О функциях с заданными интегральными средними

Н.П. Волчкова

В работе [1] получена конструкция восстановления функции, заданной в круге $B_R = \{x \in R^2 : |x| < R\}$, если известны её интегралы по всем квадратам из B_R с фиксированной стороной $2a$, где $2\sqrt{2}a < R$. В данной работе получен аналогичный результат для равнобедренной трапеции. При этом ответ существенно усложняется в виду увеличения числа параметров. Пусть T – равнобедренная трапеция с вершинами в точках $z_1 = e^{i\alpha}$, $z_2 = -e^{-i\alpha}$, $z_3 = e^{i(\alpha+2\beta)}$, $z_4 = -e^{-i(\alpha+2\beta)}$, где $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$, $\pi < \alpha + 2\beta < 3\pi/2$. Положим

$$P_{\chi_T}(f)(g) = \int_{gT} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 \quad (g \in M : gT \subset B_R),$$

где M – группа евклидовых движений R^2, χ_E – индикатор множества E. Обозначим $D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}$, $D_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $D_3 = -ctg\,\beta \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$, $D_4 = ctg\,\beta \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. Введем операторы A_1, A_2, A_3 следующим образом: $A_1 = D_1 D_2 D_3 D_4$, если $\beta \neq \pi/3$; $A_1 = D_1^2 D_2 D_3 D_4$, если $\beta = \pi/3$; $A_2 = D_1^2 D_2 D_3 D_4$, если $\beta \neq \pi/3$, $\alpha + \beta \neq 5\pi/6$; $A_2 = D_1^7 D_2 D_3 D_4$, если $\beta \neq \pi/3$, $\alpha + \beta = 5\pi/6$, $\alpha \neq 7\pi/18$; $A_2 = D_1^{13} D_2 D_3 D_4$, если $\beta \neq \pi/3$, $\alpha + \beta = 5\pi/6$, $\alpha = 7\pi/18$; $A_2 = D_1^5 D_2 D_3 D_4$, если $\beta = \pi/3$, $\alpha \neq \pi/3$; $A_2 = D_1^8 D_2 D_3 D_4$, если $\alpha = \beta = \pi/3$; A_3 – тождественный оператор; $L = \Delta^2$, если $\beta \neq \pi/3$; $L = \Delta^3$, если $\beta = \pi/3$.

Пусть $R > 1$. При $x \in B_{R-1}$ рассмотрим функции

$$f_i(x) = \int_{SO(2)} \left\langle A_i \delta(y), \left(P_{\chi_T} f\right)\left(\left\|\begin{matrix} -k^{-1} & x - ky \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|\right)\right\rangle dk,\ i = 1,2,3,$$

где $SO(2)$ – группа вращений R^2, δ – дельта-функция в нуле R^2, dk – нормированная мера Хаара на $SO(2)$, M рассматривается как группа 3×3 матриц вида

$\begin{Vmatrix} k & x \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $k \in SO(2)$, $x \in R^2$ и R^2 отождествляется с аффинным подпространством $\{x_3 = 1\}$ в R^3.

Теорема. Пусть $R > 2$. Тогда для любого $k \in Z_+$, $\rho \in (0, R)$ существуют распределения $U_{l,i}$ ($l \in N, i = 1,2,3,4$) со следующими свойствами:

1) $\operatorname{supp} U_{l,i} \subset B_{R-1}$ ($l \in N$, $i = 1,2,3$), $\operatorname{supp} U_{l,4} \subset B_R$, ($l \in N$);

2) для любой функции $f \in C^\infty(B_R)$ имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(Lf)\left(\rho e^{i\varphi}\right)e^{-ik\varphi}d\varphi = \lim_{l\to\infty}\left(\langle U_{l,1}, f_1\rangle + \langle U_{l,2}, f_2\rangle\right),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\rho e^{i\varphi}\right)e^{-ik\varphi}d\varphi = \lim_{l\to\infty}\left(\langle U_{l,3}, f_3\rangle + \langle U_{l,4}, Lf\rangle\right).$$

Литература.

1. Berenstein K.A., Gay R., Yger A. Inversion of the local Pompeiu transform // J. Analyse Math. 1990. V. 54. P. 259-287.