

М.Е. Лесина, Н.Ф. Гоголева

## ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, СОЧЛЕНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ

Постановка задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных сферическим и неголономным шарнирами, дана в работе [1]. В работах [1-3] найдены точные решения задачи. В работе [4] получены уравнения аксоидов для этой задачи. В статье для уравнений движения системы работы [1] найдено частное решение.

**Исходные соотношения.** Приведем вначале три дифференциальных уравнения и одно алгебраическое из работы<sup>1</sup> [1] (38)\*, (39)\*, (34)\*, (37)\*

$$\begin{aligned} (\xi + 1)[H(\Omega_2 - \omega_2 \cos \theta) - (A_0 n + N n_0) \sin \theta] = \\ = 2[H\omega_2' - (N n_0 + A_0 n_0' \sin \theta)] \sin \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\xi - 1)[H(\Omega_2 \cos \theta - \omega_2) - (A n_0 + N n) \sin \theta] = \\ = 2[H\Omega_2' - N(n_0' \sin \theta - n)] \sin \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

$$n' = -n_0' \cos \theta, \quad (3)$$

$$\omega_2 \sin \theta = \frac{n}{J} \cos \theta - \frac{n_0}{J_0}. \quad (4)$$

Здесь  $A, A_0$  – экваториальные моменты инерции тел,  $J, J_0$  – осевые моменты инерции тел,  $N = m m_0 l l_0 / (m + m_0)$  – параметр, имеющий размерность момента инерции,  $H = A A_0 - N^2 > 0$ , штрихом обозначено дифференцирование по  $\theta$ .

**Построение решения.** Зададим инвариантное соотношение в виде

$$\xi = 1, \quad (5)$$

при этом из уравнения (2) имеем

<sup>1</sup> Звездочкой будем снабжать формулы работы [1].

$$H\Omega'_2 - N(n'_0 \sin \theta - n) = 0, \quad (6)$$

внесем сюда выражение  $n'$  из (3), получим

$$H\Omega'_2 + N(n + n' \operatorname{tg} \theta) = 0. \quad (7)$$

Примем ограничение

$$N = 0, \quad (8)$$

из (7) находим

$$\Omega_2 = C, \quad (9)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

Подставив (5), (8), (9) в (1), получим уравнение

$$A(\omega_2 \sin \theta)' = AC - n \sin \theta + n'_0 \sin^2 \theta, \quad (10)$$

которое вследствие (3), (4), принимает вид

$$\left( \frac{A}{J} \cos^2 \theta + \frac{A}{J_0} + \sin^2 \theta \right) n' + \left( 1 - \frac{A}{J} \right) n \sin \theta \cos \theta = AC \cos \theta \quad (11)$$

и может быть проинтегрировано без ограничений на параметры  $A, J, J_0, C$ :

$$n(\theta) = e^{\int P(\theta) d\theta} \left[ C_2 + \int Q(\theta) e^{-\int P(\theta) d\theta} d\theta \right], \quad (12)$$

здесь

$$P(\theta) = \frac{(A/J - 1) \sin \theta \cos \theta}{A/J_0 + (A/J) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}, \quad (13)$$

$$Q(\theta) = \frac{AC \cos \theta}{A/J_0 + (A/J) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}.$$

Отметим, что

$$\frac{A}{J_0} + \frac{A}{J} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta > 0,$$

$$e^{\int P(\theta) d\theta} = \frac{1}{\sqrt{A/J_0 + (A/J) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}.$$

Теперь из (12) находим:

$$n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{A/J_0 + 1 + (A/J - 1)\cos^2 \theta}} \times \left( C_2 + AC \int \frac{d \sin \theta}{\sqrt{A/J_0 + A/J + (1 - A/J)\sin^2 \theta}} \right). \quad (14)$$

Если  $A = J$ , то

$$n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{A/J_0 + 1}} \left( C_2 + \frac{AC \sin \theta}{\sqrt{A/J_0 + 1}} \right). \quad (15)$$

Если же  $A \neq J$ , то в зависимости от знака величины  $1 - A/J$  интеграл можно представить в виде элементарных функций  $\theta$ :

$$\begin{aligned} & \int \frac{d \sin \theta}{\sqrt{A/J_0 + A/J + (1 - A/J)\sin^2 \theta}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{1 - A/J}} \arcsin \sqrt{\frac{(A - J)J_0}{A(J + J_0)}} \sin \theta, \quad \text{если } A > J, \\ & \int \frac{d \sin \theta}{\sqrt{A/J_0 + A/J + (1 - A/J)\sin^2 \theta}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{1 - A/J}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{(J - A)J_0}{A(J + J_0)}} \sin \theta, \quad \text{если } A < J. \end{aligned}$$

Подробно рассмотрим случай

$$C = 0. \quad (16)$$

При этом зависимость  $n(\theta)$ , как следует из (14), такова:

$$n(\theta) = \frac{C_2}{\sqrt{A/J_0 + 1 + (A/J - 1)\cos^2 \theta}}. \quad (17)$$

Введем новые параметры с целью сокращения записи

$$C_2 = \sqrt{A/J_0 + 1} JC_*, \quad (18)$$

$$A/J - 1 = b_* (A/J_0 + 1). \quad (19)$$

Отметим, что  $b_* > 0$  при  $A > J$ , , в противном случае  $b_* < 0$ . Случай  $A = J$  приведет к постоянному значению переменной  $n$ , его не рассматриваем.

С учетом (18), (19) переменная (17) примет вид

$$n(\theta) = \frac{JC_*}{\sqrt{1 + b_* \cos^2 \theta}}. \quad (20)$$

Условие (16) означает, что

$$\Omega_2 = 0. \quad (21)$$

Подставим (20) в (3) и проинтегрируем, найдем

$$n_0(\theta) = \frac{JC_* b_* \cos \theta}{\sqrt{1 + b_* \cos^2 \theta}}. \quad (22)$$

Внеся (20), (22) в соотношение (4), определим

$$\omega_2(\theta) = \frac{JC_* (1 + b_*) \cos \theta}{A \sqrt{1 + b_* \cos^2 \theta} \sin \theta}. \quad (23)$$

Таким образом, на инвариантном соотношении (5) найдены выражения (20)-(23) для четырех переменных задачи. Компоненты угловых скоростей  $\omega_3$ ,  $\Omega_3$  находим из соотношений (11)\*

$$\omega_3(\theta) \sin \theta = \Omega_2 - \omega_2 \cos \theta, \quad (24)$$

$$\Omega_3(\theta) \sin \theta = \Omega_2 \cos \theta - \omega_2, \quad (25)$$

Подставив в (24), (25) соотношения (21), (23), получим

$$\omega_3(\theta) = -\frac{JC_* (1 + b_*) \cos^2 \theta}{A \sqrt{1 + b_* \cos^2 \theta} \sin^2 \theta}, \quad (26)$$

$$\Omega_3(\theta) = -\frac{JC_* (1 + b_*) \cos \theta}{A \sqrt{1 + b_* \cos^2 \theta} \sin^2 \theta}. \quad (27)$$

Для определения первых компонент угловых скоростей воспользуемся соотношениями (28)\*

$$\omega_1 = (\xi + 1)\kappa, \quad \Omega_1 = (\xi - 1)\kappa, \quad (28)$$

они на инвариантном соотношении (5) принимают вид

$$\omega_1(\theta) = 2\kappa, \quad (29)$$

$$\Omega_1(\theta) = 0 \quad (30)$$

Условие (30) вместе с (21) означают, что угловая скорость тела  $S_0$  направлена по оси динамической симметрии

$$\mathbf{\Omega} = \frac{n_0}{J_0} \mathbf{e}_3^* = \frac{n_0}{J_0} \mathbf{e}_3. \quad (31)$$

Для определения  $\kappa$  (а, следовательно, и  $\omega_1(\theta)$ ) воспользуемся интегралом (13)\*

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \quad (32)$$

$$G_1 = (A - N \cos \theta) \omega_1(\theta) + (A_0 - N \cos \theta) \Omega_1(\theta),$$

$$G_2 = (A - N \cos \theta) \omega_2(\theta) + (A_0 \cos \theta - N) \Omega_2(\theta) - n_0(\theta) \sin \theta, \quad (33)$$

$$G_3 = (A_0 \Omega_2(\theta) - N \omega_2(\theta)) \sin \theta + n(\theta) + n_0(\theta) \cos \theta.$$

Представим компоненты момента количества движения с учетом (8), (21), (30), (29):

$$G_1 = 2A\kappa, \quad G_2 = A\omega_2 - n_0 \sin \theta, \quad G_3 = n + n_0 \cos \theta. \quad (34)$$

Внесем их в интеграл (32)

$$4A^2\kappa^2 = g^2 - \left( A^2\omega_2^2 - 2An_0\omega_2 \sin \theta + n^2 + n_0^2 + 2nn_0 \cos \theta \right). \quad (35)$$

Подставив (20), (22), (23) в (35), получим

$$2A\kappa \sin \theta = \sqrt{g^2 \sin^2 \theta - J^2 C_*^2 (1 + b_* \cos^2 \theta)}. \quad (36)$$

Вместо  $\theta$  введем новую переменную

$$u = \cos \theta, \quad (37)$$

тогда

$$\dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta. \quad (38)$$

Вследствие (31)\*

$$\dot{\theta} = -2\kappa, \quad (39)$$

находим

$$\dot{u} = 2\kappa \sin \theta. \quad (40)$$

Запишем уравнение (36) с учетом (40), (37)

$$\frac{A}{g} \dot{u} = \sqrt{1 - J^2 C_*^2 / g^2 - (1 + J^2 C_*^2 b_* / g^2) u^2}. \quad (41)$$

Из него найдем зависимость времени  $t$  от  $u$

$$\frac{g}{A} (t - t_0) = \int \frac{du}{\sqrt{1 - J^2 C_*^2 / g^2 - (1 + J^2 C_*^2 b_* / g^2) u^2}}. \quad (42)$$

Так как выражения  $1 - J^2 C_*^2 / g^2$ ,  $1 + J^2 C_*^2 b_* / g^2$  могут иметь разные знаки, необходимо рассмотреть три варианта.

Первый из них

$$1 - J^2 C_*^2 / g^2 > 0, \quad 1 + J^2 C_*^2 b_* / g^2 > 0. \quad (43)$$

Введем новые безразмерные параметры  $\varepsilon$  и  $a_*$

$$J^2 C_*^2 = g^2 \sin^2 \varepsilon, \quad A = a_* J \quad (44)$$

и безразмерное время

$$t_* = \frac{g}{A} (t - t_0), \quad (45)$$

тогда зависимость времени  $t_*$  от  $\theta$ , как следует из (42) с учетом (43), (44),

такова

$$\cos \theta = \frac{\cos \varepsilon}{\nu} \sin \nu t_*, \quad (46)$$

где

$$\nu = \sqrt{1 + b_* \sin^2 \varepsilon}. \quad (47)$$

Второй вариант интегрируемости

$$1 - J^2 C_*^2 / g^2 > 0, \quad 1 + J^2 C_*^2 b_* / g^2 < 0. \quad (48)$$

С учетом обозначений (44) эти ограничения запишем в виде

$$\cos^2 \varepsilon > 0, \quad 1 + b_* \sin^2 \varepsilon = -\gamma_*^2 < 0, \quad (49)$$

и из (42) получим

$$\cos \theta = \frac{e^{t_* \gamma} - e^{-t_* \gamma} \cos^2 \varepsilon}{2 \gamma}. \quad (50)$$

Для третьего варианта

$$1 - J^2 C_*^2 / g^2 < 0, \quad 1 + J^2 C_*^2 b_* / g^2 < 0 \quad (51)$$

вводим обозначение

$$J^2 C_*^2 = g^2 / \cos^2 \varepsilon_*, \quad (52)$$

при котором ограничения (51) примут вид

$$\operatorname{tg}^2 \varepsilon_* > 0, \quad 1 + b_* / \cos^2 \varepsilon_* < 0. \quad (53)$$

Выполнив интегрирование в (42), находим

$$\cos \theta = \frac{e^T + e^{-T} \sin^2 \varepsilon}{2 \sigma}, \quad (54)$$

где

$$\sigma^2 = -(b_* + \cos^2 \varepsilon), \quad T = \frac{\sigma t_*}{\cos \varepsilon_*}. \quad (55)$$

Таким образом, получены решения, явно зависящие от времени. С учетом ограничений (43), (5), (8), (16), соотношения (46) и обозначений (44), (45), (47) компоненты (20)–(23), (26), (27), (29), (36), (30) угловых скоростей тел в полуподвижных осях имеют вид

$$\omega_1(t_*) = \frac{g}{A} \frac{\cos \varepsilon \sqrt{\nu^2 - (1 + b_* \sin^2 \varepsilon) \sin^2 \nu t_*}}{\sqrt{\nu^2 - \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*}}, \quad (56)$$

$$\omega_2(t_*) = \frac{g}{A} \frac{\nu(1+b_*)\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\nu t_*}{\sqrt{\nu^2 + b_*\cos^2\varepsilon\sin^2\nu t_*}\sqrt{\nu^2 - \cos^2\varepsilon\sin^2\nu t_*}}, \quad (57)$$

$$\omega_3(t_*) = -\frac{g}{A} \frac{\nu(1+b_*)\sin\varepsilon\cos^2\varepsilon\sin^2\nu t_*}{(\nu^2 - \cos^2\varepsilon\sin^2\nu t_*)\sqrt{\nu^2 + b_*\cos^2\varepsilon\sin^2\nu t_*}}, \quad (58)$$

$$n(t_*) = \frac{g\nu\sin\varepsilon}{\sqrt{\nu^2 + b_*\cos^2\varepsilon\sin^2\nu t_*}}, \quad (59)$$

$$\Omega_1(t_*) = 0, \quad (60)$$

$$\Omega_2(t_*) = 0, \quad (61)$$

$$\Omega_3(t_*) = -\frac{g}{A} \frac{\nu^2(1+b_*)\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\nu t_*}{(\nu^2 - \cos^2\varepsilon\sin^2\nu t_*)\sqrt{\nu^2 + b_*\cos^2\varepsilon\sin^2\nu t_*}}, \quad (62)$$

$$n_0(t_*) = \frac{gb_*\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\nu t_*}{\sqrt{\nu^2 + b_*\cos^2\varepsilon\sin^2\nu t_*}}. \quad (63)$$

Для определения углов  $\varphi$ ,  $\Phi$  собственных вращений тел воспользуемся уравнениями (2)\*, (3)\*

$$\dot{\varphi} = -\omega_3 + n/J, \quad (64)$$

$$\dot{\Phi} = -\Omega_3 + n_0/J_0. \quad (65)$$

В них подставим (20), (22), (26), (27), получим:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{JC_*}{g} \int \frac{[A/J + (1+b_* - A/J)u^2]du}{(1-u^2)\sqrt{(1+b_*u^2)[1 + J^2C_*^2/g^2 - (1 + J^2C_*^2b_*/g^2)u^2]}}, \quad (66)$$

$$\Phi - \Phi_0 = -\frac{JC_*}{g} \int \frac{[A/J + (1+b_* - A/J)u^2]\mu du}{(1-u^2)\sqrt{(1+b_*u^2)[1 + J^2C_*^2/g^2 - (1 + J^2C_*^2b_*/g^2)u^2]}}. \quad (67)$$

Интеграл (66) эллиптический, а (67) можно представить посредством элементарных функций времени, но в виде громоздких выражений. В дальнейшем (при построении аксоидов тела  $S_0$ ) выяснилось, что эта зависимость нам не потребуется, поэтому ее здесь не приводим.



Так же легко можно выписать с учетом (20)–(23), (26), (27), (29), (30) компоненты угловых скоростей тел в полуподвижных осях в остальных двух случаях - (48), (51).

Чтобы получить компоненты угловых скоростей тел в неизменно связанных с телами базисах, воспользуемся соотношениями

$$\omega_1^*(t) = \omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \sin \varphi, \quad (68)$$

$$\omega_2^*(t) = -\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi, \quad (69)$$

$$\Omega_1^*(t) = 0, \quad (70)$$

$$\Omega_2^*(t) = 0. \quad (71)$$

Как показывают последние выражения, тело  $S_0$  неравномерно вращается с угловой скоростью  $n_0(t)/J_0$  вокруг оси динамической симметрии. Потенциальная энергия для найденных решений (56)–(63) и для решений в случаях (48), (51) определяется из интеграла (15)\*

$$A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + A_0(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2N(\Omega_1 \omega_1 \cos \theta + \Omega_2 \omega_2) + n^2/J + n_0^2/J_0 = 2h - 2\Pi(\theta). \quad (72)$$

В силу инвариантного соотношения (5) и ограничений (8), (16) потенциальная энергия (72) имеет вид

$$2h - 2\Pi = g^2/A + JC_*^2(1 - J/A) = \text{const}, \quad (73)$$

это означает, что пружина не напряжена, то есть можно считать, что упругий элемент отсутствует, а передача вращения от одного тела к другому осуществляется только за счет неголономного шарнира.

#### Литература.

1. Лесина М.Е., Харламов А.П. Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 1995. – Вып.27. – С.15–21.

2. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Там же. – 2004. – Вып.34. – С.80–86.
3. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Условия существования линейного инвариантного соотношения специального вида // Там же. – 2006. – Вып.36. – С.51-57.
4. *Гоголева Н.Ф., Зиновьева Я.В.* Уравнения аксоидов задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Збірник науково-методичних робіт. – Донецьк: ДонНТУ, 2006.- Вип.4. – С.63–80.