УДК 531.38

М.Е. Лесина, Н.Ф. Гоголева.
Донецкий национальный технический университет.

Новое решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным и идеальным сферическим шарнирами.

Задача о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных идеальным упругим шарниром, поставленная в [1] и позже обобщенная в [2], [3], получила дальнейшее обобщение при введении неголономного шарнира, введенного в работе [4].
В работах [5], [6] указанны два случая интегрируемости обобщенной задачи.
В статье найдено новое решение для инвариантного соотношения специального вида.

Уравнение движения. При построении решения задачи будем использовать уравнения, полученные в работе[1] [5]. Выпишем уравнения движения (2)*, (3)*, (10)*–(12)*, (28)*, (31)*, (40)*

$$n = J\left(\omega_3 + \dot{\varphi}\right), \tag{1}$$

$$n_0 = J_0\left(\Omega_3 + \dot{\Phi}\right), \tag{2}$$

$$\omega_3 = \left(\Omega_2 - \omega_2 \cos\theta\right) / \sin\theta, \tag{3}$$

$$\Omega_3 = \left(\Omega_2 \cos\theta - \omega_2\right) / \sin\theta, \tag{4}$$

$$\dot{\Phi} = \dot{\varphi} \cos\theta, \tag{5}$$

$$\omega_1 = (\xi + 1)\kappa, \quad \Omega_1 = (\xi - 1)\kappa, \tag{6}$$

$$\dot{\theta} = -2\kappa(\theta), \quad \dot{\theta} = \Omega_1 - \omega_1, \tag{7}$$

$$\xi = \frac{A_0 k - N k_0 - 2A_0 k_0' \sin\theta + \omega_2 \operatorname{ctg}\theta + 2\omega_2' - \Omega_2 / \sin\theta}{-\omega_2 \operatorname{ctg}\theta - A_0 k - N k_0 + \Omega_2 / \sin\theta}. \tag{8}$$

---

[1] При ссылке на формулы работы [5] будем снабжать их звездочкой.

В той же работе [5] выполнена редукция задачи к одному уравнению Абеля второго рода (42)*

$$\eta'(\theta)\,\eta(\theta)=F_1(\theta)\,\eta(\theta)+F_0(\theta), \tag{9}$$

в котором

$$\eta(\theta)=\{\Omega_2(\theta)-\omega_2(\theta)\cos\theta-[A_0k(\theta)+Nk_0(\theta)]\sin\theta\,\}\sin\theta, \tag{10}$$

$$F_1(\theta,\omega_2)=[2\omega_2(\theta)\sin\theta-2A_0k(\theta)\cos\theta+(A-3N\cos\theta)k_0(\theta)]\sin\theta, \tag{11}$$

$$F_0(\theta,\omega_2)=[\omega_2(\theta)\sin\theta-(A_0\cos\theta-N)\,k(\theta)+(A-N\cos\theta)\,k_0(\theta)]\times$$
$$\times[-\omega_2'(\theta)+Nk_0(\theta)+A_0k_0'(\theta)\sin\theta]\sin^3\theta, \tag{12}$$

(штрихом обозначено дифференцирование по θ).
В этих уравнениях $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ – компоненты угловых скоростей полуподвижных базисов $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$.

Неизменно связанные с телами S и S_0 базисы $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^0$ связаны с упомянутыми базисами так

$$\mathbf{e}_1^*=\mathbf{e}_1\cos\varphi+\mathbf{e}_2\sin\varphi, \qquad \mathbf{e}_2^*=-\mathbf{e}_1\sin\varphi+\mathbf{e}_2\cos\varphi, \tag{13}$$

$$\mathbf{e}_1^{0*}=\mathbf{e}_1\cos\Phi+\mathbf{e}_2^0\sin\Phi, \qquad \mathbf{e}_2^{0*}=-\mathbf{e}_1\sin\Phi+\mathbf{e}_2^0\cos\Phi. \tag{14}$$

Построение решения. В работе [5] построено решение при условии нулевого момента количества движения системы, а в работе [6] для построения решения используется уравнение Абеля (9). При этом $\omega_2(\theta)$ конкретизирована таким образом, чтобы $F_0(\theta,\omega_2)$ обратилась в нуль. Таких возможностей, как следует из (12), две. Одна из них

$$\omega_2(\theta)=[(A_0\cos\theta-N)\,k(\theta)-(A-N\cos\theta)\,k_0(\theta)]/\sin\theta$$

рассмотрена в работе [6] .

Рассмотрим вторую возможность обращения $F_0(\theta,\omega_2)$ в нуль. Для этого зададим инвариантное соотношение в виде

$$\omega_2'(\theta)=A_0k_0'(\theta)\sin\theta+Nk_0(\theta), \tag{15}$$

где $k_0(\theta)=n_0(\theta)/H, \quad k(\theta)=n(\theta)/H, \quad H=AA_0-N^2>0.$

В работе [5] так же получены уравнения (19)*, (34)*

$$\omega_2(\theta)\sin\theta = -n_0(\theta)/J_0 + (n(\theta)\cos\theta)/J, \qquad (16)$$

$$n'(\theta) = -n_0'(\theta)\cos\theta. \qquad (17)$$

Уравнения (15)–(17) образуют систему трех уравнений для определения трех функций $n(\theta)$, $n_0(\theta)$, $\omega_2(\theta)$. Так как уравнение (16) конечное, то можно выполнить редукцию к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

Продифференцировав соотношение (16), получим

$$\omega_2'(\theta) = \frac{-J[n_0'(\theta)\sin\theta - n_0(\theta)\cos\theta] + J_0[n'(\theta)\sin\theta\cos\theta - n(\theta)]}{JJ_0\sin^2\theta}. \qquad (18)$$

Приравнивая правые части уравнений (15) и (18), находим

$$\begin{gathered} JJ_0(A_0 n_0'\sin\theta + Nn_0)\sin^2\theta + HJ(n_0'\sin\theta - n_0\cos\theta) - \\ -J_0 H(n'\sin\theta\cos\theta - n) = 0. \end{gathered} \qquad (19)$$

Продифференцировав уравнение (19) и подставив в него выражение для $n'(\theta)$ из (17), получим уравнение второго порядка для переменной $n_0(\theta)$

$$\begin{gathered} [(H - A_0 J)J_0\cos^2\theta + (H + A_0 J_0)J]n_0''(\theta) + \\ +[-3(H - A_0 J)J_0\cos\theta + NJJ_0]n_0'(\theta)\sin\theta + \\ +[2NJJ_0\cos\theta + HJ]n_0(\theta) = 0. \end{gathered} \qquad (20)$$

Рассмотрим вначале случай

$$H - A_0 J \neq 0.$$

Введем новые параметры

$$C = \frac{(H + A_0 J_0)J}{(H - A_0 J)J_0}, \quad E = \frac{NJJ_0}{(H - A_0 J)J_0}, \quad D = \frac{HJ}{(H - A_0 J)J_0}$$

и представим уравнение (20) в виде

$$\begin{gathered}\left(\cos^2\theta+C\right)n_0''(\theta)+\left(-3\cos\theta+E\right)n_0'(\theta)\sin\theta+\\+\left(2E\cos\theta+D\right)n_0(\theta)=0.\end{gathered}\tag{21}$$

Вводя функции

$$g^*(\theta)=\frac{(E-3\cos\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta+C}, \qquad h^*(\theta)=\frac{2E\cos\theta+D}{\cos^2\theta+C}\tag{22}$$

и полагая

$$n_0(\theta)=\zeta(\theta)\,e^{-\frac{1}{2}\int g^*(\theta)\,d\theta},$$

получаем нормальную форму уравнения (21)

$$\zeta''(\theta)+I(\theta)\zeta(\theta)=0.\tag{23}$$

Здесь

$$I(\theta)=h^*(\theta)+\frac{g^{*2}(\theta)}{4}-\frac{g^{*\prime}(\theta)}{2}\tag{24}$$

инвариант уравнения (21) [7, с.139].

Введем новую переменную $u=\cos\theta$, подставив (22) в (24), для инварианта $I(u)$ получим выражение

$$\begin{gathered}I_*(u)=\frac{9}{4}+\frac{1}{4\left(u^2+C\right)^2}\left[4Eu^3+\left(4D-6C+E^2-3\right)u^2+\right.\\\left.+2E\left(2C+1\right)u+\left(4CD-9C^2-E^2\right)\right].\end{gathered}$$

Так как $I_*(u)$ периодическая функция, то уравнение (23) представляет собой уравнение Хилла [7, с.374].

Если же $H-A_0J=0$, то уравнение (20) существенно упрощается

$$A_0\left(J+J_0\right)n_0''(\theta)+J_0Nn_0'(\theta)\sin\theta+\left(A_0J+2J_0N\cos\theta\right)n_0(\theta)=0,\tag{25}$$

$$N^2=A_0\left(A-J\right)>0.\tag{26}$$

Рассмотрим представляющий самостоятельный интерес частный случай

$$N=0\,, \tag{27}$$

который вследствие (26) влечет за собой и равенство

$$A=J. \tag{28}$$

Условия (27), (28) соответственно означают, что одно из тел системы закреплено в центре масс, а тело S сферически симметрично.

При этих ограничениях уравнение (25) принимает вид

$$n_0''(\theta)+\lambda^2 n_0(\theta)=0\,, \tag{29}$$

где

$$\lambda^2=\frac{J}{J+J_0}. \tag{30}$$

Общее решение уравнения (29) таково

$$n_0(\theta)=J_0\left(C_1\cos\lambda\theta+C_2\sin\lambda\theta\right). \tag{31}$$

Вместо постоянных интегрирования C_1, C_2 введем новые C_*, β так

$$C_1=C_*\sin\beta,\qquad C_2=C_*\cos\beta,$$

тогда решение (31) запишем в виде

$$n_0(\theta)=C_*J_0\sin(\lambda\theta+\beta).$$

Используя обозначение (30), введем новый параметр B так, что

$$J=B\lambda^2,\qquad J_0=B\left(1-\lambda^2\right),$$

а решение (31) таково

$$n_0(\theta)=C_*B\left(1-\lambda^2\right)\sin(\lambda\theta+\beta). \tag{32}$$

Подставив (32) в (17), после интегрирования определяем

$$n(\theta)=-\frac{1}{2}C_*\lambda B\left\{(1-\lambda)\sin\left[(1+\lambda)\theta+\beta\right]-(1+\lambda)\sin\left[(\lambda-1)\theta+\beta\right]\right\}. \tag{33}$$

Из конечного соотношения (16) с учетом (32), (33) находим

$$\omega_2(\theta)\sin\theta = -\frac{C_*}{2}\sin(\lambda\theta+\beta) - \frac{C_*}{4\lambda}\{(1-\lambda)\sin[(2+\lambda)\theta+\beta] - \\ -(1+\lambda)\sin[(\lambda-2)\theta+\beta]\}. \tag{34}$$

Таким образом, задавая инвариантное соотношение в виде (15), при условиях (27), (28) смогли найти зависимость от θ трех переменных $\omega_2(\theta)$, $n(\theta)$, $n_0(\theta)$.

Подставив значения (32)–(34), (11) в уравнение (9), интегрированием находим зависимость переменной η от θ

$$\eta(\theta) = \eta_0 + \left(\frac{J_0}{A_0} - 2\right)\frac{C_*}{2}\left\{\frac{1}{\lambda-1}\sin[(\lambda-1)\theta+\beta] - \frac{1}{\lambda+1}\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]\right\}.$$

После этого из (10) определим $\Omega_2(\theta)$

$$\Omega_2(\theta)\sin\theta = \eta_0 + \frac{C_*}{2}\left[\left(\frac{J_0}{A_0} - 2\right)\frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda}\right]\sin[(\lambda-1)\theta+\beta] - \\ -\frac{C_*}{2}\left[\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{J_0}{A_0} - 2\right)\frac{1}{\lambda+1}\right]\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]. \tag{35}$$

Из соотношения (8) с учетом (32)–(35) и условий (27), (28) получим

$$\xi = -1. \tag{36}$$

Из (6) с учетом (36) следует, что

$$\omega_1(\theta) = 0, \tag{37}$$

$$\Omega_1(\theta) = -2\,\kappa(\theta). \tag{38}$$

Для определения $\kappa(\theta)$ воспользуемся интегралом $(13)_*$, $(14)_*$, выражающим сохранение момента количества движения системы относительно ее центра масс

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \tag{39}$$

$$G_1 = (A - N\cos\theta)\,\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\,\Omega_1, \tag{40}$$

$$G_2 = (A - N\cos\theta)\,\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\,\Omega_2 - n_0\sin\theta, \tag{41}$$

$$G_3 = (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta + n_0\cos\theta + n\,. \tag{42}$$

Отметим, что

$$\Omega_2(\theta)\sin\theta = \left(\frac{1}{J_0} - \frac{1}{A_0}\right) n_0(\theta)\cos\theta + \left(\frac{2}{J_0} - \frac{1}{A_0} + \frac{1}{J}\right) n(\theta). \tag{43}$$

Подставив (37), (38) в (40), находим

$$G_1 = -2A_0\kappa(\theta).$$

С учетом (16), (43) представим (41), (42) в виде

$$G_2(\theta)\sin\theta = \left(\frac{2A_0}{J_0} + \frac{A_0}{J}\right) n(\theta)\cos\theta + \left(-\frac{J}{J_0} - 1 + \frac{A_0}{J_0}\cos^2\theta\right) n_0(\theta),$$

$$G_3(\theta) = \frac{A_0}{J_0} n_0(\theta)\cos\theta + \left(\frac{2A_0}{J_0} + \frac{A_0}{J}\right) n(\theta).$$

Вносим эти соотношения в (39) и получаем выражение для $\kappa^2(\theta)$ в виде

$$\begin{aligned}
\kappa^2(\theta) = {} & \frac{g^2}{4A_0^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{J_0} + \frac{1}{J}\right)^2 \frac{n^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} - \\
& -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{J_0} + \frac{1}{J}\right)\left(\frac{1}{J_0} - \frac{J}{A_0 J_0} - \frac{1}{A_0}\right) n(\theta)\, n_0(\theta)\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \\
& -\frac{1}{4A_0^2}\left[\left(\frac{J}{J_0} + 1\right)^2 + \frac{A_0}{J_0}\left(\frac{A_0}{J_0} - \frac{2J}{J_0} - 2\right)\cos^2\theta\right]\frac{n_0^2(\theta)}{\sin^2\theta},
\end{aligned} \tag{44}$$

где $n(\theta)$, $n_0(\theta)$ определены в (32), (33).

Зависимость $t(\theta)$ находим квадратурой из уравнения (7)

$$t-t_0=-\int\frac{d\theta}{2\,\kappa(\theta)}\,. \tag{45}$$

Компоненты угловых скоростей тел S и S_0 в неизменно связанных с телами базисах находим, используя соотношения (13), (14)

$$\boldsymbol{\omega}_*=\omega_1^*\mathbf{e}_1^*+\omega_2^*\mathbf{e}_2^*+(\omega_3+\dot\varphi)\,\mathbf{e}_3\;, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_*=\varOmega_1^*\mathbf{e}_1^{0*}+\varOmega_2^*\mathbf{e}_2^{0*}+\left(\varOmega_3+\dot\varPhi\right)\mathbf{e}_3^0\;, \tag{47}$$

где

$$\omega_1^*=\omega_1\cos\varphi+\omega_2\sin\varphi\,,\quad \omega_2^*=-\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi\,, \tag{48}$$

$$\varOmega_1^*=\varOmega_1\cos\varPhi+\varOmega_2\sin\varPhi\,,\quad \varOmega_2^*=-\varOmega_1\sin\varPhi+\varOmega_2\cos\varPhi\,. \tag{49}$$

Из (1), (5) выразим $\dot\varphi$, $\dot\varPhi$

$$\dot\varphi=\frac{n(\theta)}{J}-\omega_3(\theta)\,, \tag{50}$$

$$\dot\varPhi=\left[\frac{n(\theta)}{J}-\omega_3(\theta)\right]\cos\theta\,. \tag{51}$$

Зависимость $\dot\varphi(\theta)$ и $\dot\varPhi(\theta)$ находим из (50), (51) с учетом (32), (33), (3), (4), (34), (43).

Для завершения построения решения необходимо найти потенциальную энергию $\varPi(\theta)$ упругого элемента. Для этого воспользуемся интегралом энергии (15)*.

$$A\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)+A_0\left(\varOmega_1^2+\varOmega_2^2\right)-2N\left(\varOmega_1\omega_1\cos\theta+\varOmega_2\omega_2\right)+$$
$$+n^2/J+n_0^2/J_0+2\varPi(\theta)=2h\,.$$

При ограничениях (27), (28) и значениях (37), (38), (16), (43) определяем

$$A_0[2h-2\Pi(\theta)]\sin^2\theta = g^2\sin^2\theta +$$
$$+(2A_0 J/J_0^2 - A_0/J_0+1)[n(\theta)+n_0(\theta)\cos\theta]^2 - \qquad (52)$$
$$-\left[\frac{2A_0J}{J_0^2}+\frac{3A_0}{J_0}+\frac{A_0}{J}\right]n^2(\theta)+\left(\frac{J}{J_0}+1\right)\left(\frac{A_0}{J_0}-\frac{J}{J_0}-1\right)n_0^2(\theta).$$

Подставив в (52) соотношения (32), (33), находим выражение для $\Pi(\theta)$ в виде

$$A_0[2h-2\Pi(\theta)]\sin^2\theta = g^2\sin^2\theta + \frac{C_*^2}{4}B\left[B + A_0\frac{3\lambda^2-1}{(1-\lambda^2)^2}\right]\times$$
$$\times\{(1-\lambda)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]+(1+\lambda)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]\}^2 - \qquad (53)$$
$$-A_0\frac{\lambda^2+1}{(1-\lambda^2)^2}\frac{C_*^2}{4}B\{(1-\lambda)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]-(1+\lambda)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]\}^2 +$$
$$+(A_0-B)C_*^2 B\sin^2(\lambda\theta+\beta).$$

Выделим частный случай

$$A_0 = B\,, \qquad (54)$$

тогда выражение (53) для потенциальной энергии принимает вид

$$2h-2\Pi(\theta) = g^2/B +$$
$$+BC_*^2\frac{(1+\lambda^2)}{\lambda^2-1}\left\{\frac{1+\lambda^2}{2}[1+\cos 2(\lambda\theta+\beta)]-\lambda\operatorname{ctg}\theta\sin 2(\lambda\theta+\beta)\right\}.$$

Так как соотношения (32)–(34) не зависят от A_0, то они остаются без изменений. Соотношения (43), (44) и (50) при условии (54) становятся такими

$$\Omega_2(\theta) = C_*\lambda^2\operatorname{ctg}\theta\sin(\lambda\theta+\beta) + \qquad (55)$$
$$+\frac{C_*(\lambda^4+1)}{2\lambda(1-\lambda^2)\sin\theta}\{-(1-\lambda)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]+(1+\lambda)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]\},$$

$$\kappa^2(\theta)=\frac{g^2}{4B^2}-\frac{C_*^2}{4}\sin(\lambda\theta+\beta)- \tag{56}$$

$$-\frac{C_*^2(\lambda^2+1)^2}{16\lambda^2(1-\lambda^2)^2\sin^2\theta}\{(1-\lambda)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]-(1+\lambda)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]\}^2,$$

$$\dot{\varphi}(\theta)=-\frac{C_*(1+\lambda^2)}{2(1-\lambda^2)\sin^2\theta}\{(\lambda+1)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]+ \\ +(\lambda-1)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]\}. \tag{57}$$

Подставив найденное из (56) выражение для $\kappa(\theta)$ в (45), получим t как функцию θ.

После этого из (57) и (51) получим зависимости углов собственных вращений φ и Φ от θ в виде

$$\varphi=\varphi_0+\frac{C_*(1+\lambda^2)}{4(1-\lambda^2)}\int\frac{(\lambda+1)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]+(\lambda-1)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]}{\kappa(\theta)\sin^2\theta}d\theta, \tag{58}$$

$$\Phi=\Phi_0+\frac{C_*(1+\lambda^2)}{4(1-\lambda^2)}\int\frac{\{(\lambda+1)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]+(\lambda-1)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]\}\cos\theta}{\kappa(\theta)\sin^2\theta}d\theta. \tag{59}$$

Компоненты угловых скоростей тел (46), (47) в неизменно связанных с ними базисах получим из (48), (49) с учетом (34), (55), (37), (38), (56), (1), (2), (58), (59).

Литература.

1. *Лесина М.Е.* О колебаниях оси маховика в теле-носителе // Механика твердого тела. – 1979. – Вып.11. – С. 32–37.
2. *Лесина М.Е.* Об условиях существования точных решений задачи о движении двух гироскопов Лагранжа соединенных сферическим шарниром // Там же. – 1984. – Вып.16. – С. 32–36.
3. *Лесина М.Е.* К построению полного решения в одном случае интегрируемости задачи о движении двух связанных тел // Там же. – 1987. – Вып.19. – С. 54–57.
4. *Харламов А.П., Харламов М.П.* Неголономный шарнир // Там же. – 1995. – Вып.27. – С. 1–7.

5. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Там же. – 1995. – Вып.27. – С. 15–21.
6. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа соединенных неголономным шарниром // Там же. – 2004. – Вып.34. – С. 80–86.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971, 576 с.