

## Метод антиаліазингу границі кола з адаптивною схемою розташування додаткових точок

Романюк О.Н.

Вінницький національний технічний університет,

E-mail : ran@svitonline.com

### **Abstract**

*Romanyuk O.N. The circle boundary antialiasing method with adaptive arrangement pattern of additional points. In article have been found analytic formulas for interdependence of evaluation function and pixels area covered by trajectory of lines and quadratic curves. Developed edge antialiasing method in which additional evaluation functions are used for calculation of pixels area covered by objects edge trajectory.*

### **Загальна постановка проблеми**

На сучасному етапі розвитку комп'ютерної графіки особлива увага приділяється підвищенню реалістичності синтезованих зображень. Одним із факторів, що суттєво впливають на реалістичність зображення, є ефект аліазингу, який спричинений недостатньою роздільною здатністю пристроїв відображення і проявляється у вигляді чітко виражених „зубців” на краях графічних об'єктів. Оскільки існують фізичні та економічні обмеження щодо підвищення роздільної здатності сучасних дисплеїв, то у системах комп'ютерної графіки використовують спеціальні методи антиаліазингу. Існуючі методи антиаліазингу характеризуються значними обчислювальними витратами та складністю апаратної реалізації, що обмежує їх застосування. Тому питання підвищення продуктивності процедури антиаліазингу та спрощення її програмно-апаратної реалізації є актуальними.

### **Аналіз методів антиаліазингу границі кола**

В аналітичних методах антиаліазингу піксел розглядається не як умовна точка, а як скінченна область. Найбільш поширеними серед аналітичних методів є методи крайового антиаліазингу, які забезпечують усунення ступінчастого ефекту вздовж контурів об'єктів.

При згладжуванні границі кола згідно з методами крайового антиаліазингу найбільш трудомістким є обчислення площі покриття піксела колом.

Алгоритм антиаліазингу границь кіл і еліпсів М. Капеля [2] для обчислення площі покриття використовує підхід, який базується на знаходженні квадратних коренів за методом Ньютона [3]. Основний недолік алгоритму полягає в необхідності виконання операції ділення в

циклі інтерполювання, що призводить до великих обчислювальних витрат та ускладнює апаратну реалізацію.

Алгоритм антиаліаїзingu М. Піттуея [4] використовує спрощенні вирази для обчислення інтенсивностей кольору точок. Даний алгоритм не містить довгих операцій у циклі інтерполювання та може бути просто реалізований апаратно, однак забезпечує порівняно низьку якість згладжування.

Д. Філд [5] запропонував підхід до антиаліаїзingu границь кіл, у якому для обчислення значень площі покриття використовується метод прогнозувань та поправок. Інтенсивність кольору пікселя визначається за формулою:

$$I_p = I_M \cdot \alpha,$$

де  $\alpha$  - площа покриття пікселя колом,  $I_p$  - інтенсивність кольору пікселя,  $I_M$  - інтенсивність кольору переднього плану.

При визначенні площі перерізу пікселя та кола враховують, що в другому октанті границя кола перетинає один або два суміжні пікселі по вертикалі. При визначенні площі  $\alpha$  дуга кола апроксимується прямою (рис. 1).

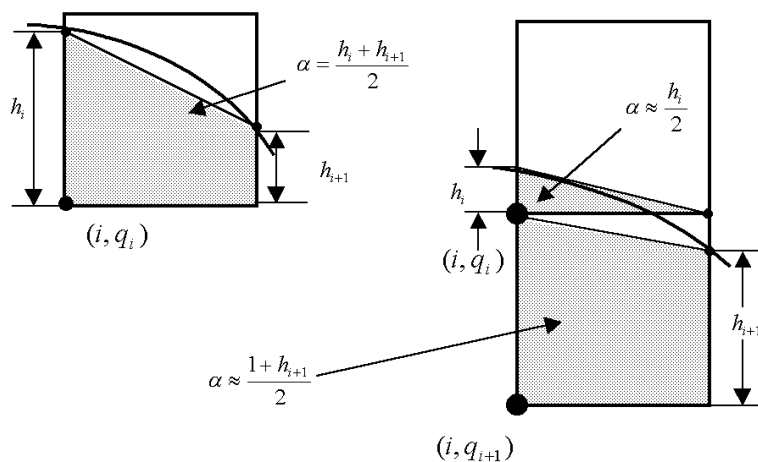


Рисунок 1 – Обчислення площі покриття за методом Філда

Для випадку, коли границя кола перетинає лише один піксел, розрахунок площі покриття проводиться за формулою:

$$\alpha \approx \frac{h_i + h_{i+1}}{2},$$

де  $h_i = \sqrt{R^2 - i^2} - q_i$ ;  $R$  - радіус кола;  $(i, q_i)$  - координати пікселя.

Для спрощення обчислень використовують такі вирази:

$$\alpha_{\text{верх}} \approx \frac{h_i}{2}, \quad \alpha_{\text{низ}} \approx \frac{1+h_{i+1}}{2},$$

де  $h_i = \sqrt{R^2 - i^2} - q_i$ ;  $R$  - радіус кола;  $(i, q_i)$  - координати пікселя.

Для обчислення виразу  $h_i = \sqrt{R^2 - i^2}$  застосовується метод прогнозувань та поправок [6]. Основний цикл інтерполювання містить лише операції типу додавання.

Ксяолін Ву [7] запропонував метод антиаліазингу границі кола, суть якого полягає в тому, що інтенсивність кольору дуги кола розподіляється між двома суміжними пікселями, що знаходяться безпосередньо над та під ідеальною дугою, пропорційно до відстані від центра пікселя до точки, у якій дуга перетинає координатну решітку (рис. 2). Сума інтенсивностей цих двох пікселів завжди дорівнює максимальній. Інтенсивності кольору пікселів визначаються за формулами:

$$I(\lfloor \sqrt{r^2 - j^2} \rfloor | j) = D(r, j); \quad I(\lceil \sqrt{r^2 - j^2} \rceil | j) = \overline{D(r, j)},$$

$$D(r, j) = \lfloor (2^m - 1) \left( \sqrt{r^2 - j^2} - \lfloor \sqrt{r^2 - j^2} \rfloor \right) + 0.5 \rfloor$$

де  $r$  - радіус кола;  $1 \leq j \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$ ;  $2^m$  - кількість рівнів інтенсивності.

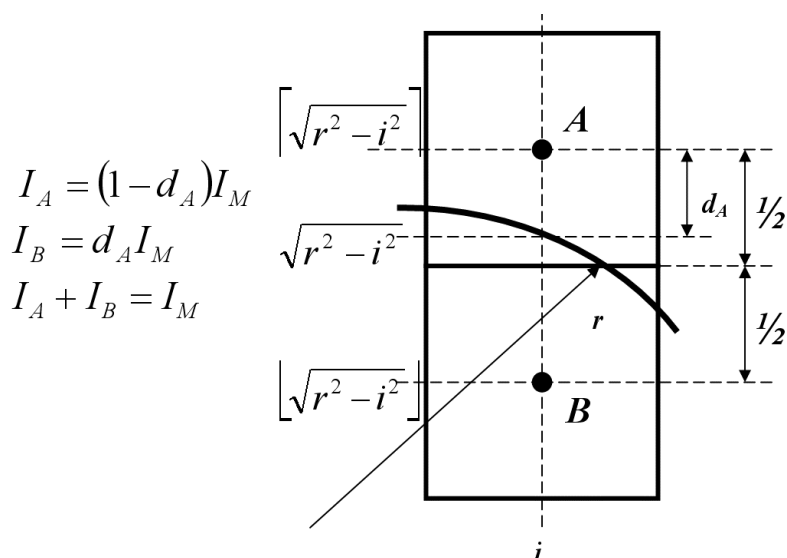


Рисунок 2 – Визначення інтенсивності кольору пікселей за методом Ву

Координати точок траєкторії визначаються за методом цифрового диференційного аналізатора. Обчислення функції  $D(r, j)$  потребує знаходження квадратного кореня, що суттєво ускладнює обчислювальний процес. Ву [7] запропонував використати таблиці значень функції  $D(r, j)$ . Кількість комірок пам'яті, необхідних для зберігання значень  $D(r, j)$ , залежить від максимального значення, яке може приймати радіус кола.

Обчислювальна складність методу Ву менша порівняно з методом Філда, однак він потребує використання блоків постійної пам'яті для зберігання таблиці функції  $D(r, j)$ , що ускладнює апаратну реалізацію пристрою на основі БМК і ПЛІС.

За участю автора розроблено метод [8] визначення площі покриття піксела колом, який використовує додаткові оцінювальні функції. Нехай задано множину точок  $T_{i,j}$  ( $i=1,2,\dots,H, j=1,2,\dots,V$ ), які розташовані всередині піксела у вигляді матриці, що складається з  $H$  стовпців та  $V$  рядків (рис. 3). Для кожної точки  $T_{i,j}$  введемо ознаку  $P_{i,j}$  таким чином, що для точок, які покриваються графічним примітивом,  $P_{i,j} = 1$ . В усіх інших випадках  $P_{i,j} = 0$ . Площу покриття піксела графічним примітивом можна наближено обчислити за виразом:

$$S_{\text{покр.}} \approx S_a = \frac{\sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^V P_{i,j}}{H \cdot V}.$$

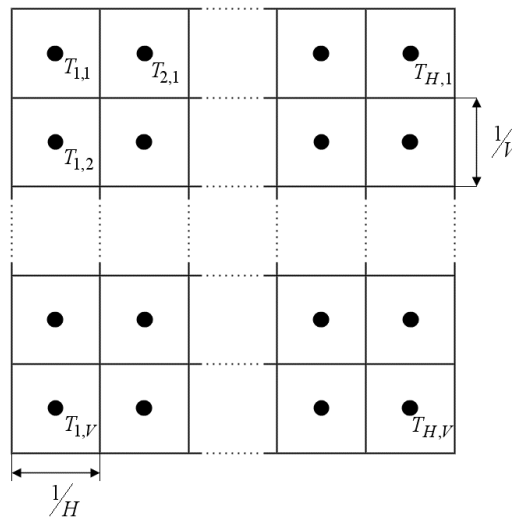


Рисунок 3 – Розташування допоміжних точок всередині піксела

Для розрахунку значення ознак  $P_{i,j}$  використано метод оцінювальної функції [9]. Відомо, що оцінювальна функція від'ємна для всіх точок, що лежать всередині графічного примітива. Таким чином, знак оцінювальної функції, яка розрахована у допоміжній точці  $T_{i,j}$ , визначає розташування даної точки відносно границі графічного примітива

При використанні чотирьох допоміжних точок на кожному кроці шукана площа апроксимується за допомогою п'яти дискретних значень: 0; 1/4; 1/2; 3/4; 1. Ці значення відповідають таким умовам: "0" – увесь піксел

знаходиться за межами границі кола; “1/4” – четверта частина піксела знаходиться всередині кола; “1/2” – половина піксела знаходиться всередині кола; “3/4” – три четвертих піксела знаходиться всередині кола; “1” – увесь піксел знаходиться всередині кола.

Для вибору дискретного значення використовуються чотири допоміжні точки: A, B, C, D (рис. 4).

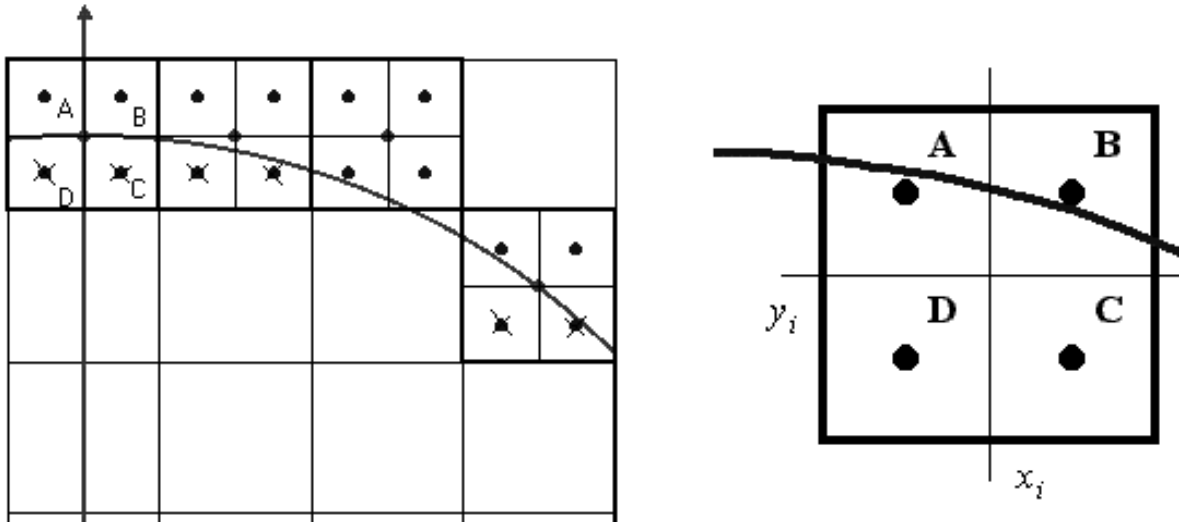


Рисунок 4 — Допоміжні точки для визначення площі, що відтинається від піксела дугою кола

Залежно від кількості допоміжних точок, що попадають всередину кола, шукана площа апроксимується відповідним значенням. Наприклад, якщо лише одна допоміжна точка знаходиться всередині кола, то вважається, що площа частини піксела, яка знаходиться всередині кола, дорівнює  $\frac{1}{4}$ .

Для визначення розташування допоміжних точок відносно границі кола використано метод оцінювальної функції, яка обчислюється за формулою [9]:

$$O\Phi_i = x_i^2 + y_i^2 - R^2.$$

Допоміжна точка A має координати:  $x_i^A = x_i - 1/4$ ;  $y_i^A = y_i + 1/4$ . Відповідно, значення оцінювальної функції в цій точці дорівнює:

$$\begin{aligned} O\Phi_i^A &= (x_i - 1/4)^2 + (y_i + 1/4)^2 - R^2 = (x_i^2 + y_i^2) - R^2 - \frac{x_i}{2} + \frac{y_i}{2} + \frac{1}{8} = \\ &= O\Phi_i - \frac{x_i}{2} + \frac{y_i}{2} + \frac{1}{8} \approx O\Phi_i - \left( \frac{x_i - y_i}{2} \right); \end{aligned}$$

Значення оцінювальної функції в інших допоміжних точках обчислюється за формулами:

$$O\Phi_i^B = O\Phi_i + \frac{x_i}{2} + \frac{y_i}{2} + \frac{1}{8} \approx O\Phi_i + \frac{x_i}{2} + \frac{y_i}{2} = O\Phi_i + \left(\frac{x_i + y_i}{2}\right);$$

$$O\Phi_i^C = O\Phi_i + \frac{x_i}{2} - \frac{y_i}{2} + \frac{1}{8} \approx O\Phi_i + \frac{x_i}{2} - \frac{y_i}{2} = O\Phi_i + \left(\frac{x_i - y_i}{2}\right);$$

$$O\Phi_i^D = O\Phi_i - \frac{x_i}{2} - \frac{y_i}{2} + \frac{1}{8} \approx O\Phi_i - \frac{x_i}{2} - \frac{y_i}{2} = O\Phi_i - \left(\frac{x_i + y_i}{2}\right).$$

Із наведених формул видно, що обчислення значень оцінювальної функції у додаткових точках можна виконати незалежно. Згідно із запропонованим методом для визначення інтенсивності кольору точки на кожному кроці інтерполяції обчислюються значення оцінювальної функції у додаткових точках і перевіряється, яка кількість точок попала всередину кола (скільки додаткових оцінювальних функцій мають від'ємний знак). Якщо всередину кола попали всі 4 точки, то  $I = I_M$ ; якщо лише 3 точки, то  $I = 3 \cdot I_M / 4$ ; якщо дві, то  $I = I_M / 2$ ; якщо одна – то  $I = I_M / 4$ . Для підвищення швидкодії значення  $I_M$ ;  $3 \cdot I_M / 4$ ;  $I_M / 2$ ;  $I_M / 4$  можна обчислювати лише одноразово в циклі підготовки.

Максимальне значення абсолютної похибки апроксимації площі покриття дорівнює  $\max(\Delta S) = \frac{(V+H)^2}{8V^2H}$  [8]. Для нашого випадку  $V = H = 2$ , тому  $\max(\Delta S) = \frac{1}{4}$ .

Точність апроксимації площі покриття може бути підвищена за рахунок використання більшої кількості допоміжних точок. На рис. 5. показано вісім точок, у яких обчислюються додаткові оцінювальні функції.

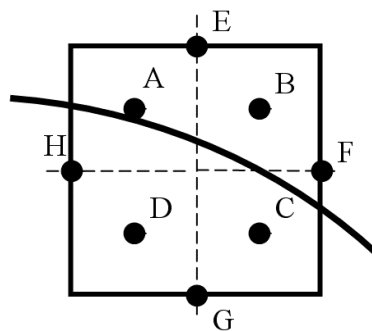


Рисунок 5 — Розташування вісьми додаткових точок для обчислювання оцінювальної функції

Для підвищення точності апроксимації площі покриття піксела можна використати різні схеми розташування допоміжних точок залежно від характеру перетину піксела траєкторією.

### **Мета статті та постановка задач**

Мета статті – підвищення точності антиаліайзингу за рахунок адаптивного вибору допоміжних точок для визначення площі покриття піксела траєкторією кола. Основні задачі, які при цьому необхідно вирішити: визначення положення додаткових точок; отримання функціональних залежностей для розрахунку оцінювальних функцій; аналіз похибок апроксимації.

### **Розробка методу антиаліайзингу**

Розглянемо використання адаптивного вибору розташування допоміжних точок для випадку антиаліайзингу кіл. Дуга кола в другому півоктанті перетинає один або два піксели в ортогональному напрямку [8]. Якщо траєкторія кола перетинає лише один піксел в ортогональному напрямку, то пропонується використати розміщення допоміжних точок, зображене на рис. ба. Оцінювальні функції в даному випадку розраховуються за виразами:

$$\begin{aligned} O\Phi_i^A &= x_i^2 + \left(y_i - \frac{3}{8}\right)^2 - R^2 = (x_i^2 + y_i^2) - R^2 - \frac{6y_i}{8} + \frac{9}{64} = O\Phi_i - \frac{y_i}{2} - \frac{y_i}{4} + \frac{9}{64}; \\ O\Phi_i^B &= x_i^2 + \left(y_i - \frac{1}{8}\right)^2 - R^2 = (x_i^2 + y_i^2) - R^2 - \frac{y_i}{4} + \frac{1}{64} = O\Phi_i - \frac{y_i}{4} + \frac{1}{64}; \\ O\Phi_i^C &= x_i^2 + \left(y_i + \frac{1}{8}\right)^2 - R^2 = (x_i^2 + y_i^2) - R^2 + \frac{y_i}{4} + \frac{1}{64} = O\Phi_i + \frac{y_i}{4} + \frac{1}{64}; \\ O\Phi_i^D &= x_i^2 + \left(y_i + \frac{3}{8}\right)^2 - R^2 = (x_i^2 + y_i^2) - R^2 + \frac{6y_i}{8} + \frac{9}{64} = O\Phi_i + \frac{y_i}{2} + \frac{y_i}{4} + \frac{9}{64}. \end{aligned}$$

Коли дуга кола перетинає два ортогональних піксела, пропонується обчислення площі покриття виконувати за формулою [8]

$$S_{\text{верх}} = H_a^2 / (2H_a + 2|H_b|).$$

Визначення параметрів  $H_a$  та  $H_b$  зображено на рис. бб.

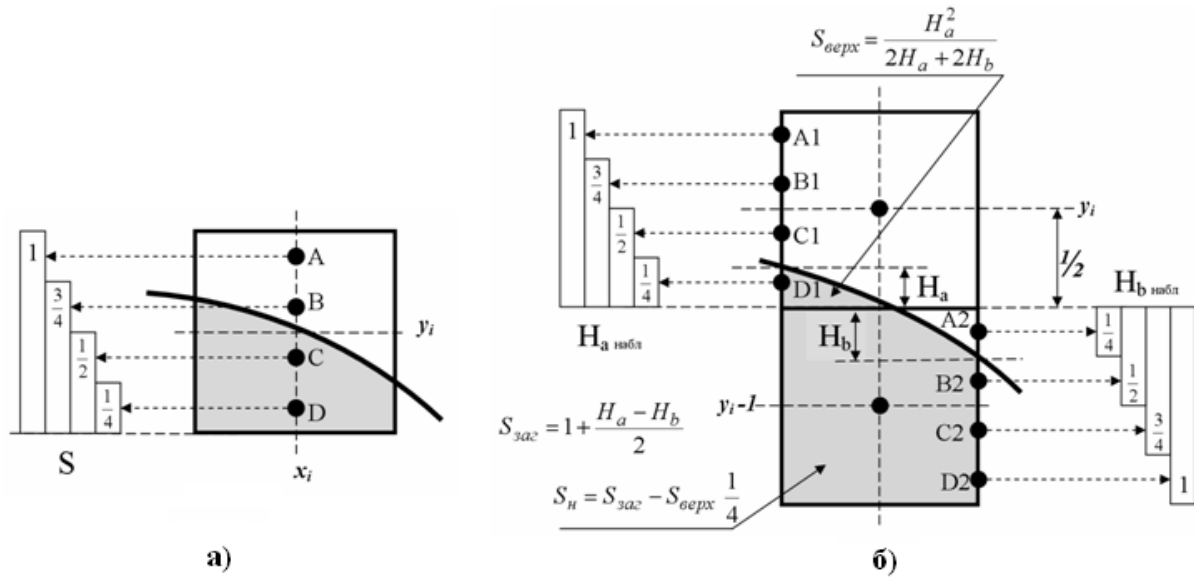


Рисунок 6 — Приклад адаптивного розміщення додаткових точок всередині пікселя

Оцінювальні функції при цьому розраховуються за формулами:

$$O\Phi_i^{A1} = \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i - \frac{3}{8}\right)^2 - R^2 = O\Phi_i - x_i - \frac{y_i}{2} - \frac{y_i}{4} + \frac{25}{64};$$

$$O\Phi_i^{B1} = \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i - \frac{1}{8}\right)^2 - R^2 = O\Phi_i - x_i - \frac{y_i}{4} + \frac{17}{64};$$

$$O\Phi_i^{C1} = \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i + \frac{1}{8}\right)^2 - R^2 = O\Phi_i - x_i + \frac{y_i}{4} + \frac{17}{64};$$

$$O\Phi_i^{D1} = \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i + \frac{3}{8}\right)^2 - R^2 = O\Phi_i - x_i + \frac{y_i}{2} + \frac{y_i}{4} + \frac{25}{64};$$

$$O\Phi_i^{A2} = \left(x_i + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i - 1 - \frac{3}{8}\right)^2 - R^2 = O\Phi_i + x_i - 2y_i - \frac{3y_i}{4} + \frac{137}{64};$$

$$O\Phi_i^{B2} = \left(x_i + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i - 1 - \frac{1}{8}\right)^2 - R^2 = O\Phi_i + x_i - 2y_i - \frac{y_i}{4} + \frac{97}{64};$$

$$O\Phi_i^{C2} = \left(x_i + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i - 1 + \frac{1}{8}\right)^2 - R^2 = O\Phi_i + x_i - y_i - \frac{3y_i}{4} + \frac{65}{64};$$

$$O\Phi_i^{D2} = \left(x_i + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_i - 1 + \frac{3}{8}\right)^2 - R^2 = O\Phi_i + x_i - y_i - \frac{y_i}{4} + \frac{41}{64}.$$

Оцінимо точність розрахунку площі покриття пікселя границею кола при використанні адаптивного розташування додаткових точок всередині пікселя. На рис. 7 зображено графіки залежності максимального та середнього значень абсолютної похибки апроксимації від радіуса кола. Як



видно з рис. 7, максимальна абсолютна похибка апроксимації не перевищує  $1/8$ . Таким чином, використання адаптивного розташування додаткових точок дозволило підвищити у два рази точність розрахунку площі покриття піксела границею кола порівняно зі звичайним підходом [8]. Для всіх кіл з радіусами від 2 до 1024 проаналізовано кількісне співвідношення пікселів з різними значеннями похибок, яке показало, що приблизно 50% сформованих пікселів мають абсолютну похибку визначення площі покриття, яка знаходиться в межах:  $1/16 < \delta < 1/8$ , а біля 25% пікселів мають похибку  $\delta < 1/32$ .

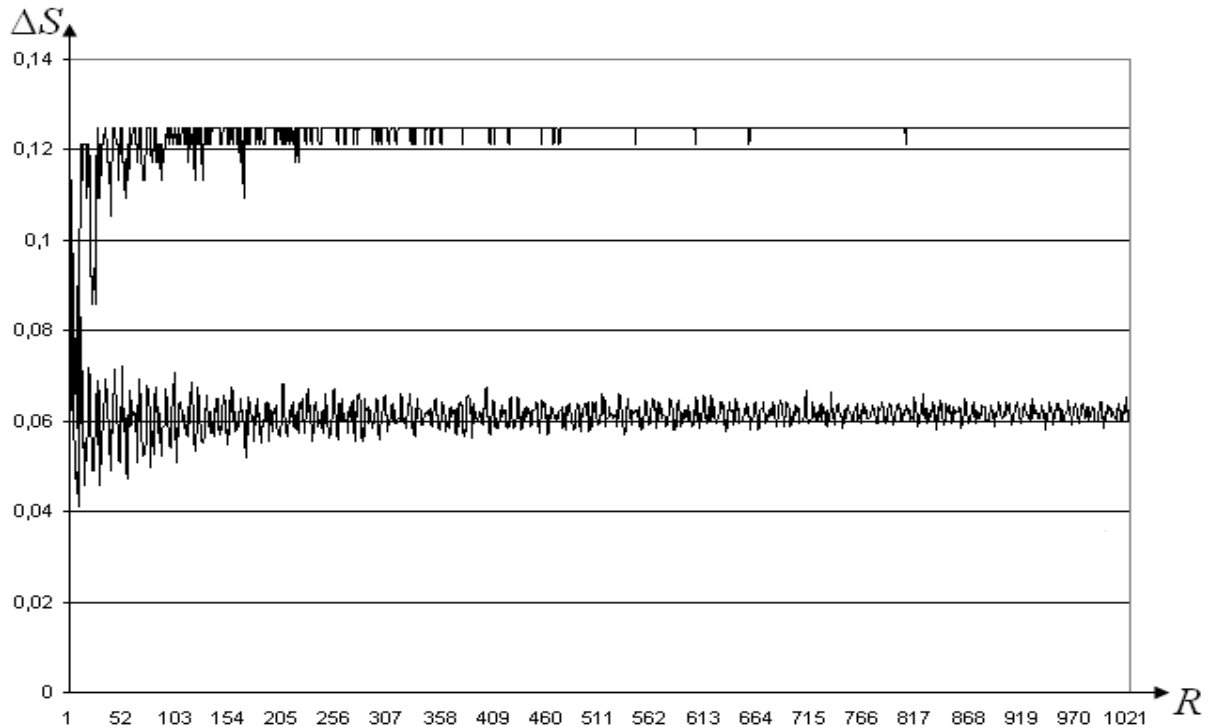


Рисунок 7 — Залежність максимального та середнього значення абсолютної похибки обчислення площі покриття піксела

## Висновки

Адаптивна підхід до визначення додаткових точок дозволив підвищити у два рази точність розрахунку площі покриття піксела границею кола порівняно зі звичайним підходом

Запропонований підхід має просту апаратну реалізацію крайового антиаліазингу границь кіл, оскільки в обчисленнях використовуються лише операції додавання і віднімання та операція ділення на два в степені  $n$ , яка замінюється операцією зсуву. Відсутність “довгих” операцій забезпечує високу швидкість формування зображення. На відміну від методів із збільшенням дискретизації у запропонованому методі антиаліазинг виконується безпосередньо під час формування крокової

траєкторії кола і не потребує збільшення розмірів кадрового буфера та виконання фільтрації зображення на етапі постобробки.

### **Література**

1. Field D.A. Algorithms for Drawing Anti-aliased Circles and Ellipses// Computer Vision Graphics and Image Processing. – 1986. – Vol. 33. – P. 1-15.
2. Kappel M. R. An Ellipse-Drawing Algorithm for Raster Displays // Proceedings of Computer Graphics. – 1985. – P. 110-134.
3. Лященко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи: Підручник. – К.: "Либідь", 1996. – 288 с.
4. Pitteway M.L.V, Watkinson D.J. Bresenham's Algorithm with Grey-Scale // Communications of the ACM. – 1980. – Vol. 23 (11). – P.625-626.
5. Field D.A. Algorithms for Drawing Anti-aliased Circles and Ellipses// Computer Vision Graphics and Image Processing. – 1986. – Vol. 33. – P. 1-15.
6. Lien S-L., Shantz M., Pratt V. Adaptive forward differencing for rendering curves and surfaces // Comput. Graph. – 1987. – No. 21(4). – P.111 – 118.
7. Wu X. An Efficient Antialiasing Technique // Computer Graphics. – 1991. – Vol. 25. – No. 4. – P. 143–152
8. Романюк О. Н., Курінний М.С. Усунення ефекту аліайзингу границі кола // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2001. – №2. – С. 75-77.
9. Петров М.Н. Молочков В.П. Компьютерная графика. – СПб: Петербург, 2002. – 302 с.