УДК 517. 5

Об обращении локального преобразования Помпейю

Н.П. Волчкова

Пусть R^n – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $| \ |$, $M(n)$ – группа движений R^n, $F = \{\mu_i\}_{i=1}^k$ – конечное семейство распределений с компактным носителем в R^n. При фиксированном $g \in M(n)$ рассмотрим распределение $g\mu_i$, действующее на $C^\infty(R^n)$ по правилу

$$< g\mu_i, f >=< \mu_i, f \circ g^{-1} >, \ f \in C^\infty(R^n).$$

Преобразование Помпейю P_F (глобальное) отображает $C^\infty(R^n)$ в $C^\infty(M(n))^k$ и определяется равенством

$$P_F(f)(g) = \left(< g\mu_1, f >, ..., < g\mu_k, f >\right), \quad g \in M(n). \qquad (1)$$

Аналогично, для открытого множества $U \in R^n$ локальное преобразование Помпейю отображает по формуле (1) $C^\infty(U)$ в декартово произведение $C^\infty(\Lambda(U, \mu_1)) \times ... \times C^\infty(\Lambda(U, \mu_k))$, где $\Lambda(U, \mu_i) = \{g \in M(n) : \operatorname{supp} g\mu_i \subset U\}$.

Для заданных F и U возникает следующая

Проблема [1]. 1) Выяснить, является ли P_F инъективным и если не является, то описать его ядро.

2) Если P_F инъективно, то найти обратное отображение.

Для отдельных F и U инъективность преобразования Помпейю и близкие вопросы изучались во многих работах (см. обзоры [1], [2], а также [3]). Особый интерес представляет случай, когда $U = B_R = \{x \in R^n : |x| < R\}$, а $F = \{\chi_E\}$ – индикатор компактного множества $E \subset B_R$ положительной меры. Для этого семейства F и широкого класса множеств E (см.[4]) преобразование P_F инъективно по отношению к U, если R больше диаметра $d(E)$ наименьшего замкнутого шара, содержащего E

(см. [4], [5], а также [3], [6], где для многих E найдено минимальное значение R, при котором P_{χ_E} инъективно). Для указанного класса E и $R > \frac{3d(E)}{2}$ в работе [5] приводится также схема обращения преобразования P_{χ_E}. Кроме того, для квадрата в [5] найдена конструкция обращения преобразования Помпейю и при $R > d(E)$. В связи с этим при решении проблемы 2) большой интерес представляет усиление оценки $R > \frac{3d(E)}{2}$ для других E. В данной работе получено обращение преобразования P_{χ_E} в случае, когда E является круговой луночкой и $R > d(E)$.

Пусть, как обычно, $D(R^n) -$ пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на R^n, $D'(R^n) -$ пространство распределений на R^n, $\mu_1 * \mu_2$ - свертка двух распределений, одно из которых имеет компактный носитель. Радиализацией распределения $\mu \in D'(R^n)$ называется радиальное распределение $R\mu$, действующее на функцию $\varphi \in D(R^n)$ по формуле

$$< R\mu, \varphi >=< \mu(x), \int_{SO(n)} \varphi(kx) dk > ,$$

где $SO(n) -$ группа вращений пространства R^n, $dk -$ нормированная мера Хаара на группе $SO(n)$. Радиальность $R\mu$ означает, что для любого $k \in SO(n)$

$$< R\mu(x), \varphi(kx) >=< R\mu(x), \varphi(x) > , \quad \varphi \in D(R^n) .$$

Сферическое преобразование радиального распределения μ с компактным носителем в R^n определяется равенством

$$\tilde{\mu}(\lambda) =< \mu(x), j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda|x|) > , \quad \lambda \in C , \tag{2}$$

где $j_q(z) = \frac{I_q(z)}{z^q}$, $I_q -$ функция Бесселя первого рода порядка q.

Пусть $1 \le i < j \le n$, $h, \theta \in R^1$, $\tau_{i,h}$ – сдвиг на h вдоль x_i, $k_{i,j,\theta}$ – поворот в плоскости (x_i, x_j) на угол θ. Следующие две леммы доказаны автором в работе [7].

Лемма 1. Пусть $E \subset \overline{B}_{r_1}$, $R > r_1$, $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда

$$P_{\chi_E}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(g) = \frac{d}{dh}\left((P_{\chi_E} f)(\tau_{i,h} \circ g)\right)|_{h=0}\ , \tag{3}$$

$$P_{\chi_E}\left(D_{i,j}(0) f\right)(g) = \frac{d}{d\theta}\left((P_{\chi_E} f)(k_{i,j,\theta} \circ g)\right)|_{\theta=0}, \tag{4}$$

где $gE \subset B_R$, $D_{i,j}(a) = (x_i + a)\dfrac{\partial}{\partial x_j} - x_j \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $a \in R^1$.

Лемма 2. Пусть $R > r_1$, $E \subset \overline{B}_{r_1}$, $\nu = D^\kappa D_{i,j}(a)\chi_E$, где $\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_n) \in N^n$, $D^\kappa = \dfrac{\partial^{\kappa_1 + ... \kappa_n}}{\partial x_1^{\kappa_1} ... x_n^{\kappa_n}}$. Тогда для любой функции $f \in C^\infty(B_R)$ и $x \in B_{R-r_1}$ имеет место равенство

$$\left(\breve{f} * R\nu\right)(x) = (-1)^{|\kappa|+1} \int\limits_{SO(n)} \left(P_{\chi_E}\left(D_{i,j}(a) D^\kappa\right)(y)\left(f(ky - x)\right)\right)(e)dk\,, \tag{5}$$

где e – единица группы $SO(n)$, $|\kappa| = \kappa_1 + ... + \kappa_n$, $\breve{f}(x) = f(-x)$.

Доказательство леммы 3 ниже содержится в работе [5].

Лемма 3 . Пусть $E \subset \overline{B}_r$ и $R > r$. Тогда для любой $f \in C^\infty(B_R)$ и $x \in B_{R-r}$ имеет место равенство

$$(f * R(D^\kappa \chi_E))(x) = \int\limits_{SO(n)} \left\langle D^\kappa \delta(y), (P_{\chi_E} f)\left(\begin{Vmatrix} k & x + ky \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1}\right)\right\rangle dk\,,$$

где δ – дельта-распределение в нуле пространства R^n, $M(n)$ рассматривается как группа матриц порядка $(n+1) \times (n+1)$ вида $\begin{Vmatrix} k & x \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $k \in SO(n)$, $x \in R^n$ и R^n отождествляется с аффинным подпространством $\{x_{n+1} = 1\}$ в R^{n+1}.

Будем отождествлять точку $(x, y) \in R^2$ с комплексным числом $z = x + iy$. Пусть $\alpha \in (0, \pi)$, $\Lambda = \{z \in C : |z - \cos(\alpha/2)| \le 1, |z + \cos(\alpha/2)| \le 1\}$ – круговая луночка с вершинами в точках $z_1 = ir$, $z_2 = -ir$, $r = \sin(\alpha/2)$. Далее будут использоваться дифференциальные операторы

$$D_1=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y},\quad D_2=-y\frac{\partial}{\partial x}+(x+\cos(\alpha/2))\frac{\partial}{\partial y},$$

$$D_3=-y\frac{\partial}{\partial x}+(x-\cos(\alpha/2)(ctg(\alpha/2)-1))\frac{\partial}{\partial y},$$ Δ- оператор Лапласа.

Пусть $R>r$. Обозначим $R_k=R\left(D_1{}^k\mu\right)$, где $\mu=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}D_3\right)D_2\chi_\Lambda$. Для $z\in B_{R-r}$ положим $f_i(z)=(f*\nu_i)(z)$, $i=1,2$, $f_3(z)=(f*R\chi_\Lambda)(z)$, где $\nu_1=R_1$, $\nu_2=\Delta R_1+R_3$.

Основным результатом работы является

Теорема 1. Пусть $R>2r$. Тогда для любого $k\in Z$ и $\rho\in(0,R)$ существуют (и строятся явно) распределения $U_{l,i}$ $(l\in N,\, i=1,2,3,4)$ со следующими свойствами:

1) $supp\, U_{l,i}\subset B_{R-r}$ $(l\in N,\, i=1,2,3)$, $supp\, U_{l,4}\subset B_R$ $(l\in N)$;

2) для любой $f\in C^\infty(B_R)$ имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\Delta^2 f)(\rho e^{it})e^{-ikt}dt=\lim_{l\to\infty}\left(<U_{l,1},f_1>+<U_{l,2},f_2>\right), \tag{6}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\rho e^{it})e^{-ikt}dt=\lim_{l\to\infty}\left(<U_{l,3},f_3>+<U_{l,4},\Delta^2 f>\right). \tag{7}$$

Замечание. Пусть $x\in B_{R-r_1}$, $k\in SO(n)$ (x,k - фиксированы), g_1- элемент группы движений, действующий по формуле $g_1y=ky-x$. Тогда

$$P_{\chi_E}\left(f(ky-x)\right)(g)=P_{\chi_E}(f)(g_1g),\ \text{где}\ gE\subset B_{R-|x|}.$$

Отсюда и из (3), (4) следует, что леммы 2, 3 позволяют вычислять f_i по известному преобразованию Помпейю функции f. Таким образом, формулы (6), (7) восстанавливают функцию f по ее преобразованию Помпейю.

Лемма 4. Для любой $f\in C^3(\Lambda)$ имеет место равенство

$$\int_\Lambda D_2\left(\frac{\partial}{\partial x}+D_3\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)dxdy=2\cos(\alpha/2)\left(f(z_1)-f(z_2)-\sin(\alpha/2)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(z_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(z_2)\right)\right).$$

Утверждение леммы 4 содержится в работе [6].

Перейдем к доказательству теоремы 1. Поскольку $j_k'(t)=-tj_{k+1}(t)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z^k j_k(\lambda|z|)\right)=kz^{k-1}j_k(\lambda|z|)-\lambda^2z^kxj_{k+1}(\lambda|z|), \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(z^k j_k(\lambda|z|)\right) = ikz^{k-1} j_k(\lambda|z|) - \lambda^2 z^k y j_{k+1}(\lambda|z|). \qquad (9)$$

Из (8), (9) индукцией по k находим $(-1)^k D_1^k \left(I_0(\lambda|z|)\right) = \lambda^{2k} z^k j_k(\lambda|z|)$ и (см.(2))

$$\tilde{R}_k(\lambda) = \lambda^{2k} < \mu(z), z^k j_k(\lambda \mid z \mid) >. \qquad (10)$$

Из (10) имеем

$$\tilde{R}_k(\lambda) = R\left(D_1^k \mu\right)^{\sim}(\lambda) = \lambda^{2k} < \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} D_3\right) D_{\chi_\Lambda}, z^k j_k(\lambda r) >=$$

$$\lambda^{2k} < \chi_\Lambda, D_2\left(\frac{\partial}{\partial x} + D_3 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z^k j_k(\lambda r)\right) >$$

(здесь мы использовали свойства умножения и дифференцирования распределений). Учитывая (8), (9), отсюда и из леммы 4 получаем

$$\tilde{R}_k(\lambda) = 2\cos(\alpha/2)\lambda^{2k}\left(1-(-1)^k\right) i^k r^k \left((1-k) j_k(\lambda r) + \lambda^2 r^2 j_{k+1}(\lambda r)\right).$$

Теперь повторяя рассуждения из [7] , получаем утверждение теоремы 1.

Литература

1. Беренстейн К.А., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам.направления. - Т.54: ВИНИТИ. - 1989. - С. 5-111.
2. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations, ed. B.Fuglede et al. - 1992 . -P.185-194.
3. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations.-Dordrecht-Boston-London : Kluwer Academic Publishers, 2003.
4. Berenstein C.A., Gay R. Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. -1989. - V.52. - P. 133-166.
5. Berenstein C.A., Gay R., Yger A. Inversion of the local Pompeiu transform // J. Analyse Math. - 1990. - V.54. - P. 259-287.
6. Машаров П.А. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю // Доповіді НАН України. - 2001. - №7. - С. 126-132.
7. Волчкова Н.П. Inversion of the local Pompeiu transform // Functional Analysis and its Applications. – 2004. – V. 197. – P. 301-309.

УДК 517. 5

Н.П.Волчкова (N.P.Volchkova)

Донецкий национальный технический университет

Об обращении локального преобразования Помпейю

Про обернення локального перетворення Помпейю

Inversion of the local Pompeiu transform

Получена конструкция обращения локального преобразования Помпейю для множеств вида $\Lambda = \{z \in C : |z - \cos(\alpha/2)| \le 1, |z + \cos(\alpha/2)| \le 1\}$, $\alpha \in (0, \pi)$

Одержано конструкцію обернення локального перетворення Помпейю для множин вигляду $\Lambda = \{z \in C : |z - \cos(\alpha/2)| \le 1, |z + \cos(\alpha/2)| \le 1\}$, $\alpha \in (0, \pi)$

The constraction of the inversion of the local Pompeiu transform for sets of the form $\Lambda = \{z \in C : |z - \cos(\alpha/2)| \le 1, |z + \cos(\alpha/2)| \le 1\}$, $\alpha \in (0, \pi)$ is obtained.

Сведения об авторе.

Ф.И.О.	Волчкова Наталья Петровна
Место работы, должность	Донецкий национальный технический университет, ассистент кафедры высшей математики
e-mail	volchkov@univ.donetsk.ua