УДК 004.02:656.052

Шеховцов А.В., к.т.н.[1], Славич В.П.[2]

1 — ХНТУ, г. Херсон, 2 — ХФ ХНАДУ при ХНТУ, г. Херсон

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБГОНА НА ОДНОПОЛОСНОЙ ПРОЕЗЖЕЙ ЧАСТИ

Построена стохастическая модель процесса обгона на однополосной проезжей части, которая, в отличие от существующей, включает дополнительное условие-ограничение – возможность обгона расчетного автомобиля другим автомобилем, движущимся с большей скоростью. Предлагается вывод формулы расчета вероятности обгона группы транспортных средств.

Введение

Основой развития информационных технологий в теории транспортных потоков является моделирование. Примером может служит модель процесса обгона одним автомобилем другого или группы других автомобилей на однополосной проезжей части [1]. Существующая модель не может адекватно описывать процесс, поскольку предполагает возможность обгона только при выполнении малого числа условий, а именно:

– возникла необходимость обгона, т. е. чтобы перед первым автомобилем в определенном интервале времени τ появилось хотя бы одно транспортное средство, движущееся с меньшей скоростью (тихоходный автомобиль);

– на встречной полосе движения в соответствующем временном интервале τ нет ни одного транспортного средства.

Однако на практике возможно и третье ограничение, когда в интервале времени τ расчетный автомобиль может быть подвергнут обгону другим транспортным средством, движущимся сзади с большей скоростью (быстроходным автомобилем).

Кроме того, конечная вероятностная формула модели для обгона группы транспортных средств предполагает только ту ситуацию, когда совершается обгон всей группы одновременно.

В данной работе предлагается расширить существующую модель процесса обгона до новой модели, в которой будут преодолены указанные недостатки.

Постановка проблемы

В существующей модели процесса обгона одного транспортного средства другим имеются недостатки:

1) не учитывается условие, когда в момент совершения обгона расчетный автомобиль может быть подвержен обгону другим транспортным средством, движущимся сзади с большей скоростью, что, очевидно, повлияет на конечную формулу определения вероятности обгона;

2) не рассматривается случай поочередного обгона группы из m транспортных средств.

Решение проблемы

Для преодоления вышеупомянутых недостатков строится математическая модель, в которой, во-первых, добавляется третье, продиктованное практикой, условие-ограничение: в интервале времени τ расчетный автомобиль не должен подвергаться обгону транспортным средством, движущимся с большей скоростью, а, во-вторых, будет предложен вывод формулы расчета вероятности поочередного обгона группы из m автомобилей.

Моделирование производится с учетом предположения, что появление автомобилей в заданном интервале времени τ подчинено закону распределения Пуассона [2]:

$$P(t;n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \qquad (1)$$

где λ – интенсивность движения, n – количество автомобилей в интервале времени t.

Очевидно, что время обгона будет определяться формулой:

$$\tau = \frac{L_1 + L_2}{v_1 - v_2}, \qquad (2)$$

где L_1 – динамический габарит первого автомобиля; L_2 – динамический габарит второго автомобиля; v_1 – скорость первого автомобиля; v_2 – скорость второго автомобиля.

Обгон быстроходным автомобилем тихоходного будет возможен, если будут выполнены следующие три условия:

1) возникла необходимость обгона, т.е. чтобы перед первым автомобилем в интервале времени τ появился хотя бы один тихоходный автомобиль;

2) на встречной полосе движения в соответствующем временном интервале τ нет ни одного автомобиля;

3) в данном временном интервале τ не появится ни один быстроходный автомобиль.

Полное отсутствие автомобилей на встречной полосе при обгоне первым автомобилем тихоходного возможно, если на встречной полосе не появится ни один автомобиль в интервале времени $t = 2\tau$.

Вероятность отсутствия автомобиля на встречной полосе в интервале времени t получится из формулы (1) подстановкой вместо n нулевого значения:

$$P(t;0) = e^{-\lambda t}, \qquad (3)$$

где λ – интенсивность движения по встречной полосе движения.

Зависимость (3) определяет вероятность обгона без следования за тихоходным автомобилем.

Если же на встречной полосе во временном интервале t находится автомобиль, то, очевидно, что маневр обгона невозможен.

Поскольку обгон с хода со следованием маловероятен, рассмотрим процесс обгона со следованием за тихоходным автомобилем. Модель строится следующим образом. Все время следования разбиваем на временные интервалы $t = 2\tau$. Если время следования будет меньше t, то данная модель не описывает процесс возможности обгона.

За время следования на встречной полосе во временном интервале $t = 2\tau$, начинающимся с момента окончания следования, могут быть следующие варианты: либо отсутствие автомобилей с вероятностью $P(0)$, либо присутствие n автомобилей с вероятностью $P(n)$.

Вероятность того, что на встречной полосе присутствует хотя бы один автомобиль, может быть представлена с помощью формулы теоремы о вероятности появления хотя бы одного события из группы событий:

$$P(i^3 1) = \sum_{i=1}^{n} P(i) = 1 - P(0). \qquad (4)$$

Возможность обгона со следованием в течение времени $t = 2\tau$ является сложным событием, состоящем из следующих двух событий:

– за время следования t на первом участке отсутствуют автомобили (вероятность этого события выражена формулой (3));

– на первом участке разбиения находится хотя бы один автомобиль (вероятность этого события выражена формулой (4)), но к моменту прибытия первого автомобиля они успели освободить первый участок, необходимый для совершения обгона по встречной полосе; тогда вероятность этого события определяется зависимостью:

$$P_0(t) = \left(1 - P\left(0\right)\right) \cdot P\left(0\right). \qquad (5)$$

Следовательно, вероятность возможности обгона со следованием в течение времени t по теореме о вероятности суммы событий будет выглядеть следующим образом:

$$P_1(t) = P(0) + P_0(t) = P(0) + (1 - P(0)) \cdot P(0) = 2P(0) - P^2(0) \ = 1 - (1 - P(0))^2. \qquad (6)$$

Формула (6) выражает вероятность возможности обгона после следования в течение времени t. Если по истечении этого времени на встречной полосе на первом участке окажется хотя бы один автомобиль, обгон станет невозможным. Вероятность невозможности обгона после следования за тихоходным автомобилем в течение времени t выражается зависимостью $1 - P_1(t)$.

Для того, чтобы обгон стал возможен по истечении времени $2t$, необходимо, чтобы встречная полоса на втором участке разбиения к моменту прибытия первого автомобиля была свободна от автомобилей. Вероятность такого явления выражается зависимостью $(1 - P_1(t))P(0)$. Таким образом, вероятность возможности обгона после следования в течение времени $2t$ складывается из вероятности возможности обгона по истечении времени t на втором участке разбиения и вероятности возможности обгона по истечении времени $2t$ на втором участке, то есть:

$$P_2(t) = P_1(t) + (1 - P_1(t)) \cdot P(0) = 1 - (1 - P(0))^3. \qquad (7)$$

Аналогично определяется вероятность возможности обгона при следовании в течение времени $3t$, $4t$ и т.д. Тогда вероятность возможности обгона со следованием в течение времени $n \cdot t$ запишется в следующем виде:

$$P_n(t) = 1 - (1 - P(0))^{n+1}. \qquad (8)$$

Как было отмечено, возможность обгона состоит из двух компонентов: отсутствие автомобилей на встречной полосе и отсутствие быстроходного автомобиля. Вероятность первого события определяется формулой (8). Теперь рассмотрим вероятность второго события.

Вероятность появления быстроходного автомобиля будет определяться по закону распределения Пуассона:

$$P_Б(t) = \lambda_Б t\, e^{-\lambda_Б t}, \qquad (9)$$

где $\lambda_Б$ – интенсивность быстроходных автомобилей в потоке. Вероятность появления быстроходного автомобиля определяется содержанием таких автомобилей в потоке. Пусть

$$\varphi = \frac{\lambda_Б}{\lambda_П}, \qquad (10)$$

где $\lambda_П$ – интенсивность движения в прямом направлении.

Таким образом, вероятность появления быстроходного автомобиля равна:

$$P_Б(t) = \varphi \lambda_П t\, e^{-\varphi \lambda_П t}. \qquad (11)$$

Тогда вероятность возможности обгона определяется произведением формул (8) и (11), т.е.:

$$\begin{aligned} P_{возм}(t) &= P_n(t) P_Б(t) = \left(1 - (1 - P(0))^{n+1}\right) \varphi \lambda_П t\, e^{-\varphi \lambda_П t} = \\ &= \left(1 - \left(1 - e^{-\lambda_П t}\right)^{n+1}\right) \varphi \lambda_П t\, e^{-\varphi \lambda_П t}. \end{aligned} \qquad (12)$$

Реализовать маневр обгона можно в том случае, если одновременно возникает необходимость в обгоне и возможность обгона. Выше рассмотрена вероятность возможности обгона (см. формулу (12)). Вероятность необходимости обгона определяется появлением в прямом направлении хотя бы одного тихоходного автомобиля. Вероятность появления в прямом направлении хотя бы одного автомобиля также определяется распределением Пуассона по формуле:

$$P_T(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{(\lambda_T t)^k}{k!}e^{-\lambda_T t}, \tag{13}$$

где λ_T – интенсивность тихоходных автомобилей в потоке. Аналогично, вероятность появления тихоходного автомобиля определяется содержанием таких автомобилей в потоке:

$$\psi=\frac{\lambda_T}{\lambda_П}. \tag{14}$$

Поэтому вероятность появления тихоходного автомобиля будет равна:

$$P_T(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{(\psi\lambda_П t)^k}{k!}e^{-\psi\lambda_П t}. \tag{15}$$

Окончательная формула вероятности обгона одного автомобиля будет получаться произведением выражений (12) и (15) и подстановкой в выражение (15) значения $m = 1$, т.е.:

$$P_{обгона\ 1}(t)=P_{возм}(t)\,P_T(t)=\left(1-\left(1-e^{-\lambda_П t}\right)^{n+1}\right)\varphi\lambda_П t\,e^{-\varphi\lambda_П t}\,\frac{(\psi\lambda_П t)^k}{k!}e^{-\psi\lambda_П t}. \tag{16}$$

В случае определения вероятности обгона нескольких автомобилей, рассматриваемых как единое множество, формулы (2) и (16) преобразуются соответственно к виду:

$$\tau=\frac{L_1+mL_2}{v_1-v_2}, \tag{17}$$

$$P_{обгона}(t)=\left(1-\left(1-e^{-\lambda_П t}\right)^{n+1}\right)\varphi\lambda_П t e^{-\varphi\lambda_П t}\sum_{k=1}^{m}\frac{(\psi\lambda_П t)^k}{k!}e^{-\psi\lambda_П t}, \tag{18}$$

где m – количество тихоходных автомобилей в группе.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда обгон группы автомобилей будет происходить поочередно. В этом случае формула (18) будет последовательно применяться к каждому из обгоняемых автомобилей. Следовательно, результирующая зависимость будет выражаться произведением выражений вида (18), т.е.:

$$P_{обгона\ группы}(t)=\prod_{j=1}^{r}\left(1-\left(1-e^{-\lambda_П t}\right)^{n_j+1}\right)\varphi\lambda_П t\,e^{-\varphi\lambda_П t}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{(\psi\lambda_П t)^k}{k!}e^{-\psi\lambda_П t}, \tag{19}$$

где r – количество тихоходных автомобилей в группе; m_j – соответствующее количество автомобилей в подгруппах, $j=\overline{1,r}$.

Заключение

В данной работе предложено построение стохастической модели процесса обгона на однополосной проезжей части, которая, в отличие от существующей, включает в себя естественное дополнительное условие-ограничение – возможность обгона расчетного автомобиля другим автомобилем, движущимся с большей скоростью. Кроме того, выводится формула расчета вероятности обгона не только одного, но и группы из m транспортных средств.

Список литературы

1. Хомяк Я.В. Организация дорожного движения. – К.: Вища школа, 1986.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 2000.

Стаття надійшла до редакції 18.04.07