

**Уравнения подвижных и неподвижных аксоидов  
для класса движений по инерции  
системы двух гироскопов Лагранжа**

В статье [1] дана постановка задачи о движении по инерции системы двух гироскопов Лагранжа, сочлененных неголономным и идеальным сферическим шарнирами. Там же получено точное решение задачи при нулевом значении постоянной интеграла, выражающего сохранение момента количества движения системы.

Здесь для решения, указанного в работе [1], получены уравнения подвижных и неподвижных аксоидов тел системы при условии, что одно из тел закреплено в центре масс.

Приведем некоторые соотношения из работы [1]

$$\begin{aligned}\Omega_1(\theta) &= -\frac{2(A - N \cos \theta)}{A + A_0 - 2N \cos \theta} \kappa(\theta), \\ \Omega_2(\theta) &= \frac{-(A + J_0)J + N(J + J_0) \cos \theta + (J - A)J_0 \cos^2 \theta}{(H + A_0J_0 - NJ_0 \cos \theta)J \sin \theta} n(\theta), \\ n_0(\theta) &= -\omega_2(\theta)J_0 \sin \theta + \frac{J_0}{J} n(\theta) \cos \theta, \\ \omega_1(\theta) &= \frac{2(A_0 - N \cos \theta)}{A + A_0 - 2N \cos \theta} \kappa(\theta), \\ \omega_2(\theta) &= \frac{A_0(J + J_0) \cos \theta - N(J + J_0 \cos^2 \theta)}{(H + A_0J_0 - NJ_0 \cos \theta)J \sin \theta} n(\theta), \\ u &= \cos \theta, \\ \frac{dn}{n} &= \left[ \frac{NJ_0}{NJ_0u - H - A_0J_0} - \frac{(H - A_0J)J_0u - NJJ_0}{(H - A_0J)J_0u^2 + (H + A_0J_0)J} \right] du.\end{aligned}\tag{1}$$

В этом решении потенциальная энергия упругого элемента является произвольной дифференцируемой функцией угла  $\theta$ .

Предположим, что одно из тел системы закреплено в центре масс

$$N = 0,\tag{2}$$

и при этом условии запишем основные переменные задачи

$$\Omega_1(u) = -\frac{2A}{A + A_0} \kappa(u),\tag{3}$$

$$\Omega_2(u) = -\frac{(1 + bu^2)n(u)}{A_0 \sqrt{1 - u^2}},\tag{4}$$

$$\Omega_3(u) = -\frac{u n(u)}{1-u^2} \left( \frac{1+bu^2}{A_0} + \frac{1+b}{A} \right), \quad (5)$$

$$n_0(u) = b u n(u), \quad (6)$$

$$\omega_1(u) = \frac{2A_0}{A+A_0} \kappa(u), \quad (7)$$

$$\omega_2(u) = \frac{(1+b)u n(u)}{A \sqrt{1-u^2}}, \quad (8)$$

$$\omega_3(u) = -\frac{n(u)}{1-u^2} \left[ \frac{1+bu^2}{A_0} + \frac{(1+b)u^2}{A} \right], \quad (9)$$

$$n(u) = \frac{C J}{\sqrt{1+bu^2}}, \quad (10)$$

где  $CJ$  – постоянная интегрирования, введен безразмерный параметр

$$b = \frac{(A-J)J_0}{(A+J_0)J}.$$

Углы собственных вращений тел  $S$  и  $S_0$  определим из уравнений [1]

$$\dot{\varphi} = \frac{n(u)}{J} - \omega_3(u), \quad (11)$$

$$\dot{\Phi} = \left[ \frac{n(u)}{J} - \omega_3(u) \right] u. \quad (12)$$

Переменная  $\kappa(u)$  и потенциальная энергия  $\Pi(u)$  упругого элемента связаны соотношением [1]

$$\kappa^2(u) = \frac{A+A_0}{4AA_0} \left\{ 2h - 2\Pi(u) - \frac{C^2 J^2}{AA_0(1-u^2)} \left[ A_0(1+b)u^2 + A(1+bu^2) + \frac{AA_0}{J}(1-u^2) \right] \right\}.$$

При построении аксоидов в работах [2, 3, 4] использовался вектор  $\mathbf{g}$ , сохраняющий направление в неподвижном пространстве. В исследуемом решении такой вектор отсутствует. Чтобы образовать базис в неподвижном пространстве, выделим класс движений, для которых траектория шарнира представляет плоскую кривую. Для этого необходимо найти векторы бинормали и нормали, которые вместе с вектором  $\mathbf{V}_*$  – скоростью шарнира  $O$  – образуют ортогональный базис. Для плоских движений шарнира бинормаль перпендикулярна к плоскости траектории шарнира и сохраняет направление в пространстве

Ограничение (2) эквивалентно двум условиям  $a=0$  или  $a_0=0$ , из которых выберем первое. Запишем при этом вектор  $\mathbf{r}_*$ , указывающий шарнир, его скорость  $\mathbf{V}_*$  и ускорение  $\mathbf{W}_*$  [5, (5.22), (5.24), (5.27)–(5.29)]

$$\mathbf{r}_* = -a_0 \mathbf{e}_3^0, \quad (13)$$

$$\mathbf{V}_* = a_0 (-\Omega_2 \mathbf{e}_1 + \Omega_1 \mathbf{e}_2^0), \quad (14)$$

$$\mathbf{W}_* = a_0 [ -(\dot{\Omega}_2 + \Omega_3 \Omega_1) \mathbf{e}_1 + (\dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3) \mathbf{e}_2^0 + (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \mathbf{e}_3^0 ]. \quad (15)$$

Для сокращения записей наряду с явными зависимостями (3)–(5) будем использовать уравнения движения, записанные при ограничении (2),

$$\dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3 = -[\Omega_2 n_0 + \Pi'(\theta)]/A_0, \quad (16)$$

$$\dot{\Omega}_2 + \Omega_1 \Omega_3 = \Omega_1 n_0 / A_0, \quad (17)$$

из которых получим

$$\Omega_1 \dot{\Omega}_1 + \Omega_2 \dot{\Omega}_2 = -\frac{\Omega_1}{A_0} \Pi'(\theta). \quad (18)$$

Вместо  $\Omega_1$  введем новую переменную

$$\sigma^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 \quad (19)$$

и представим уравнение (18) в виде

$$\sigma \dot{\sigma} = -\frac{\Omega_1}{A_0} \Pi'(\theta). \quad (20)$$

При условии (2), переменные  $\Omega_1$ ,  $\omega_1$ , как следует из (3), (7), связаны соотношением  $A\omega_1 + A_0\Omega_1 = 0$ , из которого имеем

$$\omega_1 = -\frac{A_0}{A} \Omega_1, \quad (21)$$

а так как [1]  $\dot{\theta} = \Omega_1 - \omega_1$ , с учетом (21) получим

$$\dot{\theta} = \left(1 + \frac{A_0}{A}\right) \Omega_1. \quad (22)$$

Теперь уравнение (20) запишем так

$$\left[ \sigma^2 + \frac{2A}{A_0(A + A_0)} \Pi(\theta) \right]^{\bullet} = 0.$$

Выполнив интегрирование, находим

$$\Pi(\theta) = h_1 - \frac{A + A_0}{2A} A_0 \sigma^2. \quad (23)$$

Соотношение (23) является интегралом энергии системы.

Подставим (16), (17), (23) в (15) и получим

$$\mathbf{W}_* = a_0 \left[ -\Omega_1 \frac{n_0}{A_0} \mathbf{e}_1 + \left( -\Omega_2 \frac{n_0}{A_0} + \frac{\sigma \dot{\sigma}}{\Omega_1} \right) \mathbf{e}_2 + \sigma^2 \mathbf{e}_3 \right]. \quad (24)$$

Теперь находим бинормаль

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{V}_* \times \mathbf{W}_*, \quad (25)$$

используя (14), (24)

$$\mathbf{B}_* = a_0^2 \left[ \mathbf{e}_1 \Omega_1 \sigma^2 + \mathbf{e}_2^0 \Omega_2 \sigma^2 + \mathbf{e}_3^0 \left( \sigma^2 \frac{n_0}{A_0} - \sigma \dot{\sigma} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \right]. \quad (26)$$

Как указано в [6], кривизна  $\kappa^*$  и кручение  $\kappa^0$  траектории определяются по формулам

$$\kappa^* = B_*/V_*^3,$$

$$\kappa^0 = (\mathbf{z}_* \cdot \mathbf{B}_*) / B_*^2, \quad (27)$$

где  $\mathbf{z}_* = \dot{\mathbf{W}}_*$ .

Вектор

$$\mathbf{z}_* = \dot{\mathbf{W}}_* = \dot{w}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{w}_2^0 \mathbf{e}_2^0 + \dot{w}_3^0 \mathbf{e}_3^0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{W}_*, \quad (28)$$

$$w_1 = -a_0 \Omega_1 n_0 / A_0, \quad w_2^0 = a_0 (-\Omega_2 n_0 / A_0 + \sigma \dot{\sigma} / \Omega_1), \quad w_3^0 = a_0 \sigma^2. \quad (29)$$

С учетом (29), (26), (28) вычислим скалярное произведение

$$\mathbf{z}_* \cdot \mathbf{B}_* = a_0^3 \left[ -\sigma^4 \frac{\dot{n}_0}{A_0} + 2 \sigma \dot{\sigma} \sigma^2 \frac{n_0}{A_0} - 3 \left( \frac{\sigma \dot{\sigma}}{\Omega_1} \right)^2 \Omega_1 \Omega_2 + \left( \frac{\sigma \dot{\sigma}}{\Omega_1} \right)^{\cdot} \Omega_2 \sigma^2 - \sigma \dot{\sigma} \sigma^2 \Omega_3 \right]. \quad (30)$$

Траектория шарнира будет плоской, если кручение обращается в нуль, а это означает, что правая часть в (30) обращается в нуль.

$$-\sigma^4 \frac{\dot{n}_0}{A_0} + 2 \sigma \dot{\sigma} \sigma^2 \frac{n_0}{A_0} - 3 \left( \frac{\sigma \dot{\sigma}}{\Omega_1} \right)^2 \Omega_1 \Omega_2 + \left( \frac{\sigma \dot{\sigma}}{\Omega_1} \right)^{\cdot} \Omega_2 \sigma^2 - \sigma \dot{\sigma} \sigma^2 \Omega_3 = 0. \quad (31)$$

Введем безразмерный параметр

$$k_* = A / (A + A_0)$$

и представим (22) в виде

$$\dot{\theta} = \frac{\Omega_1}{k_*}, \quad (32)$$

тогда

$$\frac{\sigma \dot{\sigma}}{\Omega_1} = \frac{\sigma \sigma'}{k_*}, \quad (33)$$

а из уравнения (17) с учетом (32) находим

$$\Omega_3 = \frac{n_0}{A_0} - \frac{\Omega_2'}{k_*}. \quad (34)$$

Подставив (33), (34) в (31), получим уравнение второго порядка для определения пока произвольной функции  $\sigma(u)$

$$A_0 \Omega_2 (\sigma \sigma')' + A_0 \Omega_2' (\sigma \sigma') - \sigma \sigma' n_0 k_* - \sigma^2 n_0' k_* + 2 n_0 k_* \sigma \sigma' - 3 A_0 \Omega_2 (\sigma')^2 = 0,$$

которое представим в виде

$$\left( A_0 \Omega_2 \sigma \sigma' - \sigma^2 n_0 k_* \right)' = \frac{3 \sigma'}{\sigma} \left( A_0 \Omega_2 \sigma \sigma' - \sigma^2 n_0 k_* \right).$$

Порядок уравнения можно понизить

$$A_0 \Omega_2 \sigma \sigma' - \sigma^2 n_0 k_* = C_2 \sigma^3, \quad (35)$$

где  $C_2$  – постоянная интегрирования.

Общее решение уравнения Бернулли (35) будет содержать интеграл  $C_2 \int (1 + bu^2)^{\frac{k_*-1}{2}} du$ , который по теореме Чебышева в элементарных функциях не выражается, поэтому считаем

$$C_2 = 0. \quad (36)$$

При этом уравнение (35) принимает вид

$$A_0 \Omega_2 \sigma \sigma' - \sigma^2 n_0 k_* = 0. \quad (37)$$

Подставив в него (4), (6), (10), получим интеграл

$$\sigma^2(u) = K^2 (1 + bu^2)^{k_*}, \quad (38)$$

где  $K^2$  – вторая постоянная интегрирования.

Теперь из (38) с учетом (19), (4), (10), находим

$$\Omega_1(u) = R(u) \frac{(1 + bu^2)^{k_*/2}}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad (39)$$

где

$$R^2(u) = K^2 (1 - u^2) - \frac{J^2 C^2}{A_0^2} (1 + bu^2)^{1 - k_*}. \quad (40)$$

Заметим, что при условии (35) кривизна постоянна и равна

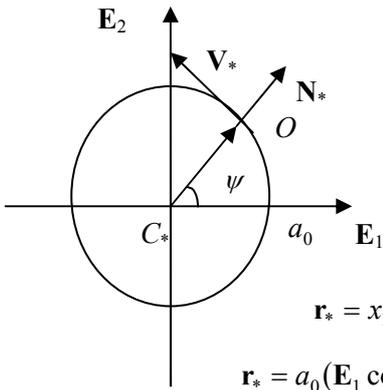
$$\kappa^* = \frac{1}{a_0} \sqrt{1 + \frac{C_2^2}{A_0^2}}. \quad (41)$$

Поясним механический смысл соотношения (41).

Траектория шарнира – это сферическая кривая  $r_*^2 = a_0^2$ , которая при равном нулю кручении является окружностью, и для неё кривизна постоянна. При ограничении (36), как следует из (41), радиус кривизны равен  $a_0$ .

Таким образом, при  $\sigma^2$ , определяемой из (38), шарнир совершает круговое движение по окружности радиуса  $a_0$ .

Так как траектория шарнира – плоская кривая, то с её помощью можно ввести неподвижный базис. Положение точки  $O$  на окружности радиуса  $a_0$  будем характеризовать углом  $\psi$  между радиус-вектором  $\mathbf{r}_*$  и положительным направлением первой оси. Ортонормированный неподвижный базис с центром в точке  $C_*$  (центр масс системы) обозначим  $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_3$ , тогда



$$\mathbf{r}_* = x_1 \mathbf{E}_1 + x_2 \mathbf{E}_2, \quad (42)$$

$$\mathbf{r}_* = a_0 (\mathbf{E}_1 \cos \psi + \mathbf{E}_2 \sin \psi). \quad (43)$$

Теперь скорость шарнира  $\mathbf{V}_*$  получим, дифференцируя (42) и (43),

$$\mathbf{V}_* = \dot{\mathbf{r}}_* = \dot{x}_1 \mathbf{E}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{E}_2, \quad (44)$$

$$\mathbf{V}_* = a_0 \dot{\psi} (-\mathbf{E}_1 \sin \psi + \mathbf{E}_2 \cos \psi). \quad (45)$$

Для определения  $\dot{\psi}$  используем (45), (14) и обозначение (24)  $\mathbf{V}_* \cdot \mathbf{V}_* = \sigma^2 = \dot{\psi}^2$  или

$$\dot{\psi} = \sigma(u). \quad (46)$$

Переходя от дифференцирования по времени к дифференцированию по переменной (1), учитывая (32), (19), (38), (40), находим

$$\psi - \psi_0 = -K k_* \int \frac{du}{R(u)},$$

Стоящий справа интеграл относится к “неберущимся”.

Ускорение шарнира  $\mathbf{W}_*$  находим, дифференцируя (44), (45), с учетом (46)

$$\mathbf{W}_* = \ddot{x}_1 \mathbf{E}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{W}_* = a_0 \left[ -(\dot{\sigma} \sin \psi + \sigma^2 \cos \psi) \mathbf{E}_1 + (\dot{\sigma} \cos \psi - \sigma^2 \sin \psi) \mathbf{E}_2 \right]. \quad (47)$$

Подставив (45), (47), (46) в (25) определяем вектор  $\mathbf{B}_*$  в неподвижном базисе

$$\mathbf{B}_* = a_0^2 \sigma^3 \mathbf{E}_3. \quad (48)$$

Установим связь между полуподвижным базисом  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^0$  и неподвижным  $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_3$ , воспользовавшись соотношением (14) и (45), (13) и (43), (26) и (48), а также (37):

$$-\mathbf{E}_1 \sin \psi + \mathbf{E}_2 \cos \psi = -\mathbf{e}_1 \sin \beta + \mathbf{e}_2^0 \cos \beta,$$

$$-\mathbf{E}_1 \cos \psi - \mathbf{E}_2 \sin \psi = \mathbf{e}_3^0,$$

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_1 \cos \beta + \mathbf{e}_2^0 \sin \beta.$$

Из этих соотношений получаем:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 \sin \beta \sin \psi - \mathbf{e}_2^0 \cos \beta \sin \psi - \mathbf{e}_3^0 \cos \psi,$$

$$\mathbf{E}_2 = -\mathbf{e}_1 \sin \beta \cos \psi + \mathbf{e}_2^0 \cos \beta \cos \psi - \mathbf{e}_3^0 \sin \psi,$$

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_1 \cos \beta + \mathbf{e}_2^0 \sin \beta$$

и

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1 \sin \beta \sin \psi - \mathbf{E}_2 \sin \beta \cos \psi + \mathbf{E}_3 \cos \beta, \quad (49)$$

$$\mathbf{e}_2^0 = -\mathbf{E}_1 \cos \beta \sin \psi + \mathbf{E}_2 \cos \beta \cos \psi + \mathbf{E}_3 \sin \beta, \quad (50)$$

$$\mathbf{e}_3^0 = -\mathbf{E}_1 \cos \psi - \mathbf{E}_2 \sin \psi, \quad (51)$$

где

$$\cos \beta = \Omega_1 / \sigma, \quad \sin \beta = \Omega_2 / \sigma.$$

Так как

$$\mathbf{\Omega}_* = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2^0 + \frac{n_0}{J_0} \mathbf{e}_3^0, \quad (52)$$

с учетом (49)–(51) запишем представление этого вектора в неподвижном базисе

$$\mathbf{\Omega}_* = p_1 \mathbf{E}_1 + p_2 \mathbf{E}_2 + p_3 \mathbf{E}_3, \quad (53)$$

где

$$p_1 = -\frac{n_0}{J_0} \cos \psi, \quad p_2 = -\frac{n_0}{J_0} \sin \psi, \quad p_3 = \sigma.$$

**Неподвижный аксоид тела  $S_0$  [5, (10.96)] имеет вид**

$$\zeta^0 = \mu \frac{\mathbf{\Omega}_*}{\Omega_*} + \frac{\mathbf{\Omega}_* \times \mathbf{V}_*}{\Omega_*^2} + \mathbf{r}_* = \zeta_1^0 \mathbf{E}_1 + \zeta_2^0 \mathbf{E}_2 + \zeta_3^0 \mathbf{E}_3.$$

Подставив сюда (53), (45), (46), (43), получим компоненты  $\zeta_i^0$ :

$$\begin{aligned}
\zeta_1^0(\mu, u) &= -F_0(\mu, u) \frac{n_0(u)}{J_0} \cos \psi, \\
\zeta_2^0(\mu, u) &= -F_0(\mu, u) \frac{n_0(u)}{J_0} \sin \psi, \\
\zeta_3^0(\mu, u) &= F_0(\mu, u) \sigma(u),
\end{aligned} \tag{54}$$

где

$$\begin{aligned}
F_0(\mu, u) &= \frac{\mu}{\Omega_*(u)} - \frac{a_0}{\Omega_*^2(u)} \frac{n_0(u)}{J_0}, \\
\Omega_*^2(u) &= \sigma^2(u) + \frac{n_0^2(u)}{J_0^2}.
\end{aligned} \tag{55}$$

**Подвижный аксоид тела  $S_0$**  имеет вид [5, (10.90)]

$$\xi^0 = \mu \frac{\mathbf{\Omega}_*}{\Omega_*} + \frac{\mathbf{\Omega}_* \times \mathbf{V}_*}{\Omega_*^2}. \tag{56}$$

Вначале запишем его представление в полуподвижном базисе  $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$

$$\xi^0 = \zeta_1^0 \mathbf{e}_1 + \zeta_2^0 \mathbf{e}_2 + \zeta_3^0 \mathbf{e}_3.$$

Подставив в (56) соотношения (52), (14), получим компоненты  $\zeta_i^0$ :

$$\zeta_1^0(\mu, u) = F_0(\mu, u) \Omega_1(u), \quad \zeta_2^0(\mu, u) = F_0(\mu, u) \Omega_2(u), \quad \zeta_3^0(\mu, u) = a_0 + F_0(\mu, u) \frac{n_0(u)}{J_0},$$

где  $F_0(\mu, u)$  определена в (55).

Зная компоненты аксоидов в полуподвижном базисе, сможем определить его компоненты в неизменно связанном с телом  $S_0$  базисе  $\mathbf{e}_1^{0*} \mathbf{e}_2^{0*} \mathbf{e}_3^{0*}$ , используя формулы перехода [2]

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1^{0*} \cos \Phi - \mathbf{e}_2^{0*} \sin \Phi, \quad \mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_1^{0*} \sin \Phi + \mathbf{e}_2^{0*} \cos \Phi, \quad \xi^0 = \zeta_1^{0*} \mathbf{e}_1^{0*} + \zeta_2^{0*} \mathbf{e}_2^{0*} + \zeta_3^0 \mathbf{e}_3^0, \\
\zeta_1^{0*} &= \zeta_1^0 \cos \Phi + \zeta_2^0 \sin \Phi, \quad \zeta_2^{0*} = -\zeta_1^0 \sin \Phi + \zeta_2^0 \cos \Phi, \quad \zeta_3^{0*} = \zeta_3^0,
\end{aligned} \tag{57}$$

где угол  $\Phi$  определим квадратурой из (12) с учетом (9), (10), (22), (39):

$$\Phi - \Phi_0 = -\frac{C k_*}{A A_0} \int \frac{\{A(A_0 + J) + [A_0(J + A) + (A + A_0) b J] u^2\} u du}{R(u) (1 - u^2) (1 + b u^2)^{\frac{k_*+1}{2}}}.$$

Скорость скольжения подвижного аксоида (57) по неподвижному  $\mathbf{v} = (\mathbf{\Omega}_* \cdot \mathbf{V}_*) / \Omega_*$ , как следует из (52), (14), обращается в нуль.

Таким образом, при движении тела  $S_0$  подвижный аксоид (57) катится по неподвижному аксоиду (54) без скольжения.

**Неподвижный аксоид тела  $S$**  имеет вид

$$\zeta = \mu \frac{\mathbf{\omega}_*}{\omega_*} + \frac{\mathbf{\omega}_* \times \mathbf{V}_*}{\omega_*^2} + \mathbf{r}_* \tag{58}$$

и в неподвижном пространстве имеет представление

$$\zeta = \zeta_1 \mathbf{E}_1 + \zeta_2 \mathbf{E}_2 + \zeta_3 \mathbf{E}_3 .$$

Так как векторы  $\mathbf{r}_*$  и  $\mathbf{V}_*$  соотношениями (43), (45) уже представлены в неподвижном базисе, то необходимо лишь получить выражение для  $\boldsymbol{\omega}_*$  в этом же базисе.

Для этого вначале воспользуемся формулами [2]

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^0 \cos \theta - \mathbf{e}_3^0 \sin \theta , \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2^0 \sin \theta + \mathbf{e}_3^0 \cos \theta ,$$

и следующими из них

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2^0 &= \mathbf{e}_2 \cos \theta + \mathbf{e}_3 \sin \theta , \\ \mathbf{e}_3^0 &= -\mathbf{e}_2 \sin \theta + \mathbf{e}_3 \cos \theta . \end{aligned} \quad (59)$$

Запишем вектор

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \frac{n}{J} \mathbf{e}_3 \quad (60)$$

в базисе  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \left( \omega_2 \cos \theta + \frac{n}{J} \sin \theta \right) \mathbf{e}_2^0 + \left( -\omega_2 \sin \theta + \frac{n}{J} \cos \theta \right) \mathbf{e}_3^0 .$$

С учетом соотношения [1]  $\frac{n_0}{J_0} = -\omega_2 \sin \theta + \frac{n}{J} \cos \theta$  имеем

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \left( \omega_2 \cos \theta + \frac{n}{J} \sin \theta \right) \mathbf{e}_2^0 + \frac{n_0}{J_0} \mathbf{e}_3^0 . \quad (61)$$

Подставив соотношения (21), (39), (8), (10), (6), (49)–(51) в (61), представим вектор  $\boldsymbol{\omega}_*$  в неподвижном базисе:

$$\boldsymbol{\omega}_* = q_1 \mathbf{E}_1 + q_2 \mathbf{E}_2 + q_3 \mathbf{E}_3 , \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} q_1(u) &= -\frac{1}{\sqrt{1+bu^2}} \left[ \frac{(A-J)C}{AK} R(u) \sin \psi + \frac{JCb u}{J_0} \cos \psi \right] , \\ q_2(u) &= \frac{1}{\sqrt{1+bu^2}} \left[ \frac{(A-J)C}{AK} R(u) \cos \psi - \frac{JCb u}{J_0} \sin \psi \right] , \\ q_3(u) &= -\frac{(1+bu^2)^{-k_*/2}}{K} \left[ \frac{A}{A_0} K^2 (1+bu^2)^{k_*} + \frac{(A-J)J C^2}{AA_0} \right] . \end{aligned} \quad (63)$$

Внесем (62), (43), (45) в (58) и получим компоненты  $\zeta_i$ :

$$\begin{aligned} \zeta_1(u) &= \mu \frac{q_1(u)}{\omega_*(u)} + a_0 \left[ 1 - \frac{\sigma(u) q_3(u)}{\omega_*^2(u)} \right] \cos \psi , \\ \zeta_2(u) &= \mu \frac{q_2(u)}{\omega_*(u)} + a_0 \left[ 1 - \frac{\sigma(u) q_3(u)}{\omega_*^2(u)} \right] \sin \psi , \\ \zeta_3(u) &= \mu \frac{q_3(u)}{\omega_*(u)} + \frac{a_0 \sigma(u)}{\omega_*^2(u)} [q_1(u) \cos \psi + q_2(u) \sin \psi] . \end{aligned} \quad (64)$$

С учетом (7), (8), (10), (21), (19) определяем

$$\omega_*^2(u) = \frac{A_0^2}{A^2} \sigma^2(u) + \frac{J^2 C^2}{A^2} \left[ b + \left( \frac{A^2}{J^2} - 1 - b \right) \frac{1}{bu^2 + 1} \right]. \quad (65)$$

Отмети, что  $q_1 \cos \psi + q_2 \sin \psi$ , как следует из (63), имеет вид

$$q_1 \cos \psi + q_2 \sin \psi = -\frac{J C b u}{J_0 \sqrt{1 + bu^2}} = -\frac{n_0(u)}{J_0}.$$

Теперь запишем (64) в виде

$$\begin{aligned} \zeta_1(\mu, u) &= \mu \frac{q_1(u)}{\omega_*(u)} + a_0 \left[ 1 - \frac{\sigma(u) q_3(u)}{\omega_*^2(u)} \right] \cos \psi, \\ \zeta_2(\mu, u) &= \mu \frac{q_2(u)}{\omega_*(u)} + a_0 \left[ 1 - \frac{\sigma(u) q_3(u)}{\omega_*^2(u)} \right] \sin \psi, \\ \zeta_3(\mu, u) &= \mu \frac{q_3(u)}{\omega_*(u)} - a_0 \frac{\sigma(u) J C b u}{J_0 \omega_*^2(u) \sqrt{1 + bu^2}}, \end{aligned}$$

где  $\sigma(u)$ ,  $q_i(u)$ ,  $\omega_*(u)$ ,  $n_0(u)$  определены в (38), (63), (65), (6), (10).

**Подвижный аксоид тела  $S$  имеет вид**

$$\xi = \mu \frac{\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*} + \frac{\boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{V}_*}{\omega_*^2}. \quad (66)$$

Запишем его вначале в полуподвижном базисе  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$

$$\xi = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 + \xi_3 \mathbf{e}_3.$$

Так как вектор  $\mathbf{V}_*$  имеет разложение (14), необходимо иметь также его разложение в базисе  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ , которое выполним, используя формулы (59),

$$\mathbf{V}_* = a_0 [-\Omega_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \Omega_1 \cos \theta + \mathbf{e}_3 \Omega_1 \sin \theta]. \quad (67)$$

Внесем (60), (67) в (66), получим компоненты  $\xi_i$ :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \mu \frac{\omega_1}{\omega_*} + \frac{a_0}{\omega_*^2} \frac{n_0}{J_0} \Omega_1, \\ \xi_2 &= \mu \frac{\omega_2}{\omega_*} - \frac{a_0}{\omega_*^2} \left( \Omega_1 \omega_1 \sin \theta + \Omega_2 \frac{n}{J} \right), \\ \xi_3 &= \mu \frac{n}{J \omega_*} + \frac{a_0}{\omega_*^2} (\Omega_1 \omega_1 \cos \theta + \Omega_2 \omega_2). \end{aligned}$$

Подставив сюда (4), (6), (8), (10), (21), (39) находим  $\xi_i(\mu, u)$ :

$$\xi_1(\mu, u) = \left[ \frac{a_0 J C b}{J_0 \omega_*^2(u) \sqrt{1 + bu^2}} - \frac{A_0 \mu}{A \omega_*(u)} \right] \frac{R(u) (1 + bu^2)^{k_0/2}}{\sqrt{1 - u^2}},$$

$$\xi_2(\mu, u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \left\{ \frac{\mu J C (1+b)u}{A \omega_*(u) \sqrt{1+bu^2}} + \right. \\ \left. + \frac{a_0}{\omega_*^2(u)} \frac{A_0}{A} \left[ K^2 (1+bu^2)^{k_*} (1-u^2) + \frac{J^2 C^2}{A_0^2} \left( \frac{A}{J} - 1 - bu^2 \right) \right] \right\}, \quad (68)$$

$$\xi_3(\mu, u) = \frac{C\mu}{\omega_*(u) \sqrt{1+bu^2}} - \frac{a_0 A_0 u}{A \omega_*^2(u)} \left[ K^2 (1+bu^2)^{k_*} + \frac{J^2 C^2 b}{A_0^2} \right].$$

Запишем разложение вектора  $\xi$  в неизменно связанном с телом базисе  $\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_3^*$

$$\xi = \xi_1^* \mathbf{e}_1^* + \xi_2^* \mathbf{e}_2^* + \xi_3^* \mathbf{e}_3^*.$$

Так как

$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi,$$

то

$$\xi_1^* = \xi_1 \cos \varphi + \xi_2 \sin \varphi, \quad \xi_2^* = -\xi_1 \sin \varphi + \xi_2 \cos \varphi, \quad (69)$$

а угол  $\varphi$  определим квадратурой из (11) с учетом (9), (10), (22), (39)

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{C k_*}{A A_0} \int \frac{\{A(A_0 + J) + [A_0(J - A) + (A + A_0)Jb]u^2\} du}{(1-u^2)(1+bu^2)^{\frac{k_*+1}{2}} R(u)}.$$

Вычисляем  $\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{V}_*$ , воспользовавшись (60), (67):

$$\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{V}_* = a_0 \left[ -\omega_1 \Omega_2 + \Omega_1 \left( \omega_2 \cos \theta + \frac{n}{J} \sin \theta \right) \right].$$

С учетом (39), (21), (4), (8), (10) имеем

$$\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{V}_* = a_0 \left( 1 - \frac{J}{A} \right) C R(u) (1+bu^2)^{\frac{k_*-1}{2}}$$

и, следовательно, скорость скольжения

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{V}_*}{\omega_*} = \frac{a_0}{\omega_*(u)} \frac{A-J}{A} C R(u) (1+bu^2)^{\frac{k_*-1}{2}} \quad (70)$$

отлична от нуля.

Таким образом, подвижный аксоид (69), (68) катится по неподвижному аксоиду (64), причем это движение сопровождается скольжением вдоль общей образующей аксоидов со скоростью (70).

Литература.

1. Лесина М.Е., Харламов А.П. Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 1995. – Вып.27. – С.15–21.

2. *Гоголева Н.Ф., Зиновьева Я.В.* Уравнение аксоидов задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных упругим и неголономным шарниром // Збірник науково-методичних робіт. – Вип.4. – Донецьк: ДонНТУ, 2006. – С. 63–80.
3. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Аксоиды для нового точного решения в задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром / Збірник науково-методичних робіт. – Вип.5. – Донецьк: ДонНТУ, 2007. – С. 96-125.
4. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Уравнение аксоидов задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром при нулевом значении момента количества движения системы. Збірник науково-методичних робіт. – Вип.5. – Донецьк: ДонНТУ, 2007. – С. 70-96.
5. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. / Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.
6. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 428 с.