МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЁЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.П. Волчкова, Вит.В.Волчков

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания для самостоятельной работы студентов второго курса электротехнического факультета

Донецк ДонНТУ– 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЁЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.П. Волчкова, Вит.В.Волчков

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания для самостоятельной работы студентов второго курса электротехнического факультета

Рассмотрено на заседании кафедры
"Высшая математика"им. В.В.Пака
Протокол №2 от 15 сентября 2011г.

Утверждено на учебно-издательском
совете ДонНТУ
Протокол №6 от 6 октября 2011г.

Донецк ДонНТУ– 2011

УДК 517.5

Поверхностные интегралы (учебно-методическое пособие)/ Сост. Волчкова Н.П., Вит.В.Волчков – Донецк: ДонНТУ, 2011. – 19 с.

В пособии кратко изложена теория по теме "Поверхностные интегралы", приведены решения задач разной степени трудности и задания для самостоятельной работы студентов.
Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов второго курса электротехнического факультета.

Составитель: Н.П. Волчкова, доц., канд. физ.-мат. наук,
Вит.В.Волчков, проф., доктор. физ.-мат. наук

Ответственный за выпуск: Г.М. Улитин, доктор. техн. наук, зав. каф. высшей математики им. В.В.Пака

Рецензент: Р.Н. Абдулин, доц., канд. физ.-мат. наук

Содержание

При изучении курса высшей математики значительную трудность для студентов представляет овладение техникой многомерного интегрирования. В частности, вычисление и применение поверхностных интегралов является одним из самых сложных. Указанные вопросы весьма актуальны для студентов электротехнического факультета, поскольку ряд важных законов теории поля формулируется в терминах поверхностных интегралов. В качестве примеров рассмотрим известные законы Фарадея и Ампера.

Закон Фарадея утверждает, что электродвижущая сила, возникающая в замкнутом проводнике Г, находящемся в переменном магнитном поле $\mathbf{B}$, пропорциональна скорости изменения потока магнитного поля через ограниченную контуром Г поверхность S. Пусть $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля. Точная запись закона Фарадея может быть представлена в виде равенства

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \int \mathbf{B} \cdot d\sigma.$$

Работу поля вдоль замкнутого контура часто называют *циркуляцией поля вдоль этого контура.* Так что по закону Фарадея циркуляция напряженности электрического поля, порожденного в замкнутом проводнике Г переменным магнитным полем, равна взятой с обратным знаком скорости изменения потока напряженности магнитного поля через натянутую на контур Г поверхность S.

Закон Ампера

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \int_S \int \mathbf{j} \cdot d\sigma$$

(где $\mathbf{B}$ - вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{j}$ – вектор плотности тока, ε_0, c^2 – размерные постоянные) утверждает, что циркуляция напряженности, порожденного электрическим током магнитного поля вдоль контура Г, пропорциональна силе тока, протекающего через ограниченную контуром Г поверхность S.

На практические занятия по теме "Поверхностные интегралы"выделяется очень мало времени. Студенты не успевают выработать и закрепить необходимые навыки при решении стандартных задач. Поэтому желающий овладеть ими должен много заниматься самостоятельно. Предлагаемое пособие ставит своей целью помочь студентам в их самостоятельной работе.

Структура пособия такова. Каждый параграф начинается с изложения основных понятий и теоретических сведений. Затем решаются основные типичные примеры. В конце параграфа приведены задачи для самостоятельной работы.

1 Поверхностные интегралы первого рода

Пусть поверхность S задана уравнением

$$z = z(x, y), \qquad (x, y) \in D, \tag{1}$$

где $z(x, y)$– дифференцируемая в некоторой области D функция.

Поверхностный интеграл первого рода $\int\limits_S\int f(x, y, z)dS$ от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S может быть определен следующим образом:

$$\int\limits_S\int f(x,y,z)dS = \int\limits_D\int f(x;y;z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy. \tag{2}$$

Часто поверхность S не может быть задана в виде (1), но ее удается разбить на части S_i так, что каждая из частей допускает представление в нужном виде. В таких случаях под интегралом по поверхности S понимают сумму интегралов по ее частям:

$$\int\limits_S\int f dS = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{S_i}\int f dS_i. \tag{3}$$

Если $f(x, y, z)$– плотность массы, распределенной по поверхности S, то интеграл (2) дают массу всей поверхности.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_S\int z^2 dS,$$

где S – полная поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2$ (см. рис.2).

$\triangle$ Пусть S_1– боковая поверхность конуса, S_2– его основание, тогда

$$I = \int\limits_{S_1}\int z^2 dS_1 + \int\limits_{S_2}\int z^2 dS_2.$$

К первому интегралу применим формулу (2). На боковой поверхности конуса

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, переходя к полярным координатам, получаем

$$\int\limits_{S_1}\int z^2 dS_1 = \int\limits_{x^2+y^2\leq 4}\int \left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^3 d\rho d\varphi = 8\sqrt{2}\pi.$$

На основании конуса $z = 2$, поэтому второй интеграл равен учетверенной площади основания конуса $4\pi 2^2$. Итак, $I = 8\pi(2 + \sqrt{2})$. $\blacktriangledown$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dS,$$

где S – конечная часть поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью $z = 0$ (см. рис.3).

$\triangle$ Поверхность задана явно уравнением, разрешенным относительно z, т.е. уравнением вида $z = z(x, y)$. Положим $z = 0$ и найдем проекцию поверхности (параболоида вращения) на плоскость XOY. Каждая точка поверхности спроектируется во внутренность круга $x^2 + y^2 \leq 1$. Далее,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}.$$

Тогда, переходя к полярным координатам, получим

$$\iint\limits_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dS = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy =$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(1 + 4x^2 + 4y^2\right) dxdy = \left\{ \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, \\ J = \rho, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1 \end{array} \right\} =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1 + 4\rho^2)d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^2}{2} + \rho^3\right)\Bigg|_0^1 = 3\pi. \quad \blacktriangledown$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_S x(y + z)dS,$$

где S – часть цилиндрической поверхности $x = \sqrt{b^2 - y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0$, $z = c$, $c > 0$.

$\triangle$ Здесь уравнение поверхности разрешено относительно x, поэтому проектировать поверхность будем в плоскость YOZ. Вид поверхности $x = \sqrt{b^2 - y^2}$ становится понятным, если переписать ее уравнение в виде $x^2 + y^2 = b^2$, $x \geq 0$. Это половина цилиндрической поверхности с направляющей, параллельной оси OZ. Проекцией поверхности служит прямоугольник $D = \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq z \leq c, \\ -b \leq y \leq b, b > 0. \end{array} \right.$ Запишем формулу

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f(x(y, z); y; z)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz.$$

У нас

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{b^2-y^2}},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=0,\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2-y^2}}=\frac{b}{\sqrt{b^2-y^2}}.$$

Т.о., получаем

$$\iint\limits_S x(y+z)dS=\iint\limits_D \sqrt{b^2-y^2}(y+z)\frac{b}{\sqrt{b^2-y^2}}dydz=b\iint\limits_D (y+z)dydz=$$

$$b\int_0^c dz\int_{-b}^b (y+z)dy=b^2c^2.\quad \blacktriangledown$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_S \left(2z^2-x^2-y^2\right)dS,$$

где S – часть поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=2x$ (см.рис.4).

$\vartriangle$ Проекцией части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной цилиндром, на плоскость XOY служит $x^2+y^2=2x\Longleftrightarrow(x-1)^2+y^2=1$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}.$$

Тогда

$$\iint\limits_S \left(2z^2-x^2-y^2\right)dS=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}\left[2\left(x^2+y^2\right)-x^2-y^2\right]\sqrt{2}dxdy=$$

$$\sqrt{2}\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\left\{\begin{array}{c} x-1=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi,\\ J=\rho, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le 1\end{array}\right\}=$$

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\left[(1+\rho\cos\varphi)^2+\rho^2\sin^2\varphi\right]d\rho=$$

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\left(1+2\rho\cos\varphi+\rho^2\right)d\rho=\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}.\quad \blacktriangledown$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I=\iint\limits_S (x+y+z)\,dS,$$

где S – часть плоскости $x+2y+4z=4$, выделяемая условиями $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ (см. рис.5).

$\triangle$ Проекцией плоскости $x+2y+4z=4$ на XOY служит треугольник
$D=\begin{cases} 0\leq y\leq \frac{4-x}{2}, \\ 0\leq x\leq 4. \end{cases}$

$$z=1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{4},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2},\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{21}}{4}.$$

По формуле (2) получаем

$$I=\iint\limits_D\left(x+y+\frac{4-x-2y}{4}\right)\frac{\sqrt{21}}{4}dxdy=\frac{\sqrt{21}}{4}\iint\limits_D\left(\frac{3x}{4}+\frac{y}{2}+1\right)dxdy=$$

$$\frac{\sqrt{21}}{4}\int_0^4 dx\int_0^{2-\frac{x}{2}}\left(\frac{3x}{4}+\frac{y}{2}+1\right)dy=\frac{\sqrt{21}}{4}\int_0^4\left(\frac{3x}{4}y+\frac{y^2}{4}+y\right)\Big|_0^{2-\frac{x}{2}}dx=$$

$$\frac{\sqrt{21}}{4}\int_0^4\left(\frac{x}{2}-\frac{5}{16}x^2+3\right)dx=\frac{\sqrt{21}}{4}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{5x^3}{48}+3x\right)\Big|_0^4 dx=\frac{7\sqrt{21}}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить интегралы.

1) $\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\,dS$, где S – поверхность куба $|x|\leq a$, $|y|\leq a$, $|z|\leq a$. (Ответ: $40a^4$).

2) $\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\,dS$, где S – полная поверхность цилиндра $x^2+y^2\leq r^2$, $0\leq z\leq H$. (Ответ: $\pi r\left(r^3+2r^2H+rH^2+\frac{2}{3}H^3\right)$).

3) $\iint\limits_S\frac{dS}{(1+x+y)^2}$, где S – поверхность тетраэдра $x+y+z\leq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$. (Ответ: $(\sqrt{3}-1)(\ln 2+\sqrt{3}/2)$).

2 Поверхностные интегралы второго рода

Пусть в каждой точке $M(x,y,z)$ поверхности S существуют два противоположно направленных нормальных вектора. Выбор одного из них называют ориентацией поверхности. Если поверхность S является границей ограниченной области, то говорят, что её можно ориентировать внешней или внутренней (по отношению к этой области) нормалями. Поверхность S, ориентированную внешней нормалью, называют её внешней стороной, а ориентированную внутренней нормалью,– называют её внешней стороной.

Для ориентированной поверхности S определяют поверхностный интеграл второго рода.

Пусть поверхность S ориентирована единичным вектором нормали $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, и пусть на поверхности S заданы функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$.

Поверхностный интеграл второго рода

$$\int\int_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \tag{4}$$

определяется через поверхностный интеграл первого рода формулой

$$\int\int_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int\int_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma))\, dS. \tag{5}$$

Пусть поверхность S задана явно. Например, S задана уравнением

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D, \tag{6}$$

где D–проекция S на плоскость XOY, $z(x,y)$ непрерывна вместе со своими производными в области D. Тогда

$$\int\int_S Rdxdy = \pm\int\int_D R(x;y;z(x,y))dxdy. \tag{7}$$

Перед двойным интегралом в формуле (7) берётся знак "+", если поверхность S ориентирована нормалями, составляющими с осью OZ острый угол, и знак "$-$", если поверхность S ориентирована нормалями, образующими с OZ тупой угол.

Аналогично записываются формулы для $\int\int_S Pdydz$, $\int\int_S Qdzdx$.

Если обозначить $\mathbf{a} = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$, а единичную нормаль к поверхности (6)– $\mathbf{n}$, то формулу (5) можно переписать в виде

$$\int\int_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int\int_S (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\, dS, \tag{8}$$

где

$$\mathbf{n} = \pm\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \tag{9}$$

и знак "+"берется, если поверхность S ориентирована нормалями, составляющими с осью OZ острый угол, знак "$-$", если поверхность S ориентирована нормалями, образующими с OZ тупой угол.

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I = \int\int_S \left(x^2 + y^2\right) dxdy,$$

S – нижняя сторона круга $x^2+y^2\leq 4$, $z=0$ (см. рис.6).

$\triangle$ Поверхность S ориентирована нормалями, составляющими тупой угол с осью OZ. По формуле (7), взяв в ней знак "минус", сводим интеграл к двойному, который вычисляем, переходя к полярным координатам:

$$I=-\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}\left(x^2+y^2\right)dxdy=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^3d\rho=-2\pi\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2=-8\pi. \qquad \blacktriangledown$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$I=\iint\limits_S zdxdy,$$

где S – нижняя сторона части конической поверхности $z^2=x^2+y^2$, $0<z\leq H$ (см. рис.7).

$\triangle$ Поверхность S ориентирована нормалями, составляющими тупой угол с осью OZ. По формуле (7), взяв в ней знак "минус", сводим интеграл к двойному, который вычисляем, переходя к полярным координатам:

$$I=-\iint\limits_{x^2+y^2\leq H^2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H\rho^2d\rho=-\frac{2}{3}\pi H^3. \quad \blacktriangledown$$

Замечание. Если поверхность S не представима в виде (6), но её удается разбить на конечное число частей, каждая из которых представима в таком виде, то под поверхностным интегралом по поверхности S понимают сумму интегралов по её частям.

Пример 8. Вычислить интегралы

$$a)I_1=\iint\limits_S z^2dxdy,\quad b)I_2=\iint\limits_S zdxdy,$$

где S – полусфера $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y\geq 0$ ориентированная внешней нормалью.

$\triangle$ а) Разобьем поверхность S на части S_1 и S_2, расположенные соответственно выше и ниже плоскости $z=0$. Тогда

$$I_1=\iint\limits_S z^2dxdy=\iint\limits_{S_1}z^2dxdy+\iint\limits_{S_2}z^2dxdy.$$

Поверхности S_1 и S_2 имеют одну и ту же проекцию D на плоскость $z=0$. Согласно формуле (7), получаем

$$\iint\limits_{S_1}z^2dxdy=\iint\limits_D\left(R^2-x^2-y^2\right)dxdy,$$

так как внешняя нормаль к поверхности S_1 образует с осью z острый угол;

$$\iint\limits_{S_2} z^2 dxdy = -\iint\limits_{D} \left(R^2 - x^2 - y^2\right) dxdy,$$

так как внешняя нормаль к поверхности S_2 образует тупой угол с осью z.

Следовательно,

$$I_1 = \iint\limits_{S} z^2 dxdy = 0.$$

b) Как и в случае a), разбивая поверхность S на части S_1 и S_2 и применяя формулу (7), получаем

$$\iint\limits_{S_1} zdxdy = \iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy, \quad \iint\limits_{S_2} z^2 dxdy = -\iint\limits_{D} \left(-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right) dxdy.$$

Следовательно,

$$I_2 = \iint\limits_{S} zdxdy = 2\iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy = \frac{2\pi}{3} R^3,$$

так как последний интеграл равен объему четвертой части шара радиуса R. ▼

Пример 9. Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_{S} \left(2x^2 + y^2 + z^2\right) dydz,$$

где S – внешняя сторона боковой поверхности конуса $\sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq H$.

△ Воспользуемся формулой

$$\iint\limits_{S} Pdydz = \pm\iint\limits_{D} P(x(y,z); y; z) dydz,$$

где D – проекция S на плоскость YOZ. У нас проекцией поверхности на плоскость YOZ будет круг $y^2 + z^2 \leq H^2$. Так как внешняя нормаль к поверхности S образует "тупой"угол с осью x, то в формуле нужно взять знак "$-$":

$$I = -\iint\limits_{y^2+z^2\leq H^2} \left(2\left(y^2 + z^2\right) + y^2 + z^2\right) dydz = -3\iint\limits_{y^2+z^2\leq H^2} \left(y^2 + z^2\right) dydz =$$

$$\left\{ \begin{array}{c} y = \rho\cos\varphi, z = \rho\sin\varphi, \\ J = \rho, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq H \end{array} \right\} = -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H \rho^3 d\rho = -\frac{3\pi}{2} H^4. \quad ▼$$

Пример 10. Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_{S} (2z - x)\, dydz + (x + 2z)\, dzdx + 3zdxdy,$$

где S – верхняя сторона треугольника $x+4y+z=4$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ (см. рис.8).

$\vartriangle$ Воспользуемся формулой (8). В нашем случае

$$\mathbf{a}=\{2z-x;x+2z;3z)\},\quad z=4-x-4y,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-4.$$

По формуле (9), взяв в ней знак "+", находим $\mathbf{n}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{18}};\frac{4}{\sqrt{18}};\frac{1}{\sqrt{18}}\right)$. Т.о.,

$$I=\int\limits_S\int(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_0)\,dS=\frac{1}{\sqrt{18}}\int\limits_S\int(2z-x+4(x+2z)+3z)\,dS.$$

Проекцией S на плоскость XOY будет треугольник $D=\{0\leq y\leq 1, 0\leq x\leq 4-4y\}$. Отсюда, используя формулу (2), получаем

$$I=\frac{1}{\sqrt{18}}\int\limits_D\int(3x+13(4-x-4z))\sqrt{18}dxdy=\int\limits_D\int(52-52y-10x))\,dxdy=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{4-4y}(52-52y-10x))\,dx=\frac{128}{3}.\quad\blacktriangledown$$

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить интегралы.

1) $\int\limits_S\int x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S – внутренняя сторона поверхности параллелепипеда $0\leq x\leq a$, $0\leq y\leq b$, $0\leq z\leq c$. (Ответ: $(a+b+c)abc$).

2) $\int\limits_S\int x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S – внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2+y^2\leq z^2$, $0\leq z\leq 1$. (Ответ: $\frac{\pi}{2}$).

3) $\int\limits_S\int x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тетраэдра $x+y+z\leq a$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$. (Ответ: $\frac{3a^5}{20}$).

4)$\int\limits_S\int x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, где S – внутренняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$. (Ответ: $\frac{12\pi R^5}{5}$).

3 Формула Гаусса-Остроградского

Пусть G – область в трёхмерном пространстве, ограниченная поверхностью S, и пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в G и на ее границе. Тогда

$$\int\limits_S\int Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\int\int\limits_G\int\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz,\tag{10}$$

где S – внешняя сторона поверхности, ограничивающей область G. Формулу (10) называют *формулой Гаусса-Остроградского*. Иногда ее записывают в виде

$$\int\limits_S\int(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\int\int\limits_G\int\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz,\tag{11}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Пример 11. Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_S (1+2x)\,dydz + (2x+3y)dzdx + (3y+4z)dxdy,$$

где S – внешняя сторона полной поверхности пирамиды $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

$\triangle$ Воспользуемся формулой (10). У нас $P = 1+2x$, $Q = 2x+3y$, $R = 3y+4z$, $\frac{\partial P}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 3$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 4$,

$$I = \iiint\limits_G (2+3+4)dxdydz = 9\iiint\limits_G dxdydz = \frac{3}{2}abc,$$

так как $\iiint\limits_G dxdydz$ равен объёму пирамиды G. $\blacktriangledown$

Пример 12. Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_S zdxdy + dydz + (5x+y)dydz,$$

где S – внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2+y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 4$.

$\triangle$ Воспользуемся формулой (10). У нас $P = 5x+y$, $R = z$, $\frac{\partial P}{\partial x} = 5$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 1$,

$$I = \iiint\limits_G (1+5)dxdydz,$$

где G– конус $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq 4$, проекцией которого на плоскость XOY является круг $x^2+y^2 \leq 16$. Переходя к цилиндрическим координатам, находим

$$I = 6\iiint\limits_G dxdydz = \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z \\ J = \rho, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 4 \end{array} \right\} =$$

$$= 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \int_\rho^4 dz = 12\pi \int_0^4 \rho(4-\rho)d\rho = 128\pi. \quad \blacktriangledown$$

Пример 13. Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy,$$

где S – внешняя сторона боковой поверхности конуса $G : x^2+y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 1$.

$\triangle$ Обозначим через I_1 интеграл по внешней стороне полной поверхности S_1 конуса, через I_2 интеграл по верхней стороне его основания S_2. Тогда $I = I_1 - I_2$. К интегралу I_1 применим формулу Гаусса-Остроградского

$$I_1 = 3\iiint\limits_G \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, вычислим полученный тройной интеграл

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z, J = \rho, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le 1, \rho \le z \le 1 \end{array} \right\} =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_\rho^1 (\rho^2 + z^2) dz = 6\pi \int_0^1 \rho \left(\rho^2 z + \frac{z^3}{3}\right)\Big|_\rho^1 d\rho =$$

$$= 6\pi \int_0^1 \left(\rho^3 + \frac{1}{3}\rho - \frac{4}{3}\rho^4\right) d\rho = \frac{9\pi}{10}.$$

Вычислим интеграл по основанию конуса

$$I_2 = \iint\limits_{S_2} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = \iint\limits_{S_2} dxdy = \pi.$$

Следовательно, $I = -\frac{\pi}{10}$.▼

Задачи для самостоятельного решения. С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить интегралы.

1) $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где S – внутренняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$. (Ответ: $(a+b+c)abc$).

2) $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где S – внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 1$. (Ответ: $\frac{\pi}{2}$).

3) $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тетраэдра $x + y + z \le a$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. (Ответ: $\frac{3a^5}{20}$).

4)$\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, где S – внутренняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. (Ответ: $\frac{12\pi R^5}{5}$).

4 Формула Стокса

Пусть S – ориентированная поверхность, ограниченная соответственно ориентированным контуром L. (Говорят, что поверхность и ограничивающий ее контур ориентированы соответственно, если наблюдатель, движущийся по контуру и смотрящий на поверхность с той стороны, куда направлена нормаль к поверхности, видит поверхность слева). Пусть функции $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные в некоторой области $G \supset S$. Тогда

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{12}$$

Формулу (12) называют *формулой Стокса.* Эта формула может быть записана в таком виде:

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_S\int \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) dS, \tag{13}$$

где $\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma$– вектор единичной нормали к поверхности S, направленный соответственно направлению контура L.

Условимся говорить, что замкнутая кривая *ориентирована положительно* относительно некоторого вектора $\boldsymbol{a}$, если направление на кривой (со стороны, в которую направлен вектор $\boldsymbol{a}$) противоположно направлению движения часовой стрелки, и *ориентирована отрицательно* относительно вектора $\boldsymbol{a}$, если направление на кривой совпадает с направлением движения часовой стрелки.

Пример 14. Вычислить интеграл

$$A = \int\limits_L \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz,$$

где L – кривая пересечения параболоида $x^2 + y^2 + z = 3$ с плоскостью $x + y + z = 2$, ориентированная положительно относительно вектора $(1; 0; 0)$.

$\triangle$ Применим формулу Стокса. За поверхность S, ограниченную кривой L, примем часть секущей плоскости $x + y + z = 2$, лежащей внутри параболоида. Единичным вектором нормали к S, направленным соответственно направлению кривой L, является вектор $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (единичный вектор, перпендикулярный плоскости). Так как

$$P = y^2 - z^2, \quad Q = z^2 - x^2, \quad R = x^2 - y^2,$$

то

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2(z + y), \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2(x + z), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2(y + x).$$

Применяя формулу (13), получаем

$$A = -\frac{4}{\sqrt{3}}\int\limits_S\int (x + y + z) dS = -\frac{8}{\sqrt{3}}\int\limits_S\int dS.$$

Так как $z = 2 - x - y$ на поверхности S, то

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

По формуле (2) находим

$$A = -8\iint\limits_D dxdy,$$

где D – проекция S на плоскость xOy. Исключая z из уравнений

$$x^2 + y^2 + z = 3, \quad x + y + z = 2,$$

и выделяя полный квадрат, получаем

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2},$$

т.е. D – есть круг радиуса $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Следовательно,

$$\iint\limits_D dxdy = \frac{3}{2}\pi, \quad A = -12\pi. \quad \blacktriangledown$$

Пример 15. Вычислить интеграл

$$A = \int\limits_L y^2dx + z^2dy + x^2dz,$$

где L – граница треугольника с вершинами в точках $(a;0;0)$, $(0;a;0)$, $(0;0;a)$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;1;0)$.

$\triangle$ Применим формулу Стокса. За поверхность S, ограниченную кривой L, примем часть плоскости $x + y + z = a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Единичным вектором нормали к S, направленным соответственно направлению кривой L, является вектор $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (единичный вектор, перпендикулярный плоскости). Так как

$$P = y^2, \quad Q = z^2, \quad R = x^2,$$

то

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2y.$$

Применяя формулу (13), получаем

$$A = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_S (x + y + z)dS.$$

Так как $z = a - x - y$ на поверхности S, то

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

По формуле (2) находим

$$A = -\frac{2}{\sqrt{3}}\int\int\limits_D (x+y+a-x-y)\sqrt{3}dxdy = -2a\int\int\limits_D dxdy,$$

где D – треугольник $0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a-x$. Отсюда

$$A = -2a\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy = -a^3. \qquad \blacktriangledown$$

Пример 16. Вычислить интеграл

$$A = \int\limits_L ydx + x^2dy - zdz,$$

где L – кривая $x^2+y^2=4$, $z=3$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;0;1)$.

$\triangle$ Применим формулу Стокса. За поверхность S, ограниченную кривой L, возьмем круг, имеющий L своей границей. Единичным вектором нормали к S, направленным соответственно направлению кривой L, является вектор $(0;0;1)$. Так как

$$P = y, \quad Q = x^2, \quad R = -z,$$

то

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x-1.$$

Применяя формулу (13), получаем

$$A = \int\int\limits_S (2x-1)dS = \int\int\limits_D (2x-1)dxdy,$$

где D – круг $x^2+y^2=4$. Переходя к полярным координатам, получаем

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{2\pi}(2\rho\cos\varphi - 1)\rho d\rho = \int_0^{2\pi}\left[2\frac{\rho^3}{3}\cos\varphi - \frac{\rho^2}{2}\right]\Bigg|_0^2 d\varphi = -4\pi. \quad \blacktriangledown$$

Пример 17. Вычислить интеграл

$$A = \int\limits_L ydx - xdy + zdz,$$

где L – кривая $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$, $z \geq 0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;0;1)$.

$\triangle$ Применим формулу Стокса. Найдем линию пересечения шара $x^2+y^2+z^2=4$ и конуса $x^2+y^2=z^2$.

Здесь L – окружность $x^2+y^2=2$. За поверхность S, ограниченную кривой L, возьмем круг, являющийся пересечением шара и конуса и имеющий L своей границей. Единичным вектором нормали к S, направленным соответственно направлению кривой L, является вектор $(0;0;1)$. Так как

$$P=y, \quad Q=x^2, \quad R=-z,$$

то

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x-1.$$

Применяя формулу (13), получаем

$$A=\int\limits_S\int(2x-1)dS=\int\limits_D\int(2x-1)dxdy,$$

где D – круг $x^2+y^2\leq 2$. Переходя к полярным координатам, получаем

$$A=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(2\rho\cos\varphi-1)\rho d\rho=\int_0^{2\pi}\left[2\frac{\rho^3}{3}\cos\varphi-\frac{\rho^2}{2}\right]\Big|_0^2 d\varphi=-4\pi. \quad \blacktriangledown$$

Задачи для самостоятельного решения. С помощью формулы Стокса вычислить интегралы.

1) $\int\limits_L 2xzdx-ydy+zdz$, где L – контур, образованный пересечением плоскости $x+y+2z=2$ с координатными плоскостями (Ответ: $\frac{4}{3}$).

2) $\int\limits_L zdx+xdy+ydz$, где L – кривая $x^2+y^2=4$, $z=0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;0;1)$ (Ответ: 4π).

3) $\int\limits_L zy^2dx+xz^2dy+x^2ydz$, где L – кривая $x=y^2+z^2$, $x=9$, ориентированная положительно относительно вектора $(1;0;0)$ (Ответ: 729π).

Пример 18. Дано электрическое векторное поле, в каждой точке которого по закону Кулона действует вектор $\mathbf{F}=\frac{ke}{r^2}\mathbf{r_0}$, где r – расстояние данной точки от начала координат, e – положительный электрический заряд, $\mathbf{r_0}$ – единичный вектор, направленный по радиусу-вектору данной точки, $k=const$. Определить поток векторного поля через сферу $x^2+y^2+z^2=R^2$.

$\triangle$ Имеем

$$\Pi=\int\limits_S\int(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS=\int\limits_S\int\frac{ke}{r^2}(\mathbf{r_0}\cdot\mathbf{n})dS.$$

Так как $r=R=const$ и скалярное произведение $(\mathbf{r_0}\cdot\mathbf{n})=1$, то

$$\Pi=\frac{ke}{R^2}\int\limits_S\int dS=\frac{ke}{R^2}S_{\text{сф}}=\frac{ke}{R^2}4\pi R^2=4\pi ke.\blacktriangledown$$

Список литературы

[1] Кудрявцев Л.Д, Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. *Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных.* – Санкт-Петербург, 1994. – 496 с.

[2] Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа.* – М.: Наука, 1985. – 384 с.

[3] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. *Векторный анализ.* – М.: Наука, 1978. – 160 с.