УДК 51-74:536.2

В.Н. Ткаченко, О.В.Литовченко
Институт прикладной математики и механики НАНУ, г. Донецк
E-mail: tkachenko@iamm.ac.donetsk.ua, lit.ov@i.ua

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ВНЕШНЕГО ТЕПЛООБМЕНА НА ОСНОВЕ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ.

Аннотация
Ткаченко В.Н., Литовченко О.В. Применение метода наименьших квадратов для идентификации параметров внешнего теплообмена на основе сплайн-аппроксимации. *Рассматривается обратная задача идентификации распределенного во времени параметра теплообмена. Предлагается использование сплайнов для аппроксимации функций с множеством локальных экстремумов. Устойчивость решения будет обеспечивать минимизация квадратичного функционала невязки для всех отрезков сплайнов и условия сопряжения в узлах сплайнов.*
Ключевые слова: *идентификация параметров, метод наименьших квадратов, сплайн-аппроксимация.*

Введение.

Для построения более точной математической модели теплофизического процесса необходимо некоторые параметры модели считать распределенными по координате либо во времени. Неизвестная функция, описывающая изменение параметра, может иметь достаточно сложный вид, например, иметь множество локальных экстремумов. С целью параметризации искомой функции предлагается ее аппроксимация отрезками полиномов невысокой степени, т.е. сплайнами не выше третьей степени. Для аппроксимирующих искомое решение сплайнов потребуем выполнение условий сопряжения в узлах сплайнов, а именно: непрерывность функции и равенство первых двух ее производных во всех внутренних граничных точках сплайнов. В этом случае достигается отсутствие разрывов и резких изменений функции в узлах сплайнов. Связь между числом узловых точек и степенью полиномов сплайна отсутствует.

Основная цель такой аппроксимации - получить устойчивое и достаточно точное представление функции искомого параметра. Сама идея сплайн-аппроксимации не снимает проблему неустойчивости решения, т.е. отсутствия непрерывной зависимости решения от исходных данных. Количество измерений на одном рассматриваемом отрезке времени, значительно превышающее количество неизвестных коэффициентов полинома на этом отрезке, а также выполнение условий сопряжения в узлах повышает устойчивость решения к ошибкам в результатах измерений температуры поверхности тела входных данных. Поэтому на каждом отрезке сплайна для z>>4 измерений будет минимизироваться квадратичный функционал невязки S измеренных и расчетных температур.

Постановка задачи.

Математическая модель процесса нагрева одномерного тела выглядит следующим образом

$$\frac{\partial T(\tau,x)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(\tau,x)}{\partial x^2} \ , \ \ o \le x \le l \, , \qquad (1)$$

с граничными условиями третьего рода

$$\lambda \frac{\partial T(\tau,x)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \alpha_1(\tau)\left[T_{гр.}(\tau) - T(\tau,o)\right], \tag{2}$$

$$-\lambda \frac{\partial T(\tau,x)}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \alpha_2(\tau)\left[T_{гр.}(\tau) - T(\tau,l)\right], \tag{3}$$

и начальным условием

$$T(0,x) = t_0(x). \tag{4}$$

где $T(\tau,x)$ - температура тела, $T_{гр.}(\tau)$ - температура греющей среды, λ - коэффициент теплопроводности среды, $\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau)$ - параметры конвективной теплоотдачи сверху и снизу.

Известна температура тела на границе с внешней средой в r моментах времени:

$$T(\tau_d,0) = f_d, \quad d = \overline{1,r}. \tag{5}$$

Для простоты изложения метода предполагаем нагрев симметричным, поэтому $\alpha_1 = \alpha_2 = F(\tau)$. Временная область $0 \le \tau \le \tilde{\tau}$ разбивается на m равных отрезков, на каждом из которых содержится z>>4 измерений температуры тела на границе с внешней средой.

Задача идентификации параметра теплообмена на поверхности тела состоит в нахождении функции $F(\tau)$, которая образована m кубическими полиномами [5,6]

$$P_k(\tau) = A_k + B_k(\tau - \tau_{(k-1)z}) + C_k(\tau - \tau_{(k-1)z})^2 + D_k(\tau - \tau_{(k-1)z})^3, \quad k = \overline{1,m}. \tag{6}$$

Коэффициенты полиномов будем искать путем минимизации квадратичного функционала невязки уравнения (2), при выполнении условий сопряжения в узлах сплайна:

непрерывность функции $F(\tau)$ $\qquad P_k(\tau_{kz}) = P_{k+1}(\tau_{kz}),$ (7)

непрерывность ее производной $\qquad P'_k(\tau_{kz}) = P'_{k+1}(\tau_{kz}),$ (8)

непрерывность второй производной $P''_k(\tau_{kz}) = P''_{k+1}(\tau_{kz}).$ (9)

Таким образом, сформулированная задача (1)-(9) является задачей нахождения условного экстремума квадратичного функционала невязки S с условиями (7)-(9). Минимизировать функционал необходимо по всем измерениям для всех отрезков сплайнов, составляющих искомую функцию. При этом желательно, чтобы количество измерений на каждом из отрезков превышало количество неизвестных коэффициентов сплайна на этом отрезке. Путем применения метода неопределенных множителей Лагранжа задача на условный экстремум будет сведена к задаче на безусловный экстремум.

Решение задачи идентификации.

Решив задачу Дирихле (1)-(5), получим температуры $T(\tau_i, x_j)$, которые будут необходимы для вычисления производной в граничном условии. Для решения задачи Дирихле используем метод конечно- разностной аппроксимации.

В области $0 \le x \le l, \quad 0 \le \tau \le \tilde{\tau}$ введем равномерную сетку $\omega_{i,j}$, т.е. будем рассматривать температуру в узлах сетки $T(i\Delta\tau, j\Delta x)$, где $\Delta x = \frac{l}{n}$, i и j шаги по времени и по пространственной координате соответственно. Применив явную конечно-разностную схему, получим представление уравнения теплопроводности в виде:

$$T_{i+1,j} = c_1 T_{i,j-1} + (1-2c_1)T_{i,j} + c_1 T_{i,j+1},$$

где $c_1 = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}$.

Условие устойчивости явной схемы связывает шаги сетки следующим соотношением $a\frac{\Delta\tau}{\Delta x} \le \frac{1}{2}$.

Расчет задачи Дирихле (определение температур во внутренних узлах сетки) позволяет рассчитать тепловой поток на поверхности тела. Теперь в граничном условии $\lambda \left.\dfrac{\partial T(\tau,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = F(\tau)\left[T_{гр.}(\tau) - T(\tau,o)\right]$ неизвестным является только функция конвективного теплообмена $F(\tau)$ [3,4].

Имеем систему уравнений граничных условий в $r = mz$ моментах времени:

$$\frac{\lambda}{\Delta x}(T(\tau_{(k-1)z+i},x_1) - T(\tau_{(k-1)z+i},x_0)) = P_k(\tau_{(k-1)z+i})[T_{гр} - T(\tau_{(k-1)z+i},x_0)],\ i=\overline{1,z},\ k=\overline{1,m}. \qquad (10)$$

Или в матричной форме

$$\frac{\lambda}{\Delta x}\begin{pmatrix} T(\tau_{(k-1)z+1},x_1) - T(\tau_{(k-1)z+1},x_0) \\ T(\tau_{(k-1)z+2},x_1) - T(\tau_{(k-1)z+2},x_0) \\ \ldots \\ \ldots \\ T(\tau_{kz},x_1) - T(\tau_{kz},x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k(\tau_{(k-1)z+1})(T_{гр} - T(\tau_{(k-1)z+1},x_0)) \\ P_k(\tau_{(k-1)z+2})(T_{гр} - T(\tau_{(k-1)z+2},x_0)) \\ \ldots \\ \ldots \\ P_k(\tau_{kz})(T_{гр} - T(\tau_{kz},x_0)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} P_k(\tau_{(k-1)z+1}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_k(\tau_{(k-1)z+2}) & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & P_k(\tau_{kz}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{гр} - T(\tau_{(k-1)z+1},x_0) \\ T_{гр} - T(\tau_{(k-1)z+2},x_0) \\ \ldots \\ \ldots \\ T_{гр} - T(\tau_{kz},x_0) \end{pmatrix}.$$

Выделим компоненты неизвестных параметров полинома, представленного в матричной форме [1]

$$\begin{pmatrix} P_k(\tau_{(k-1)z+1}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_k(\tau_{(k-1)z+2}) & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & P_k(\tau_{kz}) \end{pmatrix} = A_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} + B_k \begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2\Delta\tau & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & z\Delta\tau \end{pmatrix} +$$

$$+ C_k \begin{pmatrix} 1^2\Delta\tau^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2^2\Delta\tau^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & z^2\Delta\tau^2 \end{pmatrix} + D_k \begin{pmatrix} 1^3\Delta\tau^3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2^3\Delta\tau^3 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & z^3\Delta\tau^3 \end{pmatrix}.$$

Для удобства записи преобразований введем такие обозначения

$$H_k = \begin{pmatrix} T_{гр} - T(\tau_{(k-1)z+1},x_0) \\ T_{гр} - T(\tau_{(k-1)z+2},x_0) \\ \ldots \\ \ldots \\ T_{гр} - T(\tau_{kz},x_0) \end{pmatrix},\ Q^d = \begin{pmatrix} 1^d\Delta\tau^d & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2^d\Delta\tau^d & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & z^d\Delta\tau^d \end{pmatrix},\ d=\overline{0,3};$$

$$G_k = \frac{\lambda}{\Delta x}\begin{pmatrix} T(\tau_{(k-1)z+1}, x_1) - T(\tau_{(k-1)z+1}, x_0) \\ T(\tau_{(k-1)z+2}, x_1) - T(\tau_{(k-1)z+2}, x_0) \\ ... \\ ... \\ T(\tau_{kz}, x_1) - T(\tau_{kz}, x_0) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P}_k = \begin{pmatrix} P_k(\tau_{(k-1)z+1}) & 0 & ... & 0 \\ 0 & P_k(\tau_{(k-1)z+2}) & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & P_k(\tau_{kz}) \end{pmatrix}.$$

$G_{k,i}$, $H_{k,i}$ i-тые элементы столбцов G_k и H_k, $i = \overline{1,z}$, $\quad k = \overline{1,m}$.

Тогда уравнение (10) в матричной форме будет иметь вид

$$G_k = \widetilde{P}_k H_k . \tag{11}$$

Введем квадратичный функционал оценивающий невязку уравнения (11)

$$S = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=(k-1)z+1}^{zk} \left(G_{k,i-(k-1)z} - P_k(\tau_i) H_{k,i-(k-1)z}\right)^2 .$$

Используя введенные обозначения $\widetilde{P}_k$ можно записать как

$$\widetilde{P}_k = A_k Q^0 + B_k Q^1 + C_k Q^2 + D_k Q^3 .$$

Тогда квадратичный функционал S будет иметь вид

$$S = \sum_{k=1}^{m} \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)^T \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right) = \sum_{k=1}^{m} (G_k - (A_k Q^0 + B_k Q^1 + C_k Q^2 + D_k Q^3) H_k)^T \left(G_k - \right.$$
$$\left. - (A_k Q^0 + B_k Q^1 + C_k Q^2 + D_k Q^3) H_k \right).$$

Для получения неизвестных коэффициентов сплайнов, необходимо найти условный экстремум функционала S относительно $3(m-1)$ условий (7)-(9). Для сведения задачи к поиску безусловного экстремума воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа.

Рассмотрим условия сопряжения в узлах сплайнов. Продифференцировав 2 раза функцию P_k и подставив соответствующие выражения в (7)-(9) получим следующие условия:

$$\begin{cases} A_p + tB_p + t^2 C_p + t^3 D_p - A_{p+1} = 0, & p = \overline{0, m-1}; \\ B_p + 2tC_p + 3t^2 D_p - B_{p+1} = 0, & p = \overline{m, 2(m-1)}; \\ C_p - C_{p+1} + 3tD_p = 0, & p = \overline{2m-1, 3(m-1)}; \end{cases} \tag{12}$$

где $t = z\Delta$, Δ промежуток времени между измерениями температуры на поверхности тела.

Левые части равенств системы (12) обозначим функциями φ_p, $p = \overline{0, 3(m-1)}$.

Составим расширенный функционал в виде линейной комбинации функции S и функций φ_p, взятыми с коэффициентами, называемыми множителями Лагранжа λ_p

$$L = S + \sum_{p=0}^{3(m-1)} \lambda_p \varphi_p . \tag{13}$$

Решением будут являться те значения неизвестных коэффициентов сплайнов, в которых функционал (13) достигает своего минимума. Для минимизации функционала воспользуемся необходимым условием существования экстремума. Составим систему из $4m + 3(m-1)$ уравнений, приравняв к нулю частные производные функционала L по неизвестным $A_k, B_k, C_k, D_k, \lambda_p$, $\quad k = \overline{1, m}$, $\quad p = \overline{1, 3(m-1)}$;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial A_k} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial B_k} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial C_k} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial D_k} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_p} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Если полученная система имеет решение, то $\hat{A}_k, \hat{B}_k, \hat{C}_k, \hat{D}_k$ определяют искомые коэффициенты аппроксимирующих сплайнов, т.е. являются решением поставленной задачи.

Вычислим векторы первых производных функционала L по неизвестным компонентам $A_k, B_k, C_k, D_k, \lambda_p$ [2] и приравняем их к нулю:

первая производная по A_k

$$\frac{\partial\left[\sum_{p=0}^{3(m-1)} \lambda_p \varphi_p + \sum_{k=1}^{m} \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)^T \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)\right]}{\partial A_k} = 2A_k H_k^T Q^0 H_k + 2B_k H_k^T Q^1 H_k + 2C_k H_k^T Q^2 H_k + \tag{15}$$

$$+2D_k H_k^T Q^3 H_k - 2H_k^T Q^0 G_k + \begin{cases} \lambda_k, & k=1, \\ -\lambda_{k-1}, & 1<k<m \\ -\lambda_{k-1}, & k=m; \end{cases} = 0,$$

первая производная по B_k

$$\frac{\partial\left[\sum_{p=0}^{3(m-1)} \lambda_p \varphi_p + \sum_{k=1}^{m} \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)^T \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)\right]}{\partial B_k} = 2A_k H_k^T Q^1 H_k + 2B_k H_k^T Q^2 H_k + 2C_k H_k^T Q^3 H_k + \tag{16}$$

$$+2D_k H_k^T Q^4 H_k - 2H_k^T Q^1 G_k + \begin{cases} t\lambda_k + \lambda_m, & k=1, \\ t\lambda_k + \lambda_{m+k-2} + \lambda_{m+k-1}, & 1<k<m \\ -\lambda_{2k-2}, & k=m; \end{cases} = 0,$$

первая производная по C_k

$$\frac{\partial\left[\sum_{p=0}^{3(m-1)} \lambda_p \varphi_p + \sum_{k=1}^{m} \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)^T \left(G_k - \widetilde{P}_k H_k\right)\right]}{\partial C_k} = 2A_k H_k^T Q^2 H_k + 2B_k H_k^T Q^3 H_k + 2C_k H_k^T Q^4 H_k +$$

$$+2D_k H_k^T Q^5 H_k - 2H_k^T Q^2 G_k + \begin{cases} t^2\lambda_k + 2t\lambda_m + \lambda_{2m-1}, & k=1, \\ t^2\lambda_k + 2t\lambda_{m+k-1} - \lambda_{2m+k-3} + \lambda_{2m+k-2}, & 1<k<m, \\ -\lambda_{3(k-1)}, & k=m; \end{cases} = 0, \tag{17}$$

первая производная по D_k

$$\frac{\partial\left[\sum_{p=0}^{3(m-1)}\lambda_p\varphi_p+\sum_{k=1}^{m}\left(G_k-\widetilde{P}_kH_k\right)^T\left(G_k-\widetilde{P}_kH_k\right)\right]}{\partial D_k}=2A_kH_k^TQ^3H_k+2B_kH_k^TQ^4H_k+2C_kH_k^TQ^5H_k+$$

$$+2D_kH_k^TQ^6H_k-2H_k^TQ^3G_k+\begin{cases}t^3\lambda_k+3t^2\lambda_m+3t\lambda_{2m-1}, & k=1,\\ t^3\lambda_k+3t^2\lambda_{m+k-1}+3t\lambda_{2m+k-2}, & 1<k<m,\\ 0, & k=m;\end{cases}=0. \tag{18}$$

Производными функционала (13) по неизвестным λ_p являются функции условий сопряжения в узлах сплайнов

$$\frac{dL}{d\lambda_p}=\varphi_p\,. \tag{19}$$

Получили систему из $4m+3(m-1)$ линейных алгебраических уравнений (15)-(19) с $4m+3(m-1)$ неизвестными. Матрица R системы (15)-(19) симметрична относительно главной диагонали и представима в виде блочной матрицы [1]

$$\mathrm{R}=\begin{pmatrix}\mathrm{R}_1 & \mathrm{R}_2\\ \mathrm{R}_2^{\mathrm{T}} & \mathrm{R}_3\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{R}=\begin{pmatrix}2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^0H_k & 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^1H_k & 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^2H_k & 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^3H_k\\ 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^1H_k & 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^2H_k & 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^3H_k & 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^4H_k\\ 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^2H_k & 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^3H_k & 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^4H_k & 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^5H_k\\ 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^3H_k & 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^4H_k & 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^5H_k & 2\mathrm{H}_\mathrm{k}^\mathrm{T}Q^6H_k\end{pmatrix},\quad k=\overline{1,m}.$$

R_1 - это блочно-диагональная матрица размерности $4\mathrm{m}\times4\mathrm{m}$, где на главной диагонали располагаются квадратные матрицы 4×4 вида $\widetilde{R}$. R_2 - это матрица размерностью $4m\times3(m-1)$, а R_3 нулевая $3(m-1)\times3(m-1)$ матрица.

Решив матричное уравнение, получаем вектор неизвестных коэффициентов сплайнов составляющих функцию $F(\tau)$

$$\begin{pmatrix}A_1\\B_1\\C_1\\D_1\\A_2\\B_2\\C_2\\D_2\\\ldots\\A_m\\B_m\\C_m\\D_m\\\lambda_1\\\ldots\\\lambda_{3(m-1)}\end{pmatrix}=R^{-1}\begin{pmatrix}H_1^TQ^0G_1\\H_1^TQ^1G_1\\H_1^TQ^2G_1\\H_1^TQ^3G_1\\H_2^TQ^0G_2\\H_2^TQ^1G_2\\H_2^TQ^2G_2\\H_2^TQ^3G_2\\\ldots\\H_m^TQ^0G_m\\H_m^TQ^1G_m\\H_m^TQ^2G_m\\H_m^TQ^3G_m\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Вычислительные эксперименты. Предложенный метод идентификации распределенного параметра был программно реализован на языке C++ в среде разработки Visual Studio 2008. Для проверки работоспособности метода был проведен ряд вычислительных экспериментов.

В качестве тестовой функции параметра конвективного теплообмена была взята функция

$$\alpha(\tau) = -224{,}9\tau^4 + 914{,}5\tau^3 - 1165{,}2\tau^2 + 501{,}8\tau + 30,$$

имеющая 3 локальных экстремума на рассматриваемом промежутке времени. Аппроксимация сплайнами проводилась на пяти участках для двух случаев:

1. Предположение идеальных условий проведения эксперимента и отсутствие шума при измерении температуры на поверхности нагреваемого тела.
2. Предположение зашумления истинных температур на поверхности нагреваемого тела белым шумом.

На Рис.1 изображены тестовая функция параметра конвективного теплообмена (сплошная серая линия) и полученная в случае 1 сплайн-аппроксимация $F(\tau)$ (черная пунктирная линия). Очевидно, что в отсутствие шума полученная функция полностью повторяет истинные значения параметра конвективного теплообмена.

На Рис. 2 изображены тестовая функция параметра конвективного теплообмена (сплошная серая линия) и полученная в случае 2 сплайн-аппроксимация $F(\tau)$ (черная пунктирная линия). Среднеквадратичное отклонение истинных значений температур на поверхности наблюдаемого тела и расчетных по модели (1)-(4) с полученной функцией $F(\tau)$ сравнимо со среднеквадратичной величиной шума. Такие результаты свидетельствуют о правильности полученных соотношений и об успешности решения поставленной задачи.

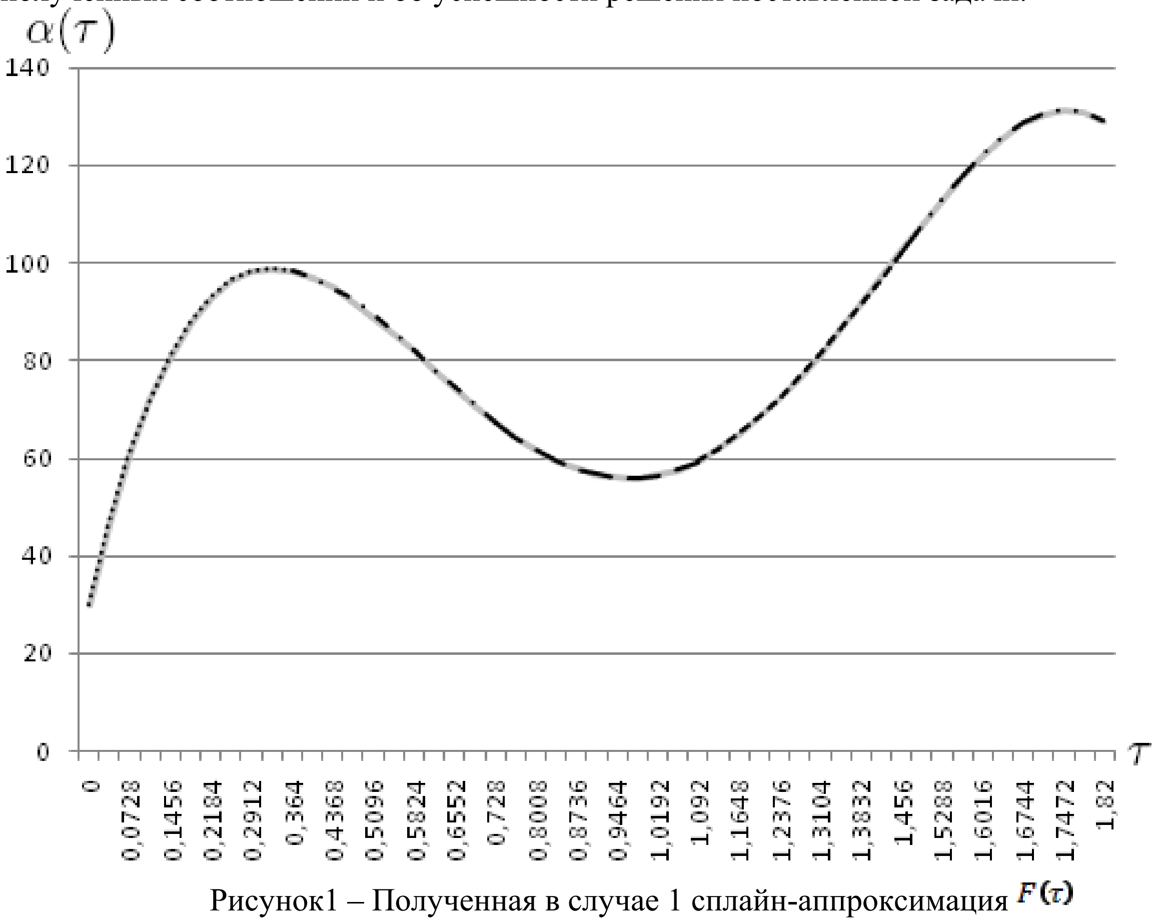

Рисунок1 – Полученная в случае 1 сплайн-аппроксимация $F(\tau)$

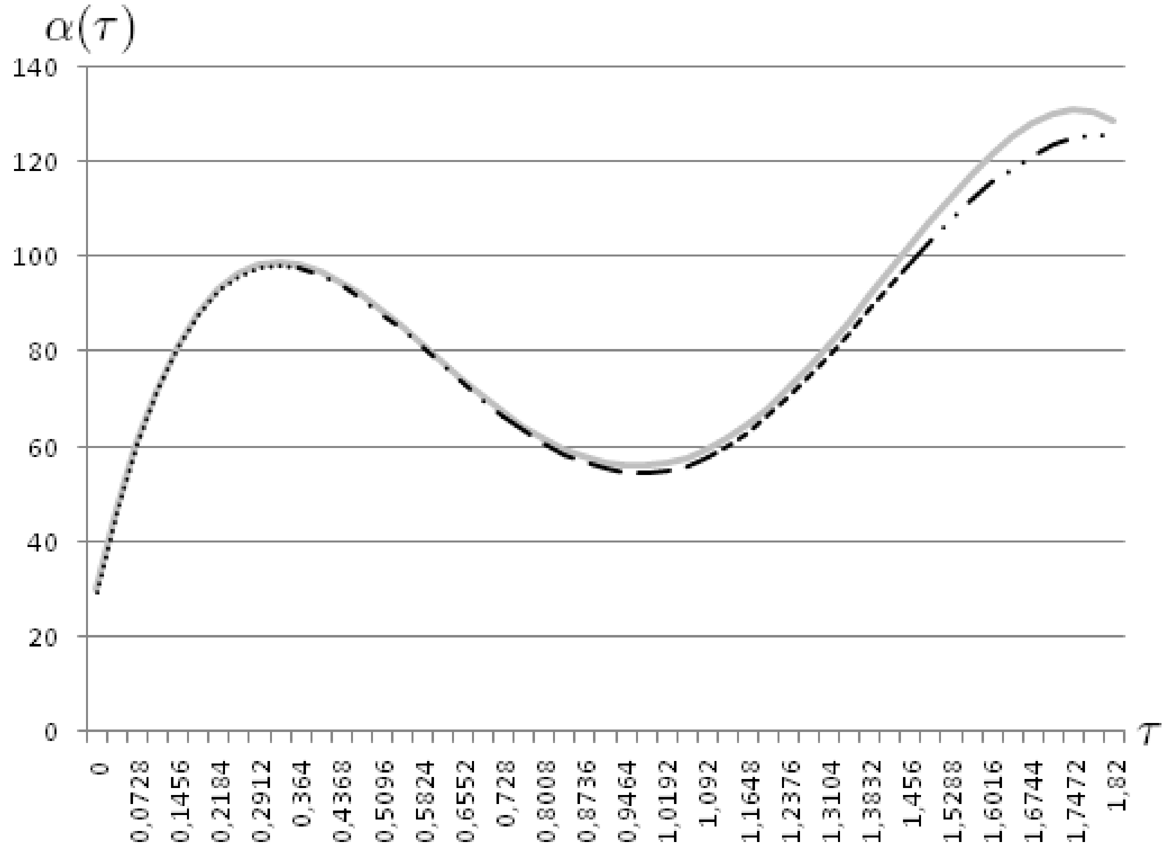

Рисунок 2 – Полученная в случае 2 сплайн-аппроксимация $F(\tau)$

При решении задачи идентификации используются методы численного решения, что заставляет рассматривать вопрос о неустранимой погрешности, т.е. погрешности метода. Составляющими моментами предложенного материала являются конечно-разностная аппроксимация производных, матрично-векторные преобразования и метод наименьших квадратов (минимизация квадратичного функционала).

Замена производных на конечные разности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(\tau_{i+1}, x_j) - 2T(\tau_i, x_j) + T(\tau_{i-1}, x_j)}{(\Delta x)^2}$$

естественно порождает погрешности метода. Так как введенная на рассматриваемой области $0 \le x \le l,\quad 0 \le \tau \le \tilde{\tau}$ сетка равномерная, т.е. $x_{k+1} - x_k = \Delta x$ и $\tau_{k+1} - \tau_k = \Delta\tau$, то погрешность предложенного метода можно оценить величиной $O(\Delta t + (\Delta x)^2)$.

Преобразования над матрицами являются точными и не влекут за собой перехода к приближениям, а точность вычисления обуславливается разрядностью представления данных в компьютере.

В методе наименьших квадратов для минимизации квадратичного функционала невязки необходим поиск экстремума, который находится аналитически. А полученная система нормальных уравнений решается методом Гауса, который является точным.

Выводы.

1. Предложен эффективный метод идентификации функции параметра конвективного теплообмена модели теплофизического процесса. Получение более устойчивого решения задачи идентификации обеспечивается двумя факторами. Первый фактор - это требование сопряжений в узлах спайнов. Второй - получение решения путем минимизации квадратичного функционала оценивающего невязку уравнения.

2. Разработан алгоритм идентификации функции параметра в виде сплайн-аппроксимации с применением метода наименьших квадратов.

3.Алгоритм программно реализован с помощью языка C++. Численные исследования наглядно показали, что предложенный метод успешно решает поставленную задачу.

Литература

1. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. Москва:Наука, 1966, 576 с.
2. О.В. Литовченко. Идентификация распределенных параметров внешнего теплообмена для нелинейных граничных условий// Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. --2008, т.17.- с. 109-118.
3. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974, с.224.
4. Ю. М. Мацевитый. Обратные задачи теплопроводности. В 2-х т. : Т.2. Приложения. – НАН Украины, институт проблем машиностроения. -- Киев: Наукова думка, 2003.
5. Дж. Алберг,Э. Нильсен, Дж. Уолш Теория сплайнов и ее приложения. Москва: Мир, 1972, - 320 с.
6. Ю.С. Завьялов, Ю.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. Методы сплайн-функций. Москва:Наука, 1980. - 352 с.

Abstract

Tkachenko V.N., Lytovchenko O.V. Using the least square method for identification of heat exchange parameters on basis of spline approximation. *The ill- posed problem of identification of time-dependent parameter of heat exchange is considered. Use of splines for approximation of functions with set of local extremums is offered. Stability of the solution is provided by minimization square-law functional of error for all pieces and an conjugate conditions in knots of splines.*

Keywords: *parametres identification, least squares method, spline approximation.*

Ткаченко В.М., Литовченко О.В. Використання методу наіменьших квадратів для ідентифікації параметрів зовнішнього теплообміну на основі сплайн-аппроксимації. *Розглядається зворотня задача ідентифікації розподіленого у часі параметра теплообміну. Пропонується використання сплайнів для апроксимації функцій з безліччю локальних екстремумів. Стійкість рішення буде забезпечувати мінімізація квадратичного функціоналу нев'язки для всіх відрізків сплайнів та умови сполучення у вузлах сплайнів.*

Ключові слова: *ідентифікація параметрів, метод найменших квадратів, сплайн-аппроксимація*

Здано в редакцію: 10.02.2010р.

Рекомендовано до друку: д.т.н, проф. Воронцов О.Г.