

## Выделение трендов с минимально возможной колеблемостью

Смирнов А.В., Тихонова О.А.

Донецкий национальный технический университет

oks\_mail777@mail.ru

### **Abstract**

*Smirnov A.V., Tikhonova O.A. Selecting of trends with minimal fluctuation. New class of moving average algorithms is described. Comparison of moving average algorithms is performed. New algorithms used minimal fluctuation criteria are analyzed.*

### **Введение**

При решении задач технического, экономического, социального и др. видов прогнозирования, исследователи часто пользуются прогнозными моделями на основе экстраполяции выделенных трендов. Качество прогнозирования (величина доверительного интервала прогноза), глубина возможного прогноза зависят от дисперсии отчетов выделяемых трендов относительно их истинных значений. Чем менее «колеблемый» выделенный тренд, тем точнее и дальше по времени в будущем осуществляется статистический прогноз. Выделение трендов, как правило, производится при помощи различных типов скользящих средних [1]. В [2] предложен оригинальный тип скользящего усреднения названный авторами синтетическими скользящими средними (ССС). Главными достоинствами СССР являются: минимизация временной задержки продуктов усреднения относительно уровней усредняемого временного ряда и минимальная колеблемость выделяемых трендов.

Целью данных исследований является количественная оценка величины дисперсии выделяемых трендов при помощи СССР и сравнение ее с аналогичными характеристиками при использовании для усреднения простых скользящих средних (ПСС) и экспоненциальных скользящих средних (ЭСС).

### **Анализ алгоритмов скользящих средних**

Поскольку работа [2] опубликована за рубежом и не достаточно известна широкому кругу специалистов, то коротко остановимся на основных ее положениях.

Как показано в [2], алгоритм [2] сводится к многократному усреднению исследуемого ряда «назад – вперед». В таблице 1 приведен алгоритм реализации СССР для величины временного окна усреднения  $m=4$ .

Таблица 1. Алгоритм формирования синтетической скользящей средней.

$C_i$ $Q_i$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
I	$\leftarrow$ $Q_4=Q_3+\alpha(C_1-Q_3)$	$Q_3=Q_2+\alpha(C_2-Q_2)$	$Q_2=Q_1+\alpha(C_3-Q_1)$	$\leftarrow$ $Q_1=C_4$
II	$\downarrow$ $Q_5=Q_4$	$Q_6=Q_5+\alpha(Q_3-Q_5)$	$Q_7=Q_6+\alpha(Q_2-Q_6)$	$\rightarrow$ $Q_8=Q_7+\alpha(Q_1-Q_7)$

В таблице 1  $C_i$  это величины цен закрытия биржевого ценового графика (уровни исследуемого временного ряда). Значения  $Q_i$  – отчеты выделяемого тренда с помощью ЭСС. При усреднении «назад» накапливается временная задержка усреднения (групповая задержка), которая компенсируется при обратном проходе «вперед». Комбинация проходов «назад – вперед» способствует получению значений ССС в нужное время, соответствующего моменту существования  $C_4$  (это позволяет реализовать оперативное управление). Величина  $\alpha$  (коэффициент экспоненциального усреднения) определяется как

$$\alpha = \frac{2}{\left(\frac{m}{2}\right) + 1}, \quad (1)$$

где:  $m$  – величина временного окна усреднения.

Отличие (1) от традиционного выражения заключается в том, что используется не  $m$ , а  $m/2$ . Поскольку при двойном проходе (усреднении уровней временного ряда  $C_i$ ) эквивалентная величина  $m$  удваивается. Далее как и при реализации любого алгоритма скользящего усреднения уровень  $C_1$  отбрасывается и добавляется новый  $C_5$ . Для реализации, например,  $m=8$  количество проходов «назад – вперед» равно соответственно четырем («назад – вперед – назад – вперед»). Главный недостаток ССС – значение  $m$  должно быть кратно четырем.

Для достижение поставленной цели нам необходимо определить импульсные характеристики ССС при различных значениях  $m$ . К сожалению, это достаточно трудоемкая задача и она в общем виде не решается. Поскольку процесс усреднения ССС осуществляется последовательно, то импульсные характеристики находят путем многократных операций свертки исходных импульсных характеристик ЭСС с учетом направлений усреднений. Второй особенностью определения импульсных характеристик ССС является тот факт, что используются не бесконечное число отчетов исходных импульсных характеристик ЭСС, а их ограниченное число (определенное значением  $m$ ). Заметим также, что в процессе нахождения импульсных характеристик ССС нельзя забывать об условии их нормировки,

т.е.  $\sum_{k=0}^{m-1} h_k \equiv 1$ . Эти нормировки должны осуществляться на каждом этапе многократной свертки. В таблице 2 приведены значения отсчетов импульсных характеристик ССС для различных значений  $m$ .

Таблица 2

Импульсные характеристики ССС.

m \ h <sub>k</sub>	Номер отсчета k											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	0,6777	0,2256	0,0744	0,0223	-	-	-	-	-	-	-	-
8	0,6669	0,2223	0,0741	0,0247	0,0082	0,0027	0,0009	0,0002	-	-	-	-
12	0,6667	0,2222	0,0741	0,0247	0,0082	0,0027	0,0009	0,0003	0,0001	$3,27 \cdot 10^{-5}$	$9,7 \cdot 10^{-6}$	$2,09 \cdot 10^{-6}$

Исследования импульсных характеристик ССС предложенных нами ССС показали:

- ССС – это новый класс алгоритмов скользящего усреднения. Он является комбинацией и компромиссом между двумя известными классами цифровых фильтров: с бесконечными импульсными характеристиками (БИХ) и конечными импульсными характеристиками (КИХ);
- сравнение импульсных характеристик традиционных алгоритмов ПСС (рис.1а), ЭСС (рис.1б) и предложенных ССС (рис.1в) показывает, что число отсчетов импульсных характеристик ПСС и ССС конечно, а величины  $h_k$  ССС быстрее убывают с ростом  $k$ ;
- быстрее убывание отсчетов  $h_k$  с ростом  $k$  способствует уменьшению статистических взаимосвязей между отдельными уровнями исследуемого ряда, что благоприятствует уменьшению колеблемости выделяемого тренда.

На рисунке 1 представлены импульсные характеристики соответственно а) ПСС, б) ЭСС, в) ССС для  $m=8$ .

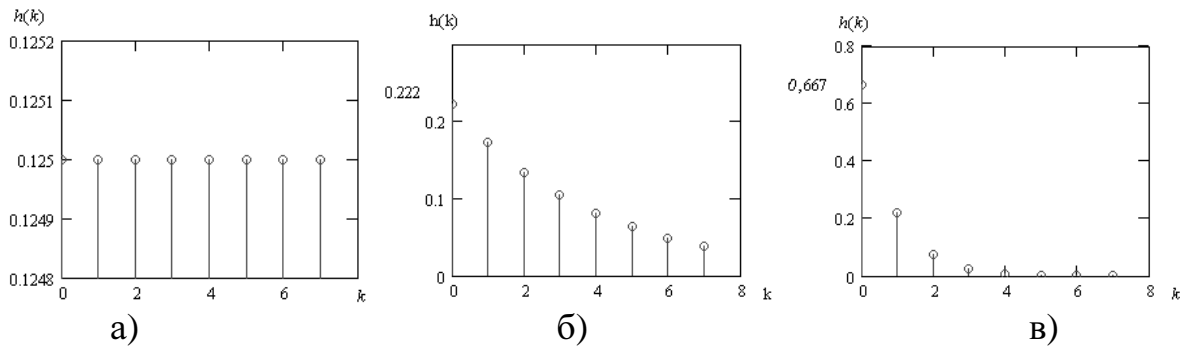


Рисунок 1 – Импульсные характеристики различных алгоритмов усреднения

На рисунке 1 б) число  $h_k$  бесконечно большое, но для наглядности показаны только первые их значения.

### Сравнительный анализ колеблемости выделяемых трендов

Переходим к сравнительному анализу колеблемости выделяемых трендов с помощью алгоритмов усреднения (ПСС, ЭСС, ССС) при различных  $m$ . Эту часть исследований проведем при следующих допущениях: уровни временных рядов варьируют относительно выделяемых трендов по нормальному закону; исследуемый процесс после усреднения стационарный и характеризуется нормированной автокорреляционной функцией  $R(k)$ ; спектральная плотность мощности исследуемых уровней временного ряда до усреднения представляет собой «белый шум», т.е.  $G(\omega) = G = \text{const}$  и не зависит от частоты. В этом случае любой алгоритм усреднения можно рассматривать как «формирующий» цифровой фильтр, т.е.  $R(k)$  определяется его амплитудно-частотной характеристикой.

При оговоренных выше допущениях дисперсия оценок математического ожидания (колеблемость исследуемого тренда) определяется выражением [3]:

$$\sigma_{\text{вых}}^2(m_1^*) = \frac{\sigma_{\text{вх}}^2}{m} \left[ 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} \left( 1 - \frac{k}{m} \right) \cdot R(k) \right] \quad (2)$$

где:  $\frac{\sigma_{\text{вх}}^2}{m}$  - дисперсия оценок выделяемого тренда без учета влияния алгоритма усреднения;

$m$  – число независимых уровней исследуемого временного ряда;

$R(k)$  – нормированная автокорреляционная функция, зависящая от используемого алгоритма усреднения.

Для сравнительного анализа «колеблемости» выделяемых трендов нам необходимо знать автокорреляционные функции  $R(k)$  всех алгоритмов:

$$R(k) = h_k * h_{k-m}, \quad (3)$$

где: знак \* означает свертку отчетов  $h_k$ .

Заметим, что значение  $R(0) \equiv 1$  и  $R(k)$  симметрична относительно нулевого отсчета, т.е. после реализации свертков (3) необходимо обязательно произвести нормировку  $R(k)$ .

Известно, что импульсные характеристики традиционных ПСС и ЭСС определяются следующими выражениями [4]:

$$h_k = 1 / m, \quad k = 0; 1; \dots m \quad (4)$$

$$h_k = \alpha(1-\alpha)^k, \quad k = 0; 1; \dots \infty \quad (5)$$

где:  $k$  – номер отсчета импульсной характеристики;

$\alpha \equiv \frac{2}{m+1}$  – коэффициент экспоненциального усреднения традиционной ЭСС.

На рис.2 показаны графики  $\sigma_{вых}^2$  от  $m$  для различных алгоритмов при  $\sigma_{вх}^2 = 1$ , полученные с использованием (2).

Можно следующим образом объяснить полученные нами результаты (рис.2). С ростом  $m$  у ПСС и ЭСС усиливаются автокорреляционные связи между соседними уровнями усредняемого ряда. Число независимых уровней анализа  $m$  резко сокращается. Это приводит к уменьшению эффекта усреднения. Операция многократного усреднения «назад – вперед» способствует временной декорреляции исследуемого временного ряда (ослабевают статические связи между соседними уравнениями этого ряда). Этот факт является основной причиной существенно лучшей фильтрации ССС по сравнению с ПСС и ЭСС (рис.2)

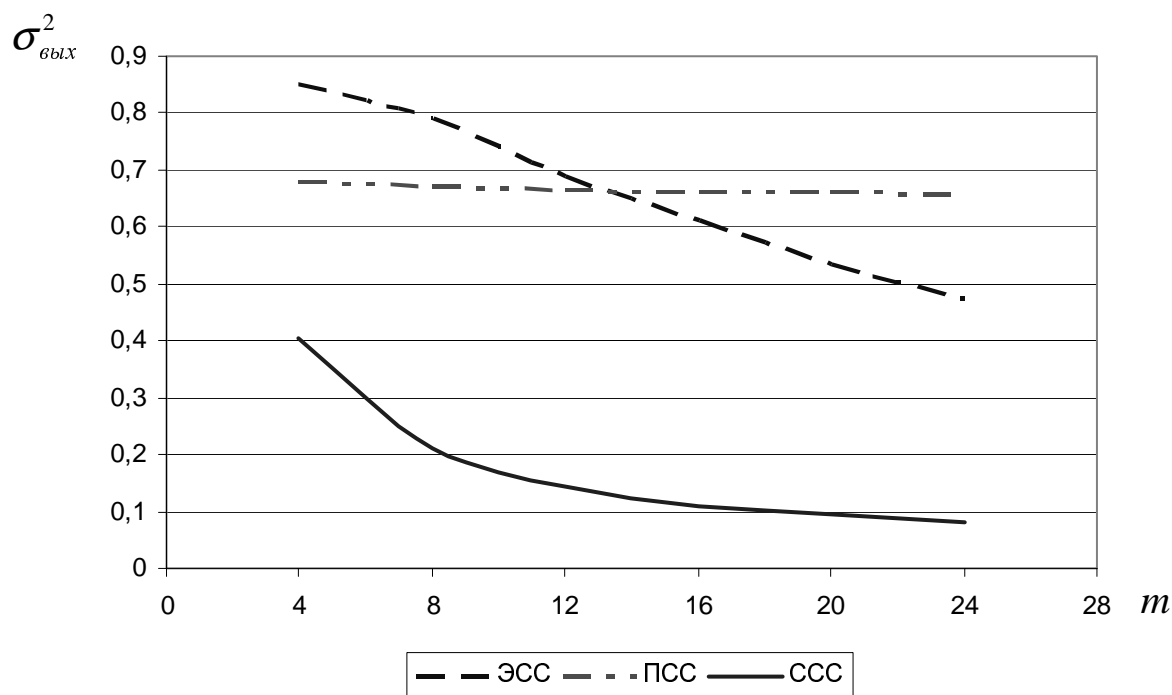


Рисунок 2 – Дисперсии оценок различных алгоритмов усреднения

## **Выводы**

Исследования, проведенные нами в данной работе позволяют сделать следующие выводы:

1. ССС – это физически не реализуемый цифровой фильтр, обладающий свойствами как БИХ так и КИХ-фильтров. Наряду с уникальной способностью ССС компенсировать задержки их реакций (компенсация временного запаздывания), они позволяют существенно уменьшить колеблемость выделяемых трендов. При  $m=4$  выигрыш ССС в уменьшении  $\sigma_{\text{былх}}^2$  составляет 1,7 раз по сравнению с ПСС и 2,1 раза по сравнению с ЭСС. С ростом  $m$  этот выигрыш существенно растет и соответственно равен 9,4 и 6,9 раз при  $m=24$ .
2. Механизм уменьшения колеблемости выделяемых трендов с помощью ССС прост: усреднение временного ряда в противоположных направлениях («назад – вперед») приводит к временной декорреляции продуктов усреднения (уменьшению статических взаимосвязей между соседними уровнями усредненного временного ряда). При этом количество независимых уровней ряда существенно не уменьшается как это происходит при использовании ПСС и частично ЭСС. Частные эффекты от усреднения ССС при каждом проходе в любом направлении складываются, а эффект от увеличения статистических связей – уменьшаются.

## **Литература**

1. Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М. Анализ временных рядов и прогнозирование: Учебник. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 228с.
2. Смирнов А., Тихонова О. Секрет совершенства индикаторов Марка Джурика раскрыт? – М.: // Валютный спекулянт, 2006, № 01 (75), с. 32-35.
3. Куликов Е.И. Методы измерения случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1986. – 272с.
4. Кобринский Н.Е. Информационные фильтры в экономике (Анализ временных рядов). – М.: Статистика, 1978. – 287с.
5. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2002. – 608с.