УДК 517.5

Н. П. Волчкова
Донецкий национальный университет

ОБРАЩЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПРИЗМ

Отримано конструкцію обернення локального перетворення Помпейю для деякого класу призм в R^n.

Пусть R^n – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ – группа движений R^n, $\mathscr{F} = \{\mu_i\}_{i=1}^k$ – конечное семейство распределений с компактным носителем в R^n. При фиксированном $g \in M(n)$ рассмотрим распределение $g\mu_i$, действующее на $C^\infty(R^n)$ по правилу

$$\langle g\mu_i, f\rangle = \langle \mu_i, f \circ g\rangle, \quad f \in C^\infty(R^n).$$

Преобразование Помпейю $\mathscr{P}_{\mathscr{F}}$ (глобальное) отображает $C^\infty(R^n)$ в $C^\infty(M(n))^k$ и определяется равенством

$$\mathscr{P}_{\mathscr{F}}(f)(g) = (\langle g\mu_1, f\rangle, \ldots, \langle g\mu_k, f\rangle), \tag{1}$$

$g \in M(n)$. Аналогично, для открытого множества $U \in R^n$ локальное преобразование Помпейю отображает по формуле (1) $C^\infty(U)$ в декартово произведение $C^\infty(\Lambda(U, \mu_1)) \times \ldots \times C^\infty(\Lambda(U, \mu_k))$, где $\Lambda(U, \mu_i) = \{g \in M(n) : \operatorname{supp} g\mu_i \subset U\}$.

Для заданных $\mathscr{F}$ и U возникает следующая проблема [2]:

1) Выяснить, является ли $\mathscr{P}_{\mathscr{F}}$ инъективным и если не является, то описать его ядро.

2) Если $\mathscr{P}_{\mathscr{F}}$ инъективно, то найти обратное отображение.

Для отдельных $\mathscr{F}$ и U инъективность преобразования Помпейю и близкие вопросы изучались в (см. обзоры [2; 13], а также [3 – 8; 11; 12]). Особый интерес представляет случай, когда $U = B_R = \{x \in R^n : |x| < R\}$, а $\mathscr{F} = \{\chi_E\}$ – индикатор компактного множества $E \subset B_R$ положительной меры. Для этого семейства $\mathscr{F}$ и широкого класса множеств E (см. [11]) преобразование $\mathscr{P}_{\mathscr{F}}$ инъективно по отношению к

U, если R больше диаметра $d(E)$ наименьшего замкнутого шара, содержащего E (см. [11; 12], а также [4; 6; 7; 8], где для некоторых конкретных E найдено минимальное значение R, при котором $\mathscr{P}_{\chi_E}$ инъективно). Для указанного класса E и $R > 3/2d(E)$ в [12] приводится также схема обращения преобразования $\mathscr{P}_{\chi_E}$. Кроме того, для квадрата в [12] найдена конструкция обращения преобразования Помпейю и при $R > d(E)$. В связи с этим при решении проблемы 2) большой интерес представляет усиление оценки $R > 3/2d(E)$ для других E. В данной работе получено обращение преобразования $\mathscr{P}_{\chi_E}$ в шаре B_R радиуса $R > d(E)$ в случае, когда E – призма в R^n вида $T \times [-b_3, b_3] \times \ldots \times [-b_n, b_n]$, где $b_i > 0, i = \overline{3,n}$ и T – остроугольный треугольник в R^2.

Пусть $S^{n-1} = \{x \in R^n : |x| = 1\}$, ρ, σ – ролярные координаты в R^n (для любого $x \in R^n$ $\rho = |x|$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = \dfrac{x}{\rho} \in S^{n-1}$), $\{Y_s^{(k)}(\sigma)\}$, $1 \le s \le d_k$ – фиксированный ортонормированный базис пространства $\mathscr{H}_k$ сферических гармоник степени k, рассматриваемом как подпространство $L^2(S^{n-1})$ (см. [9, гл.4, п. 2]). Всякой функции $f \in L_{loc}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{d_k} f_{ks}(\rho) Y_s^k(\sigma) d\sigma \text{, где } f_{ks}(\rho) = \int_{S^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_s^{(k)}(\sigma)} d\sigma .$$

Далее, как обычно, $\mathscr{D}(R^n)$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на R^n, $\mathscr{D}'(R^n)$ – пространство распределений на R^n, $\mu_1 * \mu_2$ – свертка двух распределений, одно из которых имеет компактный носитель. Радиализацией распределения $\mu \in \mathscr{D}'(R^n)$ называется радиальное распределение $\mathscr{R}\mu$, действующее на функцию $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ по формуле

$$\langle \mathscr{R}\mu, \varphi \rangle = \left\langle \mu(x), \int_{SO(n)} \varphi(kx) dk \right\rangle,$$

где $SO(n)$ – группа вращений пространства R^n, dk – нормированная мера Хаара на группе $SO(n)$ [7]. Радиальность $\mathscr{R}\mu$ означает, что для любого $k \in SO(n)$

$$\langle \mathscr{R}\mu(x), \varphi(kx) \rangle = \langle \mathscr{R}\mu(x), \varphi(x) \rangle, \ \varphi \in \mathscr{D}(R^n).$$

Сферическое преобразование радиального распределения μ с компактным носителем в R^n определяется равенством

$$\widetilde{\mu}(\lambda) = \left\langle \mu(x), j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda|x|) \right\rangle, \ \lambda \in C \tag{2}$$

где $j_q(z) = I_q(z)/z^q$, I_q – функция Бесселя порядка q. Для мультииндекса $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \in Z_+^n$ положим $\mu(\kappa) = \mathscr{R}(D^\kappa \chi_E)$, где $D^\kappa = \dfrac{\partial^{\kappa_1 + \ldots + \kappa_n}}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}$. Пусть также δ – дельта-распределение в нуле пространства R^n.

Лемма 1 [7]. *Пусть* $E \in \overline{B_R}$ *и* $R > 2r$. *Тогда для любой* $f \in C^\infty(B_R)$ *и* $x \in B_{R-r}$ *имеет место равенство*

$$(\mu(\kappa)*f)(x)=\int\limits_{SO(n)}\left\langle D^{\kappa}\delta(y),\ (\mathcal{R}_{\chi_n}f)\left(\begin{Vmatrix}-k^{-1} & x-ky\\ 0 & 1\end{Vmatrix}\right)\right\rangle dk,$$

где $M(n)$ *рассматривается как группа матриц порядка* $(n+1)\times(n+1)$ *вида* $\begin{Vmatrix}k & x\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$, $k\in SO(n)$, $x\in R^n$ *и* R^n *отождествляется с аффинным подпространством* $\{x_{n+1}=1\}$ *в* R^{n+1}.

Пусть T – замкнутый треугольник с вершинами в точках $z_1,z_2,z_3\in C$ и $d(T)=2$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что T является остроугольным неравнобедренным треугольником (в остальных случаях конструкция обращения строится аналогично). Кроме того, можно считать, что $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, $z_3=\overline{z_2}$, $\operatorname{Im} z_1>0$ и $\operatorname{Re} z_1<0$. Тогда $z_1=-e^{i(\alpha-\beta)}$, $z_2=e^{i(\alpha+\beta)}$, $z_3=e^{-i(\alpha+\beta)}$, где $\alpha=\arg(z_2-z_1)$, $\beta=\pi-\arg(z_1-z_3)$.

Положим $\Pi=T\times[-b_3,b_3]\times\ldots\times[-b_n,b_n]$, где $b_k>0, k=3,\ldots,n.$ Для любого $m\in\{1,\ldots,n\}$ обозначим η_m – отображение $R^n\to R^n$, действующее следующим образом: если $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$, то $\eta_m x=((\eta_m x)_1,\ldots,(\eta_m x)_n)$, где $(\eta_m x)_k=x_k$ при $k\neq m$, $(\eta_m x)_m=-x_m$. Пусть G_+^n (соответственно G_-^n) совокупность отображений $R^n\to R^n$, представимых в виде суперпозиции четного (соответственно нечетного) числа отображений $\eta_m, 1\le m\le n$. Далее будут использоваться следующие дифференциальные операторы: $D_1=\dfrac{\partial^{n-2}}{\partial x_3\ldots\partial x_n}$, $D_2=\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, $D_3=\dfrac{\partial}{\partial x_1}+tg\alpha\,\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, $D_4=\dfrac{\partial}{\partial x_1}-tg\beta\,\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, $D_5=\dfrac{\partial}{\partial x_1}+i\dfrac{\partial}{\partial x_2}$.

Лемма 2. *Для любой* $f\in C^{n+1}(\Pi)$ *имеет место равенство*

$$\int\limits_{\Pi}(D_1D_2D_3D_4f)(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n= \tag{3}$$

$$=\left(\sum_{\eta\in G_+^{n-2}}-\sum_{\eta\in G_-^{n-2}}\right)\left[(th\alpha+th\beta)(D_2f)(z_1,\eta b)-(D_3f)(z_3,\eta b)+(D_4f)(z_2,\eta b)\right],$$

где $b=(b_3,\ldots,b_n)$.

Доказательство. Пусть $u\in C^3(T)$. Тогда

$$\int\limits_T(D_2D_3D_4u)(x_1,x_2)dx_1\,dx_2=\int\limits_{-\cos(\alpha-\beta)}^{\cos(\alpha+\beta)}dx_1\int\limits_{-tg\beta\cdot x_1-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}}^{tg\alpha\cdot x_1+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}}(D_2D_3D_4u)(x_1,x_2)dx_2=$$

$$=\int\limits_{-\cos(\alpha-\beta)}^{\cos(\alpha+\beta)}\left[(D_3D_4u)\left(x_1,tg\alpha\cdot x_1+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)-(D_3D_4u)\left(x_1,-tg\beta\cdot x_1-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)\right]dx_1. \tag{4}$$

Учитывая, что

$$(D_3D_4u)\left(x_1,tg\alpha\cdot x_1+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)=\frac{d}{dx_1}\left((D_4u)\left(x_1,tg\alpha\cdot x_1+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\right),$$

$$(D_3D_4u)\left(x_1,-tg\beta\cdot x_1-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)=\frac{d}{dx_1}\left((D_3u)\left(x_1,-tg\beta\cdot x_1-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)\right)$$

из (4) находим

$$\int_T (D_2D_3D_4u)(x_1,x_2)dx_1dx_2=(tg\alpha+tg\beta)(D_2u)(z_1)-(D_3u)(z_3)+(D_4u)(z_2). \quad (5)$$

Поскольку для любой $v\in C^{n-2}([-b_3,b_3]\times\ldots\times[-b_n,b_n])$

$$\int_{-b_3}^{b_3}\ldots\int_{-b_n}^{b_n}D_1v(x_3,\ldots,x_n)dx_3\ldots dx_n=\sum_{\eta\in G_+^{n-2}}v(\eta b)-\sum_{\eta\in G_-^{n-2}}v(\eta b),$$

из (5) получаем утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть* $\nu=D_1D_2D_3D_4\chi_\Pi$. *Тогда для любого* $k\in Z_+$ *имеет место равенство*

$$(\mathscr{R}(D_1D_5^k\nu))^{\sim}(\lambda)=$$

$$=(-1)^{n+1}2^{n-2}\lambda^{2(k+n-2)}b_3\cdots b_n\left\{kC_{1k}j_{\frac{3n+2k-6}{2}}(\lambda r)+\lambda^2C_{2k}j_{\frac{3n+2k-4}{2}}(\lambda r)\right\}, \quad (6)$$

где $r=\sqrt{1+b_3^2+\ldots+b_n^2}$,

$$C_{1k}=i(tg\alpha+tg\beta)z_1^{k-1}+(1-i\,tg\beta)z_2^{k-1}-(1+i\,tg\alpha)z_3^{k-1},$$

$$C_{2k}=(tg\alpha+tg\beta)\sin(\alpha-\beta)z_1^k-\frac{\cos(2\beta+\alpha)}{\cos\beta}z_2^k+\frac{\cos(2\alpha+\beta)}{\cos\alpha}z_3^k.$$

Доказательство. Поскольку $j_q'(t)=-t\,j_{q+1}(t)$ (см. [1, гл.7, § 7.2, формула (51)]), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left((x_1+ix_2)^k j_q(\lambda|x|)\right)=k(x_1+ix_2)^{k-1}j_q(\lambda|x|)-\lambda^2x_1\left((x_1+ix_2)^k j_{q+1}(\lambda|x|)\right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left((x_1+ix_2)^k j_q(\lambda|x|)\right)=ik(x_1+ix_2)^{k-1}j_q(\lambda|x|)-\lambda^2x_2(x_1+ix_2)^k j_{q+1}(\lambda|x|). (8)$$

Из (7), (8) индукцией по k находим

$$(-1)^kD_5^k(j_q(\lambda|x|))=\lambda^{2k}(x_1+ix_2)^k j_{q+k}(\lambda|x|).$$

Отсюда (см. (2))

$$(\mathscr{R}(D_1D_5^k\nu))^{\sim}(\lambda)=\lambda^{2(k+n-2)}\left\langle\nu,x_3\ldots x_n(x_1+ix_2)^k j_{\frac{3n+2k-6}{2}}(\lambda|x|)\right\rangle.$$

Используя лемму 2, получаем требуемое утверждение.

Положим в (6) $k=1,2$. Тогда

$$\mathscr{R}(D_1D_5\nu)^{\sim}(\lambda)=c_1\lambda^{2n}j_{\frac{3n-2}{2}}(\lambda r),$$

$$\mathscr{R}(D_1D_5^2\nu)^{\sim}(\lambda)=c_2\lambda^{2n+2}j_{\frac{3n}{2}}(\lambda r), \quad (9)$$

где $c_1,c_2\neq0$, поскольку $\operatorname{Re}c_1=(-1)^n2^{n-1}b_3\ldots b_n\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$,

$$\operatorname{Re}c_2=(-1)^{n+1}2^{n+1}b_3\ldots b_n\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta.$$

По теореме Винера-Пэли [10, теорема 7.3.1] существуют радиальные распределения μ_1 и μ_2 с носителями в $\overline{B_r}$, для которых

$$\mu_1\tilde{\ }(\lambda)=(-1)^n c_1\, j_{\frac{3n-2}{2}}(\lambda r),\ \mu_2\tilde{\ }(\lambda)=(-1)^n c_2 \lambda^2 j_{\frac{3n}{2}}(\lambda r). \qquad (10)$$

Из (9), (10) находим

$$\Delta^n\mu_1=\mathscr{R}(D_1D_5\nu),\ \Delta^n\mu_2=\mathscr{R}(D_1D_5^2\nu), \qquad (11)$$

где Δ – оператор Лапласа в R^n. Далее нам потребуется оценка снизу функции $\mu_1\tilde{\ }(\lambda)\mu_2\tilde{\ }(\lambda)j_{\frac{n}{2}+k-1}(\varepsilon\lambda)$, где $\varepsilon>0$.

Лемма 4. *Пусть* $a_1,a_2,a_3>0$, $k\in Z_+$,

$$\theta(\lambda)=j_{\frac{3n-2}{2}}(a_1\lambda)j_{\frac{3n}{2}}(a_2\lambda)j_{\frac{n}{2}+k-1}(a_3\lambda).$$

Тогда существуют константы $L_{1k},L_{2k}>0$ *такие, что для любого* $L\geq L_{1k}$ *можно выбрать* $\rho_l\in(l,l+1)$ *с условием: если* $|\lambda|=\rho_l$ *или* $|\operatorname{Im}\lambda|\geq 1$ *и* $|\lambda|\geq L_{1k}$, *то*

$$|\theta(\lambda)|\geq\frac{L_{2k}}{|\lambda|^{\frac{7n+2k-1}{2}}}e^{(a_1+a_2+a_3)|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Доказательство. В силу четности $\theta(\lambda)$ можно считать, что $\operatorname{Re}\lambda\geq 0$. Из асимптотического разложения функции Бесселя (см. [1, гл. 7, § 7.13, формула (3)]) находим

$$\theta(\lambda)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(a_1)^{-\frac{3n-1}{2}}(a_2)^{-\frac{3n+1}{2}}(a_3)^{-\frac{n+2k-1}{2}}}{\lambda^{\frac{7n+2k-1}{2}}}\cos\left(a_1\lambda-(3n-1)\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(a_2\lambda-(3n+1)\frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

$$\cdot\cos\left(a_3\lambda-(n+2k-1)\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{e^{(a_1+a_2+a_3)|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|^{\frac{7n+2k+1}{2}}}\right).$$

По неравенству Лоясевич имеем (см.[7])

$$|\cos z|\geq\frac{1}{\pi e}d(z,V)\,e^{|\operatorname{Im}z|}, \qquad (12)$$

где $V=\{(2l+1)\pi/2,\ l\in Z\}$, $d(z,V)=\min(1,dist(z,V))$.
Используя (12) и повторяя рассуждения из доказательства леммы 7 [12], получаем утверждение леммы 4.

Всюду в дальнейшем $R>2r$, $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ – строго возрастающая последовательность положительных чисел с пределом $\dfrac{R}{2r}-1$, $R_m=2r(1+\varepsilon_m)$, $m\geq 1$, $R_0=0$.

Лемма 5. *Пусть* $R>2r$. *Тогда для любых* $k\in Z_+$, $m\in N$, $\rho\in[R_{m-1},R_m)$ *существуют две последовательности радиальных распределений, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $supp\,\mu_{l,i}\subset B_{R_m-r}$, $i=1,2,\ l\in N$.
2) *существуют константы* $L=L(k,R,r,\varepsilon_1,n)$, $C=C(R,r,\varepsilon_1,n)>0$, *для которых при* $l\geq L$ *имеет место неравенство*

$$\left|j_{\frac{n}{2}+k-1}(\rho\lambda)-\left(\mu_1\tilde{\ }(\lambda)\mu_{l,1}\tilde{\ }(\lambda)+\mu_2\tilde{\ }(\lambda)\mu_{l,2}\tilde{\ }(\lambda)\right)\right|\leq\frac{C(R,r,\varepsilon_1,n)}{l}\cdot\frac{\|\lambda\|^{-\frac{n}{2}-k+\frac{13}{2}}}{\rho^{\frac{n}{2}+k-1}}\cdot e^{R_m|\operatorname{Im}\lambda|},$$

где $\|\lambda\|=\max(1,|\lambda|)$.

Для доказательства леммы 5 достаточно использовать лемму 4 и повторить рассуждения из доказательства предложения 8 работы [12].

Пусть $x \in B_{R-r}$. Для $i = 1, 2, 3$ положим

$$f_i(x) = \int_{SO(n)} \left\langle A_i \delta(y), \left(\mathcal{P}_{\chi_\Pi} f\right)\left(\left\|\begin{matrix} -k^{-1} & x-ky \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|\right)\right\rangle dk,$$

где $A_1 = D_1^2 D_2 D_3 D_4 D_5$, $A_2 = D_1^2 D_2 D_3 D_4 D_5^2$ и A_3 – тождественный оператор.

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Пусть* $R > 2r$. *Тогда для любого* $k \in Z_+$, $1 \le s \le d_k$, $\rho \in (0, R)$ *существуют (и строятся явно) распределения* $\mathcal{U}_{l,i}$, $l \in N$, $i = 1, 2, 3, 4$ *со следующими свойствами:*

1) $\operatorname{supp} \mathcal{U}_{l,i} \subset B_{R-r}$ $(l \in N,\ i = 1,2,3)$,
   $\operatorname{supp} \mathcal{U}_{l,4} \subset B_R$ $(l \in N)$;
2) *для любой* $f \in C^\infty(B_R)$ *имеют место равенства*

$$\left(\Delta^n f\right)_{ks}(\rho) = \lim_{l\to\infty}\left(\left\langle \mathcal{U}_{l,1}, f_1\right\rangle + \left\langle \mathcal{U}_{l,2}, f_2\right\rangle\right) \tag{13}$$

$$f_{ks}(\rho) = \lim_{l\to\infty}\left(\left\langle \mathcal{U}_{l,3}, f_3\right\rangle + \left\langle \mathcal{U}_{l,4}, \Delta^n f\right\rangle\right). \tag{14}$$

Доказательство. Из леммы 5 следует (см. [12, доказательство теоремы 9]), что существуют распределения $\mathcal{U}_{l,i}$ $(l \in N, i = 1,2)$ с носителями в B_{R-r}, для которых при $l \ge L(k, R, r, \varepsilon_1, n)$ и любой $f \in C^\infty(B_R)$ имеет место оценка

$$\left|f_{ks}(\rho) - \left\langle \mathcal{U}_{l,1}, f * \mu_1\right\rangle - \left\langle \mathcal{U}_{l,2}, f * \mu_2\right\rangle\right| \le \frac{c_3}{l} \cdot \frac{\rho^{-\frac{n}{2}+1}}{(R - R_m)^M} \sup_{\substack{x \in B_{R_m'} \\ |\kappa| \le M}} \left|\frac{\partial^{|\kappa|}}{\partial x^\kappa} f(x)\right|, \tag{15}$$

где $R_m' = \dfrac{2}{3}R + \dfrac{1}{3}R_m$, $M = \left[\dfrac{n+13}{2}\right] + 1$ и константа c_3 зависит от R, r, ε_1, n.

Применяя (15) к $\Delta^n f$ и учитывая (11), из леммы 1 получаем равенство (13). Пусть теперь $\nu_1 = \mathcal{R}\chi_\Pi$, $\nu_2 = \Delta^n \delta$. Тогда $\nu_1^{\sim}(0) \ne 0$, $\nu_2^{\sim}(\lambda) = (-1)^n \lambda^{2n}$, т. е. $\nu_1^{\sim}$ и $\nu_2^{\sim}$ не имеют общих нулей. Кроме того, $\nu_1^{\sim}$ имеет такое же асимптотическое поведение, что и функция Бесселя (см. [11; 12]). Поэтому, как и выше, существуют распределения $\mathcal{U}_{l,i}$ $(l \in N,\ i = 3,4)$, для которых выполнено равенство (14). Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Бейтмен Г., Эрдейи Ф.** Высшие трансцендентные функции. М.: Наука. 1974. Т. 2. 295 с.
2. **Беренстейн К. А., Струппа Д.** Комплексный анализ и уравнения в свёртках. М.: ВИНИТИ. 1989. С. 5 – 111. (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления; Т. 54).
3. **Волчков В. В.** О множествах инъективности преобразования Помпейю // Матем. сборник. 1999. Т. 190, № 11. С. 51 – 66.
4. **Волчков В. В.** Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры // Матем. заметки. 1996. Т. 60, № 6. С. 804 – 809.
5. **Волчков В. В.** Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сборник. 1995. Т. 186, № 6. С. 15 – 34.
6. **Волчков В. В.** Экстремальные варианты проблемы Помпейю // Матем. заметки. 1996. Т. 59, №5. С. 671 – 680.
7. **Волчков В. В.** Экстремальные задачи о множествах Помпейю II // Матем. сборник. 2000. Т.191, № 5. С. 4 – 16.

8. **Машаров П. А**. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю // Доповіді НАН України. 2001. № 7. С. 126 – 132.
9. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евлидовых пространствах. М.: Мир. 1974. 333 с.
10. **Хёрмандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.: В 4-х т. М.: Мир. 1986. Т. 1. 474 с.
11. **Berenstein C. A., Gay R.** Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. 1989. V. 52. P. 133 – 166.
12. **Berenstein C. A., Gay R., Yger A.** Inversion of the local Pompeiu transform // J. Anal. Math. 1990. V. 54. P. 259-287.
13. **Zalcman L.** A bibliographic survey of Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations. 1992. P. 185 – 194.

Надійшла до редколегії 14.05.02