивости.

Задачами анализа устойчивости САУ обычно являются:

- определение устойчивости или неустойчивости системы при заданных параметрах;

- определение допустимого по условиям устойчивости диапазона изменения некоторых заданных параметров системы;

- выяснение принципиальной возможности устойчивости системы при заданной ее структуре.

Согласно данному выше физическому определению устойчивость определяется характером движения системы, когда воздействия, выведшие ее из состояния равновесия, прекратили действовать или изменяться во времени. Такое движение системы называют *свободным*. Оно происходит за счет внутренней энергии самой системы и зависит только от ее свойств (параметров).

Свободное движение линейной или линеаризованной САУ описывается однородным дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{d^n x_{\text{вых}}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_{\text{вых}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x_{\text{вых}}(t) = 0, \quad (6.1)$$

где $x_{\text{вых}}(t)$ – свободная составляющая выходной (управляемой) величины системы.

Вынужденная составляющая выходной величины зависит от вида внешнего воздействия и соответственно от левой части уравнения:

$$b_0 \frac{d^m x_{\text{вх}}(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_{\text{вх}}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x_{\text{вх}}(t) = a_0 \frac{d^n x_{\text{вых}}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_{\text{вых}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x_{\text{вых}}(t)$$

на устойчивость системы не влияет.

С математической точки зрения:

– **система устойчива**, если свободная составляющая $x_{\text{вых}}(t)$ переходного процесса с течением времени стремится к нулю;

– **система неустойчива**, если свободная составляющая $x_{\text{вых}}(t)$ переходного процесса с течением времени неограниченно возрастает;

– **система находится на границе устойчивости**, если свободная составляющая $x_{\text{вых}}(t)$ переходного процесса с течением времени не стремится ни к нулю, ни к бесконечности.

Решение уравнения (6.1) равно сумме:

$$x_{\text{вых}}(t) = \sum_{k=1}^n C_k \exp(p_k t), \quad (6.2)$$

где C_k – постоянные, зависящие от начальных условий; p_k – корни характеристического уравнения:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (6.3)$$

Корни характеристического уравнения могут быть действительными ($p_k = \alpha_k$), мнимыми ($p_k = j\beta_k$) и комплексными ($p_k = \alpha_k \pm j\beta_k$). При этом комплексные корни всегда попарно сопряжены между собой: если есть корень с положительной мнимой частью, то обязательно существует корень с такой же по модулю, но отрицательной мнимой частью.

Переходная составляющая (6.2) при времени $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю лишь в том случае, если каждое слагаемое вида $C_k \exp(p_k t) \rightarrow 0$. Характер этой функции времени зависит от вида корня p_k . На рис. 6.1 изображены возможные случаи рас-

положения корней p_k на комплексной плоскости и соответствующие им функции $x_k(t)$, которые показаны внутри окружностей.

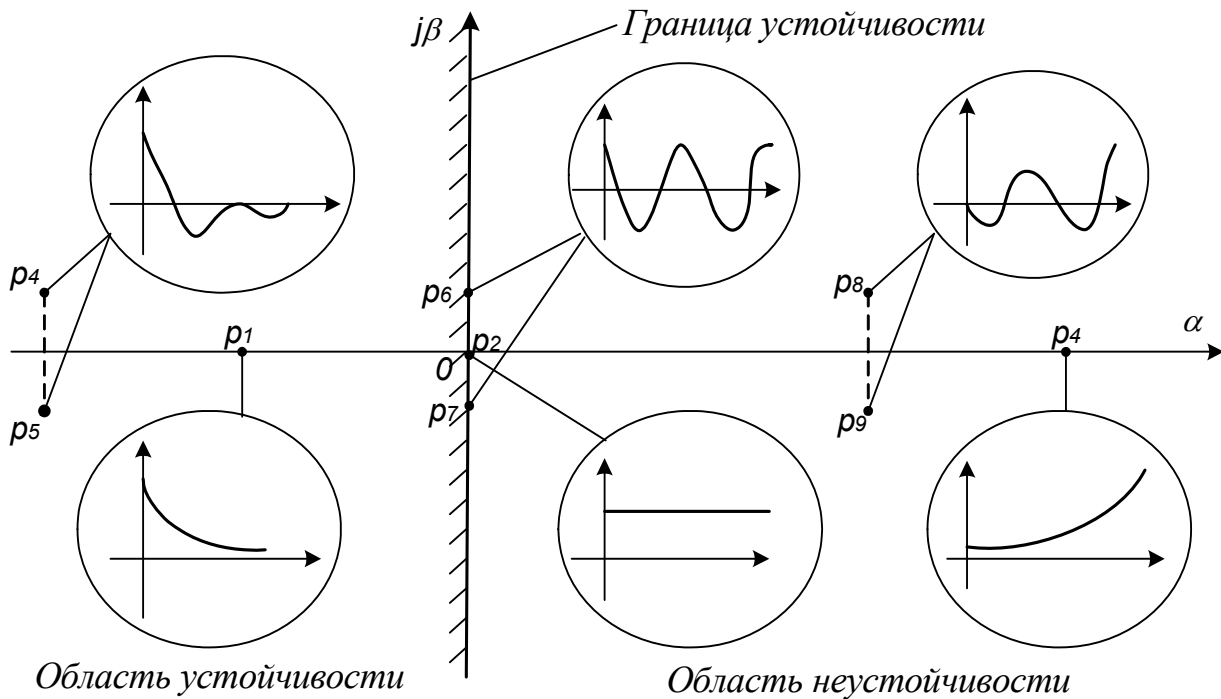


Рисунок 6.1 – Влияние корней характеристического уравнения САУ на составляющие ее свободного движения

Анализ кривых на рис.1 позволяет сформулировать **общее математическое условие устойчивости**: для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения системы были отрицательными (или чтобы все корни характеристического уравнения системы располагались в левой части комплексной плоскости).

Устойчивость системы зависит только от вида корней характеристического уравнения и не зависит от характера внешних воздействий на систему, т. е. устойчивость есть внутреннее свойство системы, присущее ей вне зависимости от внешних условий.

Если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть (располагается в правой части комплексной плоскости), то система будет неустойчивой.

Мнимая ось $j\beta$ является границей устойчивости в плоскости корней. Если характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней ($p_k = +j\beta_k$, $p_k = -j\beta_k$), а все остальные корни находятся в левой части комплексной плоскости, то в системе устанавливаются незатухающие гармонические колебания с круговой частотой $\omega = |\beta_k|$. В этом случае говорят, что система находится на *колебательной границе устойчивости*.

Если характеристическое уравнение имеет нулевой корень ($\beta = 0$), то система находится на *апериодической границе устойчивости*. Если таких корней два, то система неустойчива.

Характеристическое уравнение САУ можно составлять не только по дифференциальному уравнению (6.1) ее свободного движения, но и по ее структурной

схеме (рис. 4.1) с известными передаточными функциями звеньев. Для этой схемы были получены следующие соотношения:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{pez}(p)W_{об}(p)}{1 + W_{pez}(p)W_{об}(p)W_{ос}(p)},$$

$$W_{раз}(p) = W_{pez}(p) W_{об}(p) W_{ос}(p).$$

Пусть передаточная функция САУ определяется соотношением $W(p)=K(p)/D(p)$. С учетом этого имеем:

$$W_{раз}(p) = \frac{K_{pez}(p)K_{об}(p)K_{ос}(p)}{D_{pez}(p)D_{об}(p)D_{ос}(p)} \quad \text{и} \quad (6.4)$$

$$W_{зам}(p) = \frac{K_{pez}(p)K_{об}(p)D_{ос}(p)}{D_{pez}(p)D_{об}(p)D_{ос}(p) + K_{pez}(p)K_{об}(p)K_{ос}(p)} \quad (6.5)$$

Уравнение движения *типовой замкнутой САУ* следующее:

$$X_{вых}(p) = W_{зам}(p) X_3(p) = \frac{W_{pez}(p)W_{об}(p)}{1 + W_{pez}(p)W_{об}(p)W_{ос}(p)} X_3(p)$$

или с учетом (6.5) имеем:

$$X_{вых}(p) = \frac{K_{pez}(p)K_{об}(p)D_{ос}(p)}{D_{pez}(p)D_{об}(p)D_{ос}(p) + K_{pez}(p)K_{об}(p)K_{ос}(p)} X_3(p). \quad (6.6)$$

Полагая в уравнении (6.5) $X_3(p) = 0$, получим уравнение свободного движения САУ:

$$\left[D_{pez}(p)D_{об}(p)D_{ос}(p) + K_{pez}(p)K_{об}(p)K_{ос}(p) \right] X_{вых}(p) = 0. \quad (6.7)$$

Следовательно, характеристическое уравнение *замкнутой АСУ* получается приравнением нулю знаменателя $W_{зам}(p)$ или суммы полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (6.4) разомкнутой САУ:

Поскольку алгебраические уравнения высокого порядка не решаются в общем виде то отыскание их корней затруднительно. Поэтому предложены критерии, позволяющие, не решая уравнения определить, имеет ли оно или нет корни с положительной вещественной частью. Различают *алгебраические* и *частотные* критерии устойчивости.

Алгебраические критерии устанавливают необходимые и достаточные условия отрицательности корней в форме ограничений, накладываемых на определенные комбинации коэффициентов характеристического уравнения системы. Наибольшее распространение в инженерной практике нашли *алгебраические критерии Гурвица и Рауса*. Эти критерии практически идентичны, но сформулированы по-разному. Причем, алгебраический критерий Гурвица является более наглядным.

Частотные критерии определяют связь между устойчивостью системы и формой ее частотных характеристик. В инженерной практике наиболее часто используются частотные критерии устойчивости Михайлова и Найквиста.

6.2 Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

В начале из коэффициентов характеристического полинома для замкнутой САУ:

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n \text{ или } a_n + a_1 p + a_{n-1} p^2 + \dots + a_0 p^n.$$

$$\begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_{n-1} \\ \dots \\ \Delta_n \end{array} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{array} \right]$$

Рисунок 6.8 – Матрица Гурвица

Затем составляется матрица Гурвица (рис. 6.8). Для этого на главной диагонали определителя n порядка располагают коэффициенты от a_1 до a_n . Затем в каждой строке влево и вправо вписывают соответственно коэффициенты с нечетными или четными индексами. Недостающие коэффициенты заменяются нулями. Определители $\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \dots$ получают последовательным вычеркиванием последних строк и столбцов определителей.

В матрице Гурвица можно выделить

n – определителей:

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}; \quad \dots; \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

Критерий Гурвица формулируется следующим образом. Для устойчивости САУ необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительны и достаточно, чтобы все определители Гурвица тоже были положительны: $\Delta_1 > 0; \Delta_2; \dots; \Delta_n > 0$.

Отрицательный знак любого коэффициента означает, что САУ структурно неустойчива т.е. она не может быть приведена к устойчивости изменением значений коэффициентов и требует изменения структуры САУ. При нулевых коэффициентах система находится на границе устойчивости. Определитель $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, и если $a_n > 0$, то достаточно при использовании критерия ограничиться условием $\Delta_{n-1} > 0$. При $a_n = 0$ система находится на границе апериодической, а при $\Delta_{n-1} = 0$ на границе колебательной неустойчивости.

Предельный коэффициент усиления САУ. При рассмотрении передаточной функции САУ по ошибке было показано, что для уменьшения ошибки управления в установившемся режиме нужно повышать коэффициент $k_{раз}$. При некотором $k_{раз}$ устойчивая система превращается в неустойчивую. Коэффициент усиления (передачи) системы $k_{раз.пр}$ соответствующей границе устойчивости, называется *предельным коэффициентом передачи САУ в разомкнутом состоянии*. Для устойчивости системы необходимо соблюдение следующего условия:

$$k_{раз} < k_{раз.пр}$$

Пример 6.1. Для замкнутой САУ с передаточной функцией:

$$W_{раз}(p) = \frac{k_y k_g k_r}{(T_y p + 1)(T_e p + 1)(T_{d0} + 1)}$$

при помощи критерия Гурвица определить условие устойчивости.

Эта передаточная функция соответствует структуре САУ состоящей из соединенных последовательно трех аperiodических звеньев моделирующих усилитель, возбудитель и синхронный генератор. Эти звенья охвачены единичной отрицательной обратной связью.

Решение задачи. Характеристическое уравнение системы определим путем приравниванию нулю суммы полиномов числителя и знаменателя $W_{раз}(p)$:

$$(T_y p + 1)(T_e p + 1)(T_{d0} p + 1) + k_{раз} = 0,$$

где $k_{раз} = k_y k_g k_r$ - коэффициент передачи САУ в разомкнутом состоянии.

Перемножим выражения в скобках:

$$T_y T_e T_{d0} p^3 + T_e T_{d0} p^2 + T_y T_{d0} p^2 + T_{d0} p + T_y T_e p^2 + T_e p + T_y p + 1 + k_{раз}.$$

После преобразований получим полином в требуемом виде:

$$T_y T_e T_{d0} p^3 + (T_e T_{d0} + T_y T_{d0} + T_y T_e) p^2 + (T_{d0} + T_e + T_y) p + 1 + k_{раз}.$$

Этот полином имеем такие коэффициенты $a_3 = T_y T_e T_{d0}$; $a_2 = T_y T_e + T_e T_{d0} + T_e T_{d0}$; $a_1 = T_y + T_e + T_{d0}$; $a_0 = 1 + k_{раз}$.

Все коэффициенты положительны, поэтому необходимое условие критерия Гурвица выполняется. Для определения достаточного условия устойчивости САУ необходимо в начале составить неравенство с определителем Δ_2 :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Затем вместо коэффициентов подставляются их выражения:

$$(T_y + T_e + T_{d0})(T_y T_e + T_e T_{d0} + T_e T_{d0}) - (T_y T_e T_{d0})(1 + k_{раз}) > 0$$

Далее перемножаются выражения $(T_y T_e T_{d0})(1 + k_{раз})$ и решается неравенство относительно $k_{раз}$. В результате имеем следующее условие устойчивости САУ:

$$k_{раз} < \left(\frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_{d0}} \right) (T_y + T_e + T_{d0}) - 1. \quad (6.8)$$

Условие устойчивости (6.8) накладывает ограничение на величину коэффициента передачи разомкнутой САУ. Предельный коэффициент передачи это максимальное значение по условию устойчивости $k_{раз}$, поэтому соотношение для расчета $k_{раз.пр}$ получается при замене в условии (6.8) знака "меньше" на знак "равно".

Пусть параметры САУ следующие: $k_y=4$; $k_e=1,4$; $k_2=5$; $T_y=0,35$; $T_e=0,55$; $T_2=6,1$. При таких параметрах предельный коэффициент передачи САУ равен:

$$k_{раз.нр} = \left(\frac{1}{T_y} + \frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_{d_0}} \right) (T_y + T_e + T_{d_0}) - 1 =$$

$$= \left(\frac{1}{0,35} + \frac{1}{0,55} + \frac{1}{6,1} \right) (0,35 + 0,55 + 6,1) - 1 = 32,87$$

Согласно исходных данных коэффициент передачи САУ в разомкнутом состоянии: $k_{раз} = k_y k_e k_r = 4 \cdot 1,4 \cdot 5 = 28$. Следовательно имеет место отношение $k_{раз} < k_{раз.нр}$, поэтому система будет устойчива.

Настройка САУ обычно осуществляется путем изменения коэффициента усиления усилителя k_y . Параметры генератора и возбудителя зависят от их конструктивного выполнения и при настройке системы не изменяются. Определим допустимое по условию устойчивости предельное значение коэффициента передачи усилителя из неравенства: $k_{раз} = k_y k_e k_r < k_{раз.нр}$:

$$k_{y.нр} < \frac{k_{раз.нр}}{k_e k_2} = \frac{32,87}{1,4 \cdot 5} = 4,696$$

По исходным данным $k_y=4$, поэтому система имеет запас по усилению.

6.3 Критерий устойчивости Михайлова

Критерий был предложен А.В. Михайловым в 1938 г. Он позволяет судить об устойчивости системы по АФЧХ построенной на основании характеристического полинома замкнутой системы. Это графоаналитический метод, позволяющий по виду частотных характеристик САУ судить об их устойчивости.

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$F(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

Согласно теореме Безу полином $F(p)$ можно представить в виде:

$$F(p) = a_0 (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n).$$

Если в уравнении системы заменить $p = j\omega$, то получим:

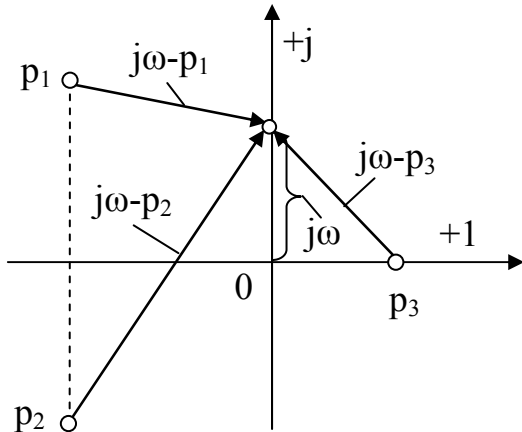
$$F(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1) (j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n).$$

Геометрически комплексное число $j\omega - p_i$ представляет собой в комплексной плоскости p вектор, начало которого лежит в точке p_i , а конец – на мнимой оси в точке $j\omega$. На рис. 6.9 показано положение векторов $j\omega - p_i$ на комплексной плоскости при $\omega = const$.

Аргумент комплексного числа $F(j\omega)$ равен:

$$\arg F(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - p_i)$$

При изменении ω в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ концы векторов $j\omega - p_i$ скользят по мнимой оси, а изменения аргумента $F(j\omega)$ равно сумме изменений аргументов этих векторов:



$$\Delta \arg F(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta \arg(j\omega - p_i) \quad -\infty < \omega < +\infty$$

Рисунок 6.9 – Изображение векторов $(j\omega - p_i)$ на комплексной плоскости

Принято считать поворот вектора против часовой стрелки положительным. При изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ каждый элементарный вектор $j\omega - p_i$ (т.е. корень) начало, которого лежит в левой полуплоскости поворачивается на угол $+\pi$, а вектор начало, которого находится в правой полуплоскости – на угол $-\pi$.

Модуль вектора $F(j\omega)$ равен произведению модулей сомножителей. Поэтому если полином $F(j\omega)$ имеет $n-m$ левых и m правых корней, то изменение его аргумента:

$$\Delta \arg F(j\omega) = (n-m)\pi - m\pi = (n-2m)\pi \quad -\infty < \omega < +\infty$$

Если правые корни отсутствуют, то система устойчива и все корни характеристического уравнения находятся в левой полуплоскости $m=0$:

$$\Delta \arg F(j\omega) = n\pi \quad -\infty < \omega < +\infty$$

Следовательно, при $-\infty \leq \omega \leq +\infty$ вектор $F(j\omega)$ повернется против часовой стрелки на угол $n\pi$. При неустойчивой системе хотя бы один корень характеристического уравнения лежит в правой полуплоскости. Вектор $F(j\omega)$ в этих условиях повернется на угол меньший, чем $n\pi$. На практике нет необходимости изменять ω от $-\infty$ до $+\infty$, а достаточно ограничиться изменением ω от 0 до $+\infty$. В этом случае приращение фазы вектора $F(j\omega)$ равно $n\frac{\pi}{2}$. Кривая, описываемая концом вектора $F(j\omega)$, называется годографом Михайлова.

Правила построения годографа Михайлова. Вектор $F(j\omega)$ нужно представить в алгебраическом виде:

$$F(j\omega) = U_F(\omega) + jV_F(\omega).$$

С учетом того, что $j = \sqrt{-1}$ и $j^2 = -1$ четные степени $j\omega$ будут вещественны, а нечетные – мнимыми, получим:

$$U_F(\omega) = a_0 + a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots;$$

$$V_F(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots = \omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots).$$

Начало вектора $F(j\omega)$ расположено в начале координат, а конец определяется координатами $U_F(\omega)$ и $V_F(\omega)$. При построении годографа в числе точек должны быть все точки пересечения кривой с осями координат, получаемые как корни уравнений:

$$U_F(\omega) = 0 \quad \text{и} \quad V_F(\omega) = 0.$$

При $\omega=0$ получаем $U_F(\omega) = a_0$ и $V_F(\omega) = 0$. Это означает, что годограф начинается на положительной вещественной полуоси на расстоянии a_0 от начала координат.

Примеры годографа Михайлова для устойчивых и неустойчивых систем приведены на рис. 6.10.

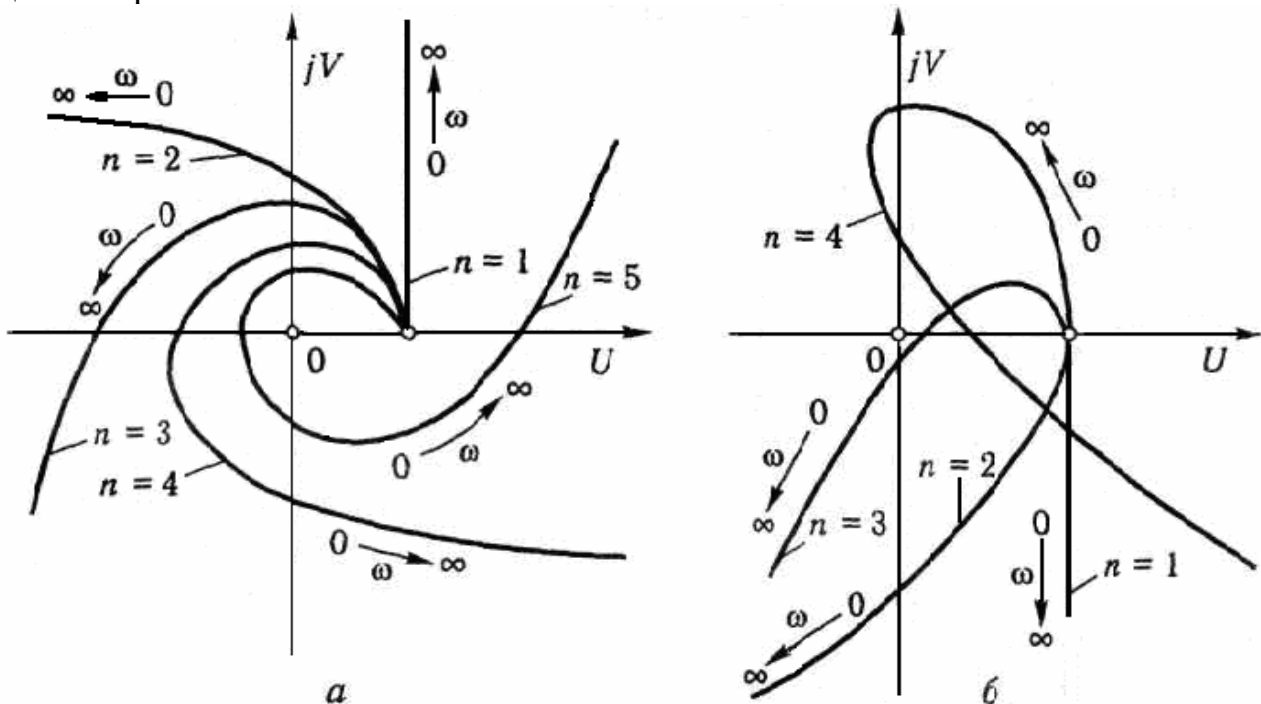


Рисунок 6.10 – Годографы Михайлова: а – устойчивые САУ, б – неустойчивые САУ

Критерий Михайлова формулируется следующим образом.

Линейная система n – порядка устойчива, если при изменении ω от 0 до ω годограф Михайлова последовательно обходит n квадрантов комплексной плоскости против часовой стрелки, начиная от положительной полуоси вещественных чисел и нигде не проходит через начало координат.

Пример 6.2. Определить устойчивость электромеханической следящей системы при помощи критерия Михайлова с передаточной функцией в разомкнутом состоянии:

$$W_{раз}(p) = \frac{k_{раз}}{p(T_y p + 1)(T_m p + 1)},$$

где $k_{раз} = 58 \text{ с}^{-1}$ – коэффициент передачи САУ в разомкнутом состоянии; $T_m = 0,57 \text{ с}$ – постоянная времени двигателя; $T_y = 0,01 \text{ с}$ – постоянная времени усилителя.

Решение. Характеристический полином САУ равен сумме полиномов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы:

$$F(p) = p(T_y p + 1)(T_m p + 1) + k_{раз} = T_y T_m p^3 + (T_y + T_m)p^2 + p + k_{раз}. \quad (6.9)$$

Полином (6.9) – третьего порядка. В нем заменим p на $j\omega$:

$$F(j\omega) = T_y T_m (j\omega)^3 + (T_y + T_m)(j\omega)^2 + j\omega + k_{раз}.$$

После возведения в степень $j\omega$ получим вектор $F(j\omega)$ в алгебраическом виде:

$$F(j\omega) = -jT_y T_m \omega^3 - (T_y + T_m)\omega^2 + j\omega + k_{раз}. \quad (6.10)$$

Для построения кривой Михайлова выделим из (6.10) вещественную и мнимую часть функции $F(j\omega)$ из (6.9):

$$U_F(\omega) = k_{раз} - (T_y + T_m)\omega^2 = 58 - 0,58\omega^2,$$

$$V_F(\omega) = \omega - T_y T_m \omega^3 = \omega - 5,7 \cdot 10^{-3} \omega^3.$$

В соответствии с приведенными выше правилами вычислим значение $U_F(\omega)$ и $V_F(\omega)$ для ряда значений частоты ω . Результаты расчета приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1 – Результаты вычислений

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	5	10	13	15	∞
$U_F(\omega)$	58	44	0	-40	-70	$-\infty$
$V_F(\omega)$	0	4	4,5	0	-5	$-\infty$

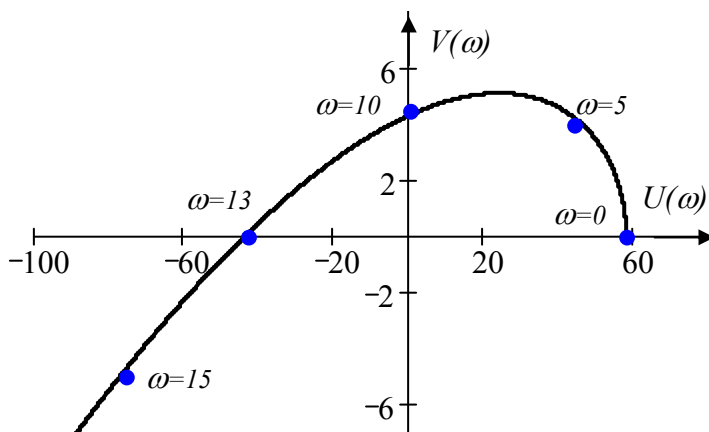


Рисунок 6.11 – Нико́граф Михайлова

Нико́граф Михайлова, построенный по данным табл. 6.1 приведен на рис. 6.11.

Из нико́графа на рис. 6.11 следует, что кривая Михайлова последовательно обходит три квадранта. Причем, характеристический полином электромеханической следящей системы имеет третий порядок. Следовательно, согласно критерию Михайлова система устойчива.

6.4 Частотный критерий Найквиста

Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амлитудно – фазовой частотной характеристике системы в разомкнутом состоянии. Различают формулировки критерия для случаев, когда система в разомкнутом состоянии устойчива и неустойчива.

Пусть имеется САУ с передаточной функцией $W_{\text{раз}}(p)$. Она имеет порядок неустойчивости s . Порядок неустойчивости равен числу корней характеристического полинома разомкнутой системы расположенных в правой половине комплексной плоскости. Устойчивая САУ в разомкнутом состоянии имеет порядок неустойчивости $s=0$.

Формулировка критерия.

Первый случай. Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не охватывало точку с координатами $(-1, j0)$.

Второй случай. Если разомкнутая система не устойчива и обладает порядком неустойчивости s , то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы охватывало точку с координатами $(-1, j0)$ против часовой стрелки $s/2$ раз.

Примеры частотных характеристик САУ приведены на рис. 6.13 и рис. 6.14. На рисунках характеристики устойчивых систем показаны сплошными линиями, неустойчивых систем – штриховыми линиями. Для астатических САУ конечные участки частотной характеристики это дуги окружности бесконечно большого радиуса $R=\infty$.

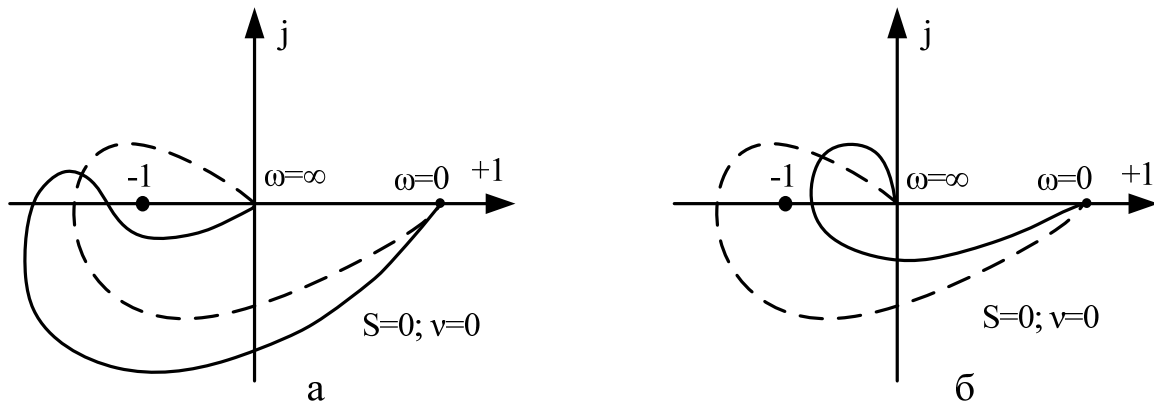


Рисунок 6.13 – Частотные характеристики статических САУ

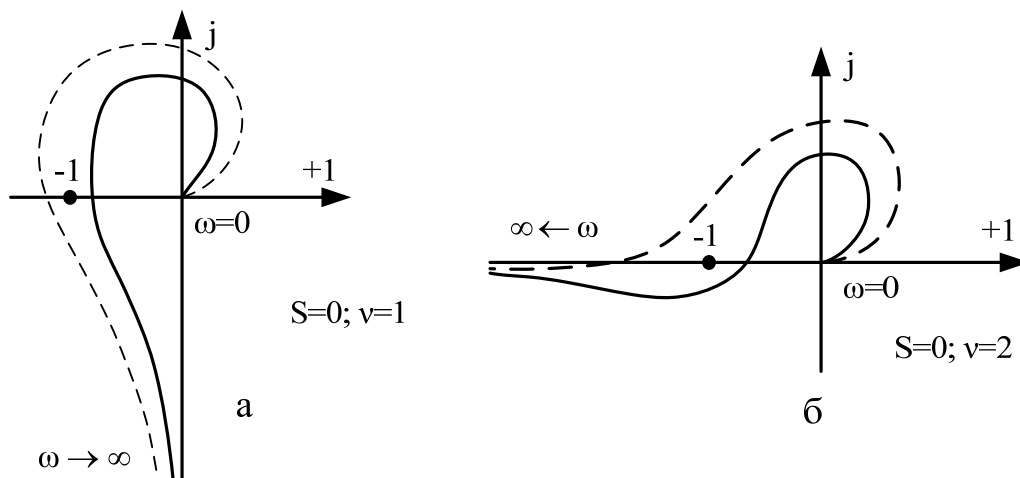


Рисунок 6.14 – Частотные характеристики астатических САУ

Физический смысл критерия Найквиста. Система управления обычно содержит инерционные звенья первого и второго порядка, интегрирующие звенья. Эти звенья вносят запаздывание по фазе. Причем, запаздывание согласно выраже-

ниям для аргументов комплексной передаточной функции этих звеньев с увеличением частоты увеличиваются. Из-за этого колебания на выходе разомкнутой системы будут отставать по фазе от входных. На некоторой частоте ω_π отставание может составить 180° или π (рис. 6.15). При замыкании главной обратной отрицательной связи на этой частоте входные колебания будут совпадать по фазе с колебаниями на выходе. Поэтому в замкнутой САУ на этой частоте отрицательная обратная связь превращается в положительную.

Если на частоте ω_π модуль комплексной передаточной функции $W(\omega)=1$ и амплитуды колебаний на входе и выходе равны (показано на рис. 6.15). При этом, в системе на выходе возникают одинаковые по амплитуде незатухающие колебания и соответственно система находится на границе устойчивости.

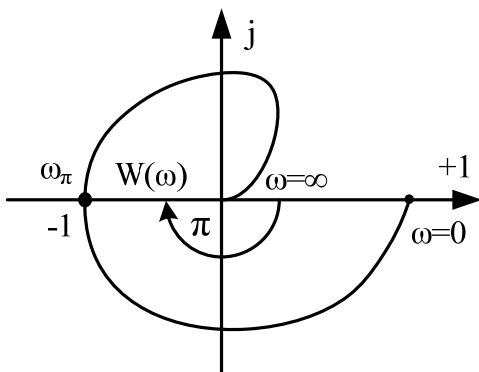


Рисунок 6.15 – АФЧХ статической системы

При $W(\omega) > 1$ амплитуда колебаний на входе больше чем на выходе, поэтому в системе возникают незатухающие возрастающие по амплитуде колебания. В этом случае система неустойчива.

Если $W(\omega) < 1$, то при прохождении через прямой канал системы сигнала амплитуда колебаний на выходе будет меньше чем на входе. При этом, на вход системы будут поступать во время переходного процесса с увеличением времени колебания все меньшей амплитуды. Такая система будет устойчива.

Критерий Найквиста в логарифмической форме.

Согласно критерию Найквиста об устойчивости замкнутой системы можно судить не только по АФЧХ разомкнутой системы, но и по взаимному расположению амплитудной и фазовой частотных характеристик соответствующей разомкнутой системы. При этом используются логарифмические характеристики – амплитудная $L(\omega)$ и фазовая, что поясняется простотой их построения.

Формулировка критерия.

Первый случай. Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы ордината логарифмической фазовой частотной характеристики (аргумент КПФ) на частоте среза системы $\omega_{ср}$, которая соответствует $L(\omega)=0$, по абсолютной величине была меньше чем π (180°), т.е. при $|\varphi(\omega_{ср})| < \pi$.

Второй случай. Если система не устойчива в разомкнутом состоянии, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы в диапазоне частот, где $L(\omega) > 0$, логарифмическая фазовая частотная характеристика должна пересекать прямую $\pm\pi$ одинаковое число раз снизу вверх и сверху вниз. Если принять переход сверху вниз отрицательным и переход снизу в вверх положительным, то в устойчивой системе разность между числами переходов равна нулю.

Т.е. число переходов фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ прямой $\pm\pi$ снизу вверх превышало на $s/2$ число переходов сверху вниз, где s – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.

На рис. 6.16 приведены частотные характеристики САУ устойчивой в разомкнутом состоянии.

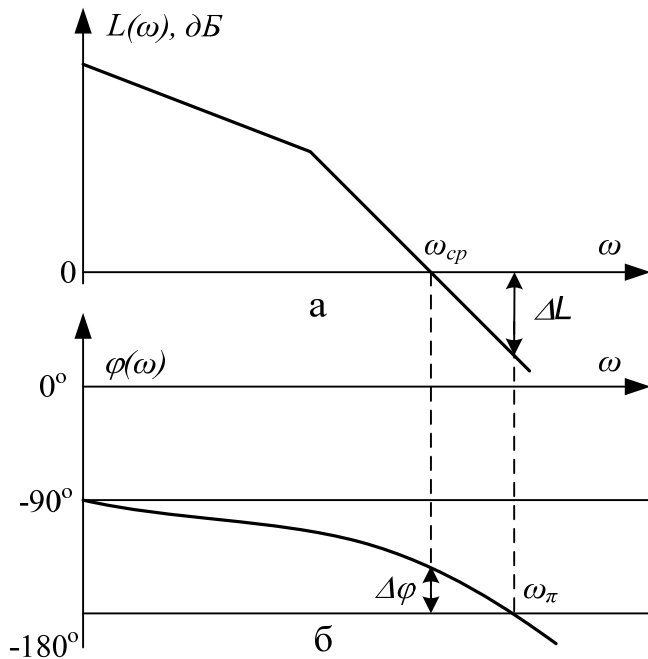


Рисунок 6.16 – Частотные характеристики устойчивой САУ в разомкнутом состоянии: а – ЛАЧХ, б - ЛФЧХ

Запасом по амплитуде называется величина в децибелах, на которую нужно увеличить коэффициент $k_{раз}$ передачи САУ, чтобы система достигла границе устойчивости:

$$\Delta L = 20 \lg W(\omega_\pi),$$

где ω_π – частота, при которой фазовая характеристика равна $\pm\pi$.

Запасом устойчивости по фазе называется угол, на который нужно повернуть амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы, чтобы замкнутая САУ оказалась на границе устойчивости:

$$\Delta\varphi(\omega_{cp}) = \pi - |\varphi(\omega_{cp})|,$$

где $\varphi(\omega_{cp})$ – значение ФЧХ на частоте среза системы, для которой выполняется условие $L(\omega) = 0$.

На рис.6.17 показаны частотные характеристики одной и той же системы с разными значениями коэффициентами передачи в разомкнутом состоянии.

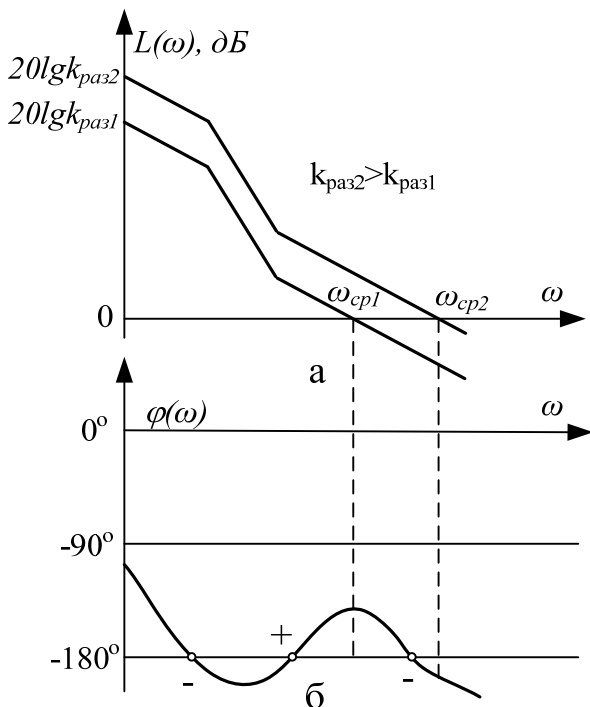


Рисунок 6.17 – Частотные характеристики САУ неустойчивой в разомкнутом состоянии: а – ЛАЧХ, б - ЛФЧХ

На рис. 6.17 показаны частотные характеристики одной и той же системы с разными коэффициентами передачи в разомкнутом состоянии. В соответствии с логарифмическим критерием Найквиста при $k_{раз1}$ система устойчива, а при $k_{раз2}$ неустойчива в замкнутом состоянии.

При помощи критериев устойчивости можно определить, устойчива ли система при заданных ее параметрах (постоянных времени и коэффициентах передачи). Однако на практике часто ставится вопрос по иному: заданы все параметры системы, за исключением одного или двух, которые могут изменяться в широких пределах; требуется определить при каких значениях этих параметров система будет устойчива. Некоторые параметры могут изменяться также в процессе эксплуатации. При этом важно знать сохранит ли система устойчивость.

6.5 Исследование устойчивости системы по критерию Найквиста в логарифмической форме

Для построения частотных характеристик разомкнутой системы исходная система должна быть преобразована в одноконтурную. При этом она состоит из последовательно соединенных звеньев. Передаточную функцию разомкнутой системы необходимо представить в виде произведения элементарных сомножителей, порядок которых не превышает два, например в виде:

$$W_{раз}(p) = \frac{k_{раз}(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4^2 p^2 + T_5 p + 1)} \quad (6.11)$$

Затем выполняем замену p на $j\omega$ для получения комплексной передаточной функции разомкнутой САУ. Для выражения (6.11) имеем:

$$W_{раз}(j\omega) = \frac{k_{раз}(T_2 j\omega + 1)}{p(T_1 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)(T_4^2 j^2 \omega^2 + T_5 j\omega + 1)} \quad (6.12)$$

При составлении выражений для АЧХ учитывают, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел. Для (6.12) имеем:

$$W_{раз}(\omega) = \frac{k_{раз} \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}{\omega \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} \sqrt{T_3^2 \omega^2 + 1} \sqrt{(1 - T_4^2 \omega^2) + T_5^2 \omega^2}}$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика разомкнутой одноконтурной системы равна сумме ЛАЧХ отдельных звеньев. Однако для построения ЛАЧХ системы нет необходимости строить зависимость $20 \lg W(\omega)$, т.к. можно построить асимптотическую характеристику при помощи отрезков прямых. Для этого вначале определяют частоты сопряжения $\omega_{ci} = 1/T_i$, где T_i – постоянные времени. Если имеется инерционное звено второго порядка, то это постоянная времени при $j^2 \omega^2$. Значения ω_{ci} в логарифмическом масштабе откладываются на оси частот. Далее находят точку с координатами $L(\omega) = 20 \lg k_{раз}$, $\omega = 1$. Затем через найденную точку проводят прямую, наклон которой зависит от степени ν астатизма системы, $-\nu \cdot 20$ дБ/декаду до первой частоты сопряжения (минимальная частота среди ω_{ci}). В точке с этой частотой изменяют наклон прямой линии в соответствии с типом звена, постоянная времени которого определяет эту частоту сопряжения: на -20 дБ/декаду, если ω_{ci} определяется постоянной времени сомножителя $(T_j j\omega + 1)$ расположенного в знаменателе передаточной функции, и на $+20$ дБ/декаду, если эта частота определяется постоянной времени сомножителя $(T_j j\omega + 1)$ расположенного в числителе. При наличии сомножителя соответствующего инерционному звену второго полрядка наклон изменяется на ∓ 40 дБ/декаду. Характеристика аналогично продолжается в направлении возрастания частоты, подвергаясь последовательным изломам на каждой частоте сопряжения.

Низкочастотная асимптота статической системы ($\nu = 0$) это прямая параллельная оси частот. Если система имеет астатизм первого порядка ($\nu = 1$), то низкочастотная асимптота и ее продолжение определяется: $L_{нч}(\omega) = 20 \lg k_{раз} - 20 \lg \omega_k$. В точке пересечения с осью частот ($L(\omega) = 0$ дБ) имеем: $20 \lg k_{раз} - 20 \lg \omega_k = 0$, откуда $\omega_k = k_{раз}$. Если система имеет астатизм второго порядка, то $\omega_k = \sqrt{k_{раз}}$. Рассмотренные свойства можно использовать при построении низкочастотной асимптоты ЛАЧХ.

Фазовая частотная характеристика определяется суммой выражений для ФЧХ последовательно включенных звеньев, причем элементарный сомножитель находится в числителе знак выражения для ФЧХ меняется на противоположный. Для (6.12) получим следующее соотношение для расчета ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} T_1 \omega + \operatorname{arctg} T_2 \omega - \operatorname{arctg} T_3 \omega - \operatorname{arctg} \frac{T_3 \omega}{1 - T_4^2 \omega^2}.$$

При расчете углов для сомножителей второго порядка довольно часто допускаются ошибки при определении углов, которые превышают по абсолютной величине 90° . Чтобы исключить возможные ошибки нужно учитывать следующее, что для инерционного звена второго порядка с передаточной функцией $1/(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)$ фазовая характеристика рассчитывается по соотношению:

$$\varphi(\omega) = -\frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2}.$$

При увеличении частоты от 0 до $1/T_2$ значение $\varphi(\omega)$ изменяется от 0° до -90° . При частоте $\omega > 1/T_2$ выражение становится отрицательным, а $\varphi(\omega)$ положительным. В этом случае нужно значение угла выбирать не в первой четверти, а в третьей от -90° до -180° . С учетом изложенного соотношение для расчета фазовой характеристики звена следующее:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T_2} \\ -\pi - \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2} & \text{при } \omega > \frac{1}{T_2} \end{cases}.$$

Для сомножителя $(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)$ в числителе имеем:

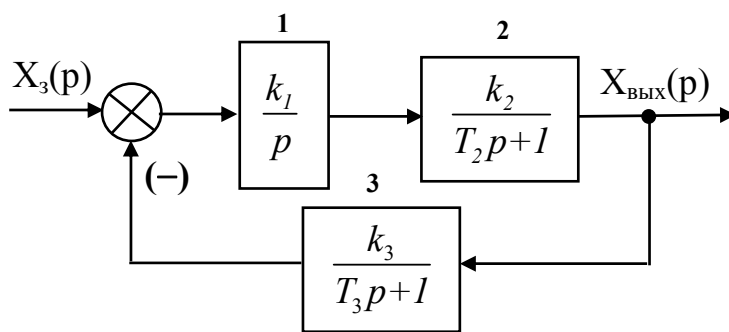
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T_2} \\ \pi + \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2} & \text{при } \omega > \frac{1}{T_2} \end{cases}.$$

Для расчета ЛФЧХ удобно составлять таблицу. В качестве частот для которых желательно определять ординаты ЛФЧХ системы следует также использовать и частоты сопряжения.

Исследование устойчивости САУ при помощи логарифмического критерия выполняется в следующей последовательности.

- 1) Исследуемая система преобразуется в одноконтурную систему.
- 2) Записывается передаточная функция в виде произведения элементарных сомножителей.
- 3) Выполняется построение ЛАЧХ разомкнутой системы по ранее изложенным правилам и определяется частота среза системы $\omega_{ср}$.
- 4) Записываются соотношения для расчета фазовой характеристики в виде суммы фазовых характеристик элементарных сомножителей. Вычисляются значения $\varphi(\omega)$ при разных частотах в диапазоне от 0 до $1,2 \cdot \omega_{ср}$ и выполняется построение ЛФЧХ.
- 5) По взаимному расположению ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы делается вывод об устойчивости замкнутой системы.

Пример 6.3. Определить устойчивость САУ схема, которой приведена на рис. 6.18.



Исходные данные:

$$k_1=2; k_2=3; k_3=4;$$

$$T_2=0,55; T_3=0,18.$$

Рисунок 6.18 – Структурная схема САУ

Решение. Определим передаточную функцию разомкнутой САУ:

$$W_{раз}(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p) = \frac{k_1}{p} \frac{k_2}{T_2p+1} \frac{k_3}{T_3p+1} = \frac{k_1k_2k_3}{p(T_2p+1)(T_3p+1)}.$$

Обозначим $k_{раз} = k_1k_2k_3$ и заменим p на $j\omega$. В результате получим комплексную передаточную функцию САУ в разомкнутом состоянии:

$$W_{раз}(j\omega) = \frac{k_{раз}}{j\omega(T_2j\omega+1)(T_3j\omega+1)}. \quad (6.13)$$

Выполним расчет ЛАЧХ. Для этого вначале определим частоты сопряжения:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,55} = 1,82 \text{ Гц}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{0,18} = 5,56 \text{ Гц}.$$

Определим точку А с координатами $L(\omega) = 20 \lg k_{\text{пас}}, \omega = 1$:

$$20 \lg k_{\text{пас}} = 20 \lg (k_1 k_2 k_3) = 20 \lg (2 \cdot 3 \cdot 4) = 27,6 \text{ дБ.}$$

Примем отрезок соответствующий декаде равный $L = 50$ мм. Значения частот ω_1, ω_2 находятся во второй декаде. Этой декаде предшествует одна декада $n = 1$. Расстояния в k декаде от нижней границы ω_{hk} определяется по соотношению:

$$\Delta L_i = L \left(1 - \lg \frac{\omega_{ek}}{\omega_i} \right),$$

где ω_e – верхняя граница декады, ω_i – частота сопряжения, принадлежащая декаде с границей ω_{ek} .

Определим на оси ω расстояния точек соответствующие частотам сопряжения от начало координат:

$$L_{\omega_1} = nL + L \left(1 - \lg \frac{\omega_{e2}}{\omega_1} \right) = 1 \cdot 50 + 50 \left(1 - \lg \frac{10}{1,82} \right) = 63 \text{ мм,}$$

$$L_{\omega_2} = nL + L \left(1 - \lg \frac{\omega_{e2}}{\omega_2} \right) = 1 \cdot 50 + 50 \left(1 - \lg \frac{10}{5,56} \right) = 87,3 \text{ мм.}$$

Построение ЛАЧХ выполняется следующим образом. Строится, на бумаге, декартова система координат: ось ординат $L(\omega)$ размечается в дБ (масштаб 10мм – 10дБ), на оси абсцисс предварительно откладываются три декады длиной каждая по 50мм. Первая декада начинается с частоты 0,1 Гц и заканчивается частотой 1 Гц, вторая – частотой 10Гц и третья – частотой 100Гц. Определяется положение точки А. Для этого на частоте $\omega = 1$ откладывается ордината 26,7 дБ. Через точку А проводится прямая. Наклон прямой зависит от степени астатизма системы. Система на рис. 6.18 имеет одно интегрирующее звено, поэтому степень астатизма системы равен $\nu = 1$. Далее рассчитывается наклон прямой: $-\nu \cdot 20 = -1 \cdot 20 = -20$ дБ/декаду. После частоты ω_1 наклон ЛАЧХ изменяется на величину определяемую множителем знаменателя $(T_2 j \omega + 1)$, т.е.ю наклон прямой станет равный -40 дБ/декаду. После частоты сопряжения 5,56 Гц наклон увеличивается до -60 дБ/декаду. После построения $L(\omega)$ определяется частота среза системы. Отрезок прямой соответствующий $\omega_{\text{ср}}$ равен 89мм. По соотношению $50 + 50(1 - \lg(10/\omega_{\text{ср}}))$ методом подбора определяется частота среза. После расчетов было получено 6,03 Гц.

В соответствии с (6.13) фазовая частотная характеристика системы в разомкнутом состоянии определяется следующим соотношением:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(\omega T_2) - \text{arctg}(\omega T_3)$$

Расчет фазовой частотной характеристики выполним в диапазоне частот от 0 до 12 Гц. При $\omega = 0$ получим $\varphi(0) = \varphi_1 = -90^\circ$. При $\omega = 1$ имеем: $\varphi_1 = -90^\circ$,

$\varphi_2 = \arctg(1 \cdot 0,55) = -28,8^\circ$, $\varphi_3 = \arctg(1 \cdot 0,18) = -10,2^\circ$, $\varphi_\Sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -90^\circ + -28,8^\circ + -10,2^\circ = -129^\circ$. Результаты расчета приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1 – Результаты расчета фазовой частотной характеристики

Частота		Значения углов, эл. градусы			
ω , Гц	ω , мм	φ_1	φ_2	φ_3	φ_Σ
0	0	-90	0	0	0
1	50	-90	-28,8	-10,2	-129
1,82	63	-90	-45	-18,1	-153,1
3	73,9	-90	-58,8	-28,4	-177,2
4	80,1	-90	-65,6	-37,8	-193,4
5,56	85	-90	-71,9	-45	-206,9
6	89	-90	-73,1	-47,2	-210,3
7	92,3	-90	-75,4	-51,6	-217
8	95,2	-90	-77,2	-55,2	-224,4
10	100	-90	-79,7	-61	-230,9
12	104	-90	-81,4	-65,2	-236,6

Частотные характеристики разомкнутой системы приведены на рис. 6.19.

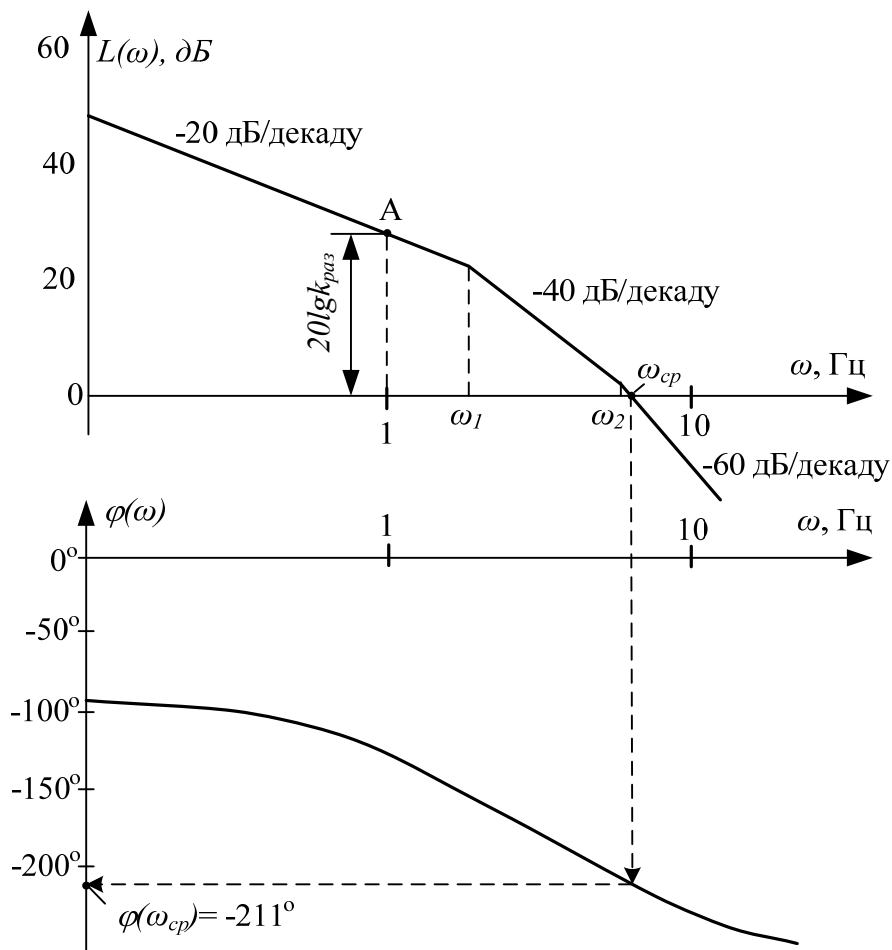


Рисунок 6.19 – Логарифмические частотные характеристики САУ

Из частотных характеристик разомкнутой САУ на рис. 6.19 определяем фазу на частоте среза $|\varphi(\omega_{cp})|=211^\circ > 180^\circ$. Следовательно, согласно критерию Найквиста в логарифмической форме замкнутая система будет не устойчивой.

Пример 6.4. В результате расчета были определены следующие частоты сопряжения: $\omega_1=0,8\text{Гц}$, $\omega_2=7\text{Гц}$ и $\omega_3=30\text{Гц}$. Отрезок, соответствующий декаде равен $L=30\text{мм}$. Определить расположения ω_1 , ω_2 , ω_3 на оси частот.

Решение. По величине частоты определим количество декад расположенных перед декадой, которой принадлежит рассматриваемая частота сопряжения:

$\omega_1=0,8\text{Гц}$ принадлежит первой декаде, $n=0$ и $\omega_{e1}=1\text{Гц}$;

$\omega_2=7\text{Гц}$ находится во второй декаде, $n=1$ и $\omega_{e2}=10\text{Гц}$;

$\omega_3=30\text{Гц}$ располагается в третьей декаде, $n=2$ и $\omega_{e3}=100\text{Гц}$.

С учетом этого определим на оси ω расстояние точек соответствующие частотам сопряжения от начало координат:

$$L_{\omega_1}=nL+L\left(1-\lg\frac{\omega_{e1}}{\omega_1}\right)=0\cdot 30+30\left(1-\lg\frac{1}{0,8}\right)=27,1\text{ мм},$$

$$L_{\omega_2}=nL+L\left(1-\lg\frac{\omega_{e2}}{\omega_2}\right)=1\cdot 30+30\left(1-\lg\frac{10}{7,0}\right)=55,35\text{ мм},$$

$$L_{\omega_3}=nL+L\left(1-\lg\frac{\omega_{e3}}{\omega_3}\right)=2\cdot 30+30\left(1-\lg\frac{100}{30,0}\right)=74,3\text{ мм}.$$

7 КОРРЕКЦИЯ САУ”

7.1 Необходимость и пути коррекции

В системах автоматического управления, состоящих только из функционально необходимых элементов, уменьшаются ошибки по сравнению со случаем отсутствия автоматического регулятора. Обычно в таких условиях не удастся получить требуемых показателей качества. Объясняется это тем, что для замкнутых систем достижение высокой точности для установившегося и переходного режимов носит противоречивый характер. Так для уменьшения ошибки в установившемся режиме необходимо повышать коэффициент усиления системы в разомкнутом состоянии. При этом уменьшается запас устойчивости и повышается колебательность переходного процесса. Например, для статических систем с увеличением $k_{раз}$ уменьшается разность $k_{раз.пред.} - k_{раз}$. Возможно также, что система станет ранее неустойчивой, чем удастся получить требуемый коэффициент усиления $k_{раз}$.

Для того, чтобы при увеличении $k_{раз}$ сохранить устойчивость и улучшить показатели качества переходного процесса необходимо изменить частотную характеристику системы, т.е. осуществить ее коррекцию.

Под коррекцией САУ понимается введение в управляющую часть системы дополнительных звеньев с целью обеспечения устойчивого и качественного регулирования.

7.2 Способы коррекции

Синтез САУ, отвечающей, поставленным требованиям, не имеет однозначного решения и может осуществляться различными способами. К ним относятся включения корректирующих звеньев: последовательно, параллельно, встречно – параллельно со звеньями управляющей части, а также введение в закон регулирования производных и интегралов.

Использование последовательной и параллельной коррекции для повышения $k_{раз}$ рассмотрим на конкретных примерах.

Пусть имеется схема САУ, приведенная на рис. 7.1.

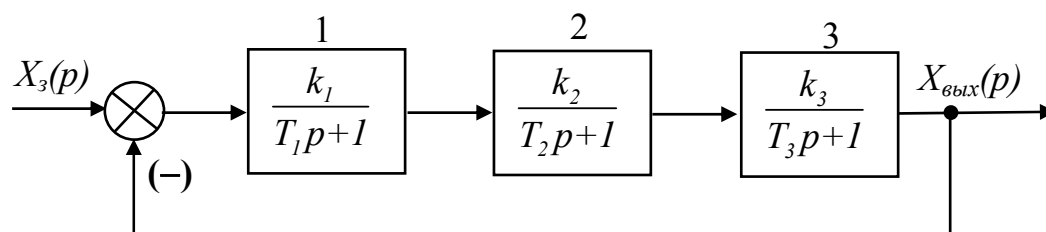


Рисунок 7.1 – Исходная структурная схема САУ по отклонению

Характеристическое уравнение САУ рис. 7.1 для замкнутого состояния:

$$T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + 1 + k_1 k_2 k_3 = 0,$$

где $k_1 k_2 k_3 = k_{раз}$.

В соответствии с критерием Гурвица найдем Δ_2 . Для устойчивой системы должно выполняться неравенство $\Delta_2 > 0$. Из этого неравенства можно получить следующее условие устойчивости:

$$k_{раз} < \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) (T_1 + T_2 + T_3) (T_1 + T_2 + T_3) - 1.$$

Это условие определяет величину $k_{раз}$, от которого зависит статическая погрешность САУ. Если она оказывается больше требуемой, то скорректировать САУ можно разными способами. Из условия устойчивости видно, что при $T_1 = T_2 = T_3$ допустимое значение $k_{раз} < 8$ оказывается наименьшим. Если же значения постоянных времени уменьшить или увеличить, например T_1 , то $k_{раз.пред}$ существенно возрастает.

Параллельная коррекция САУ. Рассмотрим влияние ГОС на параметры первого аperiodического звена САУ.

$$W_{эк}(p) = \frac{\frac{k_1}{T_1 p + 1}}{1 \pm \frac{k_1}{T_1 p + 1} k_{oc} p} = \frac{k_1}{(T_1 \pm k_1 k_{oc}) p + 1}.$$

Как следует из полученного соотношения, отрицательная ГОС увеличивает, а положительная связывает уменьшает значение T_1 . Схема САУ у которой охвачено ГОС первое аperiodическое звено приведена на рис. 7.2.

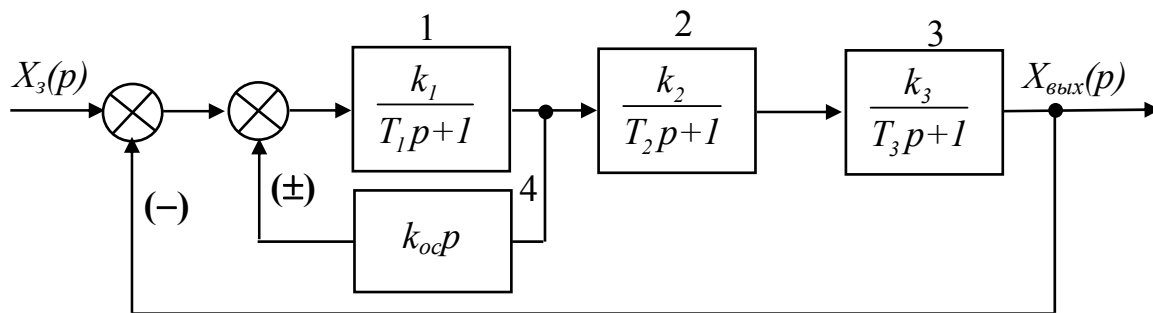


Рисунок 7.2 – Скорректированная структурная схема САУ по отклонению

Последовательная коррекция САУ. Задачу повышения качества САУ можно решить прямой последовательной коррекцией, включив в управляющую часть САУ “форсирующее” звено Φ с передаточной функцией: $W_\Phi(p) = 1 + k'p$. Схема САУ с таким способом коррекции показана на рис. 7.3.

Применение к скорректированной САУ критерия Гурвица дает такое условие ее устойчивости:

$$K_{раз.кор} < \frac{\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) (T_1 - T_2 - T_3) - 1}{1 - k' \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right)}.$$

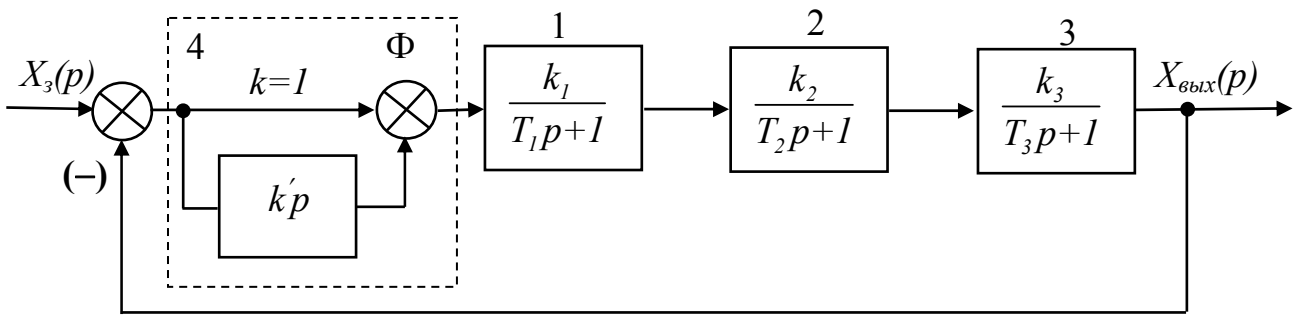


Рисунок 7.3 – Корректирование САУ при помощи форсирующего звена

Максимально допустимое значение k' ограничивается требованием положительности знаменателя.

На рис. 7.4 в соответствии с критерием Найквиста показаны АФЧХ: некорректированной САУ, неустойчивой при данных $k_{раз}$ (кривая 1); форсирующего звена (прямая 2) и скорректированной САУ, устойчивой при соответствующем значении k' (кривая 3).

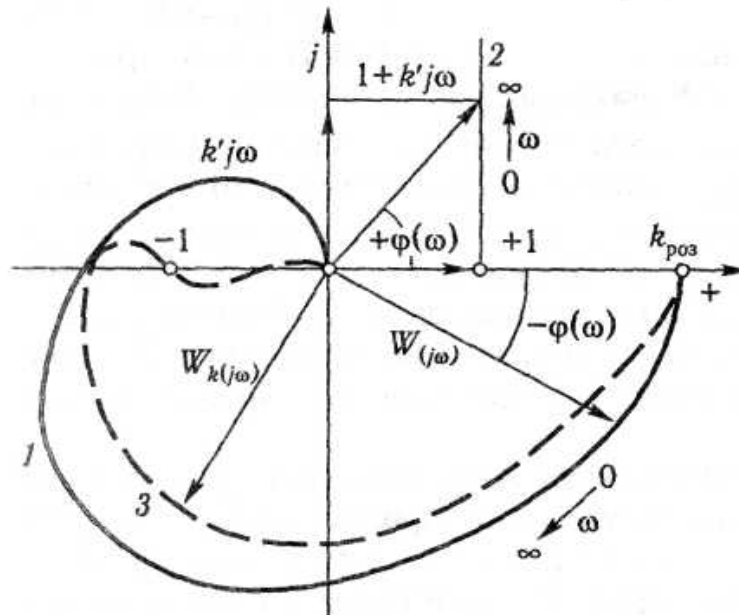


Рисунок 7.4 – Деформирование АФЧХ статической САУ при помощи "форсирующего" звена

Как следует из рис. 7.4, положительный фазовый угол форсирующего звена, вычитаясь из отрицательного фазового угла некорректированной АФЧХ отодвигает последнюю от точки $(-1, j0)$. Однако, умножение на модуль АФЧХ форсирующего звена вновь сдвигает АФЧХ в сторону этой точки. Следовательно, с противоречивым воздействием на САУ форсирующего звена существует некоторое предельно допустимое значение K' , при котором возможна коррекция исходной САУ.

Каждый из рассмотренных способов имеет определенные достоинства и недостатки.

Первый способ дает высокие широкие возможности повышения предельного $k_{раз.пред}$, но увеличение T_1 из-за отрицательной ГОС замедляет процесс регулирования.

Второй способ повышает быстродействие САУ, но имеет меньше возможности повышения $k_{раз}$.

7.3 Коррекция структурно-неустойчивых САУ

Рассмотрим пример приведения к устойчивости структурно-неустойчивой САУ, показанной на рис. 7.5.

Характеристическое уравнение этой САУ в замкнутом состоянии:

$$T_2 p^3 + p^2 + 0 \cdot p + k_{раз} = 0.$$

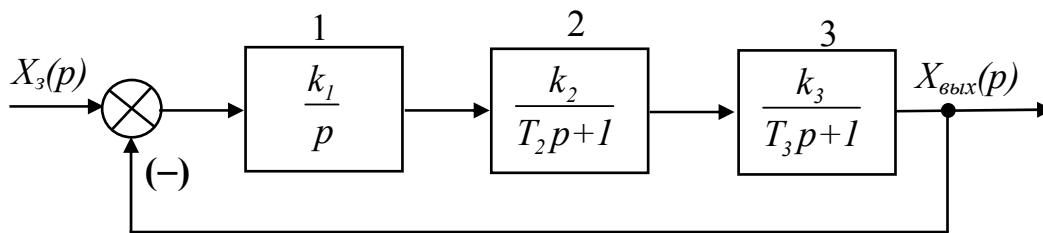


Рисунок 7.5 – Исходная структурная схема САУ по отклонению

В соответствии с критерием Гурвица имеем один коэффициент нулевой, следовательно $\Delta_3 = 0$.

Определитель второго порядка:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & k_{раз} \\ T_2 & 0 \end{bmatrix} = -T_2 k_{раз} < 0.$$

Следовательно, замкнутая САУ структурно неустойчива, т.к. никакими изменениями T_2 и $k_{раз}$ добиться положительности Δ_2 нельзя. Следовательно, эта САУ структурно неустойчива, и ее можно скорректировать для получения структурно устойчивой САУ.

Возможны три способа коррекции.

По первому способу преобразуется одно из интегрирующих звеньев апериодическое путем жесткой отрицательной обратной связи. В результате САУ становится структурно устойчивой. Достоинство способа – простота. Недостаток – потеря астатичности, если оставшееся интегрирующее звено оказывается во внутренней части САУ.

Второй способ предполагает последовательное включение “форсирующего” звена (рис. 7.6).

При реальном дифференцирующем звене передаточная функция “форсирующего” звена имеет вид:

$$1 + \frac{k_d T_d p}{T p + 1} = \frac{(1 + k_d) T_d p + 1}{T p + 1}.$$

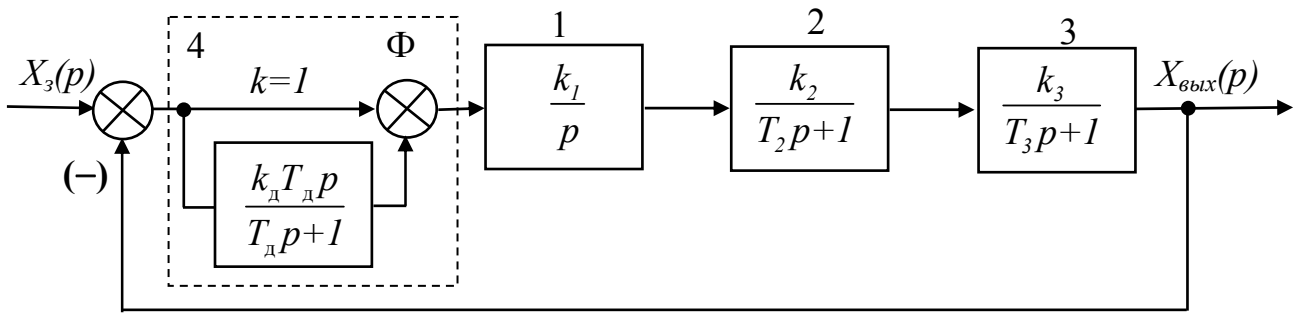


Рисунок 7.6 – Корректирование САУ введением форсирующего звена

Характеристическое уравнение скорректированной САУ будет четвертого порядка:

$$T_d T_2 p^4 + (T_d + T_2) p^3 + p^2 + (1 + k_d) k_d T_d p + k_{раз} = 0 .$$

В уравнении все коэффициенты больше нуля. Следовательно, САУ стала структурно-устойчивой.

По критерию Гурвица из условия $\Delta_3 > 0$, содержащего в себе условие $\Delta_2 > 0$, получаем:

$$k_{раз} < \frac{(T_d + T_2)(T_d k_d - T_2)}{T_2 T_d^2 (1 + k_d)^2} .$$

Из полученного неравенства имеем дополнительное условие устойчивости $T_d k_d - T_2 > 0$, откуда требуемый коэффициент передачи дифференцирующего звена:

$$k_d > \frac{T_2}{T_d} .$$

Достоинство данного способа- повышение быстродействия САУ с сохранением ее астатичности.

Третий способ предполагает введение дополнительной прямой параллельной связи. Схема САУ показана на рис. 7.7.

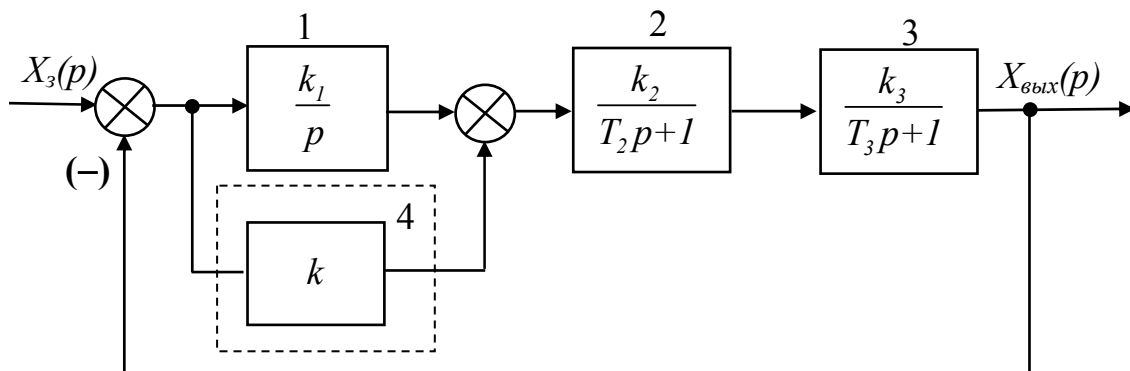


Рисунок 7.7 – Корректирование САУ введением дополнительной прямой связи

Передаточная функция первого звена с параллельной связью равна:

$$\frac{k_1 + kp}{p}$$

Характеристическое уравнение САУ рис. 7.7 третьего порядка:

$$T_2 p^3 + p^2 + k \cdot k_2 k_3 p + k_1 k_2 k_3 = 0.$$

Все коэффициенты уравнения больше нуля. По критерию устойчивости Гурвица условие устойчивости имеем:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & k_1 k_2 k_3 \\ T_2 & k \cdot k_2 k_3 \end{bmatrix} = k \cdot k_2 k_3 - T_2 k_1 k_2 k_3 > 0.$$

Откуда, требуемый коэффициент дополнительной связи:

$$k > k_1 T_2.$$

В соответствии с критерием Найквиста на рис. 8 показаны АФЧХ с исходной и скорректированной САУ.

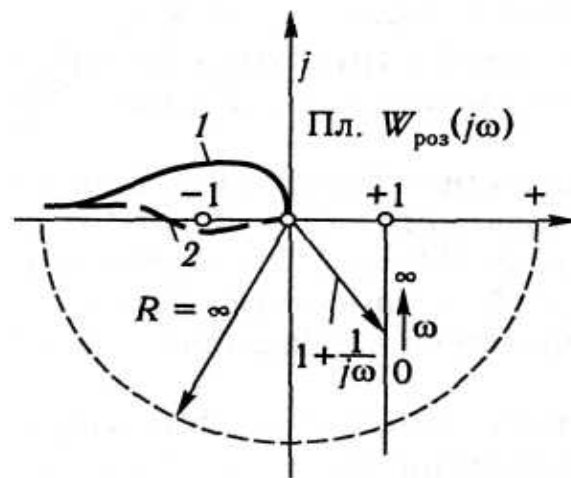


Рисунок 8 – Эффект введения в САУ дополнительной прямой связи:
1-исходная АФЧХ; 2- скорректированная АФЧХ.

В исходной САУ два интегрирующих звена дают фазовый сдвиг на $-\pi$ и апериодическое звено еще на $-\frac{\pi}{2}$ при $\omega \rightarrow \infty$. Общий максимальный сдвиг фазы $-\frac{3\pi}{2}$. Вектор интегрирующего звена с параллельной связью скользит своим концом по прямой, проходящей через точку $(+1, 0)$. Эта прямая параллельна мнимой оси. Фазовый сдвиг такого звена меняется от $-\frac{\pi}{2}$ при $\omega = 0$ до нуля при $\omega = \infty$. В результате предельный сдвиг фазы при $\omega = \infty$ в скорректированной АФЧХ снижается до $-\pi$.

Использования для выбора передаточной функции корректирующего звена ЛАЧХ.

Расчеты коррекции существенно упрощаются при использовании ЛАЧХ. Построив ЛАЧХ исходной и ЛАЧХ желаемой САУ, по их разности можно найти ЛАЧХ требуемого корректирующего звена. После этого по полученной характеристике определяется передаточная функция корректирующего звена