МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО КОНТРОЛЬНОЇ (КУРСОВОЇ) РОБОТИ
З ДИСЦИПЛІНИ «МЕТРОЛОГІЯ»
(для студентів заочного факультету
напряму підготовки: 6.050802 «Електронні пристрої та системи» - ЕлС)

Розглянуто
на засіданні кафедри «Електронна техніка»
протокол № 6 від 28 січня 2011 р.

Затверджено
на засіданні навч. – видавн. ради ДВНЗ ДонНТУ,
протокол № 3 від 05 травня 2011 р., № 317.

-2011-

УДК 621.3.08 (075)

Методичні вказівки до контрольної (курсової) роботи з дисципліни «Метрологія» (для студентів заочного факультету напряму підготовки: 6.050802 «Електронні пристрої та системи» - ЕлС) / Уклад.: В.Д. Коренєв - Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2011. – 30 с.

Містять основні положення теорії, які використовуються при виконанні завдань контрольної (курсової) роботи; вимоги до змісту й оформленню звіту з роботи; приклади до завдань, завдання на роботу, рекомендовану літературу, довідкові таблиці. Припускають застосування ПЕОМ при статистичній обробці матеріалів завдань. Призначені для надання допомоги студентам при виконанні контрольної (курсової) роботи з дисципліни.

Укладач: В.Д. Коренєв, доц.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

1. Робота здається у вигляді зброшурованої пояснювальної записки форматом (210х300) мм (припускається використання листів шкільного зошита). Записка починається з титульного листа, де наводиться:

- назва вищого навчального закладу (ДВНЗ «ДонНТУ»), факультету, кафедри;
- назва дисципліни, тема контрольної роботи;
- шифр групи, прізвище студента (П.І.Б. повністю), що виконав роботу;
- номер залікової книжки (студентського квитка);
- посада та науковий ступінь викладача кафедри, що має перевірити роботу.

2. Після титульного листа наводиться завдання на розрахункову роботу і початкові дані варіанту роботи.

3. Кількість розділів пояснювальної записки має відповідати кількості пунктів завдання на роботу.

Кожний розділ має складатися з трьох підрозділів:

- <u>аналіз завдання</u>, визначення напрямку його розв'язання;
- <u>розв'язання завдання</u>, що має ділитися на ряд пунктів. У кожному пункті пояснюється, що в ньому визначається; наводяться розрахункові формули в загальному вигляді; потім до них підставляють чисельні дані; наводиться результат, отриманий у пункті. Виводити відомі розповсюджені формули не слід. Чисельні дані, що входять до формул, і результати розрахунків потрібно наводити з обов'язковим указанням одиниць вимірювання (у міжнародній системі);
- <u>відповідь</u> (результати розв'язання завдання, їх аналіз, висновки).

4. Всі розрахунки виконувати з використанням (3...4)-х значущих цифр, якщо за умовою завдання не вимагається проведення обчислень з більшою точністю. При записі результату, отриманого у завданні (відповіді), потрібно додержуватись наступних <u>правил округлення</u> похибки і кінцевого результату:

- <u>похибку</u> округляти до двох значущих цифр, якщо перша з них 1 або 2, і до однієї - якщо 3, 4 ... 9;
- в кінцевому записі <u>результату</u> завдання (відповіді) його обов'язково округлити до того ж десяткового розряду, яким закінчується округлене значення абсолютної <u>похибки</u>;
- округлення виконувати лише в остаточній відповіді, а всі попередні обчислення слід проводити з одним або двома "зайвими"розрядами.

5. Пояснювальну записку роботи оформляти (писати, печатати) акуратно; залишати поля зліва (не менш 20 мм) для підшивання і справа (не менш 50 мм) для зауважень викладача. Схеми, графіки і таблиці (при необхідності) слід виконувати із застосуванням креслярського приладдя.

1. ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТУ ТА ПОХИБКИ ПРЯМОГО ВИМІРЮВАННЯ.

1.1. Результат будь-якого вимірювання відрізняється від дійсного значення вимірюваної фізичної величини (ФВ) на величину похибки вимірювання. Отже, похибка вимірювання визначається як різниця між результатом вимірювання X і дійсним значенням $X_д$ вимірюваної ФВ. При обробці результатів вимірювань застосовують:

а) абсолютну похибку Δ, що виражається в одиницях вимірюваної ФВ,

$$\Delta = X - X_д\,;$$

б) відносну похибку δ, що визначається як відношення абсолютної похибки Δ до дійсного значення $X_д$ вимірюваної ФВ (або до результату вимірювання X)

$$\delta = \Delta / X_д \quad (\text{або } \delta = \Delta / X).$$

У метрології і вимірювальній техніці всі вимірювання поділяють на одноразові і багаторазові в залежності від кількості спостережень у серії результатів. Результат багаторазового вимірювання визначають шляхом статистичної обробки ряду експериментальних даних (результатів спостережень), отриманих в процесі вимірювання. Багаторазове вимірювання має містити не менш чотирьох спостережень, коли отриманий ряд експериментальних даних ще може бути оброблений відповідно до вимог математичної статистики.

Спостереження – це експериментальна операція, що виконується в процесі багаторазового вимірювання, у результаті якої одержують одне значення з ряду значень фізичної величини, що підлягають обробці для отримання результату вимірювання.

Одноразове вимірювання – це вимірювання, що виконується один раз, тобто складається з одного спостереження (на практиці може бути до трьох). За результат одноразового вимірювання приймають результат спостереження (статистична обробка не застосовується).

1.2. При багаторазовому вимірюванні одержують ряд результатів спостережень (експериментальних даних) $x_1, x_2, x_3, \ldots xi, \ldots x_n$. Результат будь - якого i– го спостереження x_i може відрізнятись від дійсного значення $X_д$ вимірюваної ФВ, тобто містити похибку Δ_i. У залежності від характеру зміни похибки поділяють на систематичні і випадкові. Підсумкова похибка результату вимірювання складається з систематичної і випадкової складових. Систематичною похибкою називається складова підсумкової похибки вимірювання, що залишається постійною чи закономірно змінюється при повторних спостереженнях незмінної ФВ. Систематична похибка обов’язково повинна бути виключена з результатів спостережень з використанням спеціальних методів або в результати спостережень слід внести виправлення. Випадкова похибка – це складова підсумкової похибки вимірювання, що змінюється випадково при повторних спостереження однієї і тієї ж незмінної ФВ. Наявність випадкових похибок виявляється при повторних спостереженнях незмінної (постійної) ФВ і визначається в тім, що результати спостережень змінюються випадково і не збігаються один з одним.

Результат багаторазового вимірювання і випадкову складову похибки результату оцінюють статистичними методами. Оцінка вимірюваної ФВ, що отримана при обробці експериментальних даних, вважається найкращої, якщо вона спроможна, незміщена й ефективна. Оцінка є спроможною, якщо при збільшенні кількості експериментальних даних вона наближається до дійсного значення вимірюваної ФВ. При незміщеній оцінці її математичне чекання дорівнює вимірюваній величині. Оцінка вважається ефективною, якщо її середнє квадратичне відхилення (СКВ) менше ніж СКВ будь-якої іншої оцінки цієї вимірюваної ФВ.

Результати спостережень багаторазового вимірювання, що отримані експериментально у n – незалежних дослідах, при аналізі розглядають як реалізації деякої випадкової ФВ, що найчастіше відповідають нормальному закону розподілу ймовірностей. Найкращими оцінками для дійсного значення вимірюваної ФВ та випадкової похибки вважаються оцінки максимальної правдоподібності: а) для вимірюваної ФВ - середнє арифметичне результатів спостережень, б) для випадкової похибки – СКВ (дисперсія). Нижче викладені основні положення обробки результатів прямих багаторазових вимірювань із застосуванням оцінок максимальної правдоподібності.

1.2.1. При нормальному розподілі результатів спостережень прямого багаторазового вимірювання за результат вимірювання (тобто за оцінку дійсного значення вимірюваної ФВ $\hat{Q}$) приймають середнє арифметичне результатів спостережень (експериментальних даних), з яких виключені систематичні похибки:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \qquad (1.1)$$

де x_i – результат i – го спостереження, з якого виключені систематичні похибки; n –кількість спостережень.

Якщо в процесі виконання спостережень систематична похибка залишається постійною, можна спочатку обчислити середнє арифметичне $\overline{X}$, а потім виключити з нього систематичну похибку.

1.2.2. У якості характеристики випадкового розсіювання результатів спостережень (експериментальних даних) приймають оцінку СКВ результатів спостережень, що обчислюється за наступною формулою:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}\,. \qquad (1.2)$$

1.2.3. Результат багаторазового вимірювання $\overline{X}$, обчислений із використанням обмеженого ряду експериментальних даних, обтяжений випадковою похибкою і його значення може змінюватись в деяких межах при переході від одного ряду спостережень до іншого. Випадкову похибку результату багаторазового вимірювання (середнього арифметичного результатів спостережень $\overline{X}$), як випадкової величини, характеризує СКВ середнього арифметичного (СКВ результату вимірювання):

$$S\left(\overline{X}\right) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2} = S\big/\sqrt{n}\,. \qquad (1.3)$$

Із наведеної формули (3) видно, що СКВ середнього арифметичного $S\left(\overline{X}\right)$ в $\sqrt{n}$ раз менше, ніж СКВ результатів спостережень S. Якщо у якості результату багаторазового вимірювання прийняти середнє арифметичне $\overline{X}$, то випадкову похибку цього результату характеризує СКВ $S\left(\overline{X}\right)$; якщо ж за результат вимірювання приймається результат будь – якого спостереження x_i , то випадкова складова похибки такого результату зростає і її характеризує СКВ результатів спостережень S. Отже, багаторазове вимірювання з осередненням результатів спостережень дозволяє значно підвищити точність результату вимірювання за рахунок зменшення впливу на нього випадкової похибки.

Середні квадратичні відхилення S і $S(\overline{X})$ називають точковими оцінками випадкових похибок результатів спостережень і середнього арифметичного (результату вимірювання), відповідно. Якщо отриманий результат багаторазового вимірювання планується використати для подальших розрахунків або для порівняння з іншими результатами вимірювань, його доцільно надавати із застосуванням точкових оцінок у наступному вигляді:

$$\hat{Q} = \overline{X}, \quad S(\overline{X}) = \ldots, \quad n = \ldots . \tag{1.4}$$

Якщо ж результат вимірювання остаточний, його доцільно надавати у вигляді інтервальної оцінки, яку характеризує розмір довірчого інтервалу, що накриває дійсне значення вимірюваної величини із заданої (довірчої) імовірністю *P*. Відомо, що при нормальному розподілі результатів спостережень, з яких попередньо виключені систематичні похибки, дійсне значення вимірюваної величини з довірчою імовірністю *P* знаходиться в межах інтервалу

$$\left[\overline{X} - t \cdot S(\overline{X}),\ \overline{X} + t \cdot S(\overline{X})\right],$$

де *t* – коефіцієнт Ст'юдента, що відповідає обраній довірчій імовірності *P* і кількості результатів спостережень *n* (значення коефіцієнта Ст'юдента *t* для різних *P* и *n* наведені в таблиці в "Додатку 2").

Отже, результат вимірювання в цьому випадку надають у наступному вигляді:

$$\overline{X} \pm \varepsilon(P), \ P = \ldots, \ n = \ldots, \tag{1.5}$$

де $\varepsilon(P) = t \cdot S(\overline{X}) = \varepsilon_P = \dot{\Delta}_P$ – довірча межа випадкової похибки результату багаторазового вимірювання (або довірча випадкова похибка).

1.2.4. Вище зазначалось, що результат будь – якого спостереження може містити як випадкову ($\overset{\circ}{\Delta}$), так і систематичну (Δ_S) похибку. Систематичні похибки спотворюють результати спостережень найбільше істотно. Тому усуненню їх надається важливе значення. Будь –яка систематична похибка обов'язково повинна бути виявлена і виключена з результату спостережень. Це можна зробити до начала вимірювання шляхом виявлення й усуненню джерел систематичних похибок (профілактика похибок) або в процесі експерименту застосуванням спеціальних методів (експериментальне виключення похибок). Якщо ж систематична похибка не може бути виключена у наведений спосіб, а існує можливість обчислити її, то в результати вимірювань (експериментальні дані) вносять виправлення – відомі поправки. Поправка за числовим значенням дорівнює систематичній похибці і протилежна їй за знаком (П=-Δ_S). Найбільш розповсюдженим способом внесення поправки є алгебраїчне підсумовування результату вимірювання і поправки (з урахуванням її знаку). Отже, при цьому способі виключення систематичної похибки результат вимірювань виправляють шляхом обчислення (виключення похибки обчисленням).

Результати спостережень можуть вміщувати залишки систематичних похибок вже після виключення систематичних похибок і внесення виправлень. Ці залишки складають невиключені систематичні похибки (НСП) експериментальних даних. У якості НСП результатів вимірювань найчастіше виступають інструментальні похибки (похибки ЗВ, що застосовуються), похибки методу вимірювання, похибки, що обумовлені дією зовнішніх дестабілізуючих факторів, тощо. Тобто на результат вимірювання можуть впливати декілька джерел НСП. В метрології існує правило, відповідно до якого обов'язково потрібно оцінювати межі можливих значень систематичних похибок, якщо їх виключення у будь - який спосіб виявляється неможливим. Отже, для отримання НСП результату вимірювання необхідно підсумувати складові НСП всіх джерел. В принципі, систематичні похибки — детерміновані величини, однак складові НСП від різних джерел розглядають як випадкові величини. При цьому розподіл складових НСП усередині заданих меж вважають рівномірним і довірчу межу НСП результату вимірювання оцінюють за наступною формулою:

$$\Delta_S(P) = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Delta_{Si}^2}\ . \tag{1.6}$$

Тут: *k* – коефіцієнт, що відповідає обраній довірчій імовірності *P,* і залежний від кількості складових НСП «*m*» і від їх співвідношення; Δ_{Si} - межа *i*-ї складовою НСП. При довірчій імовірності *P=0,9* (також *P=0,95*) коефіцієнт *k* мало чутливий до зміни кількості складових НСП і до зміни їх значень, тому приймають *k=0,95* при *P=0,9* і *k=1,1* при *P=0,95.* Значення *k* при інших значеннях *P* можна визначити за допомогою графічних залежностей $k = k(m,l)$, що надаються в літературі, де *l* – параметр, залежний від співвідношення меж Δ_{Si} складових НСП.

1.2.5. Подальша обробка результатів прямих багаторазових вимірювань зводиться до обчислення довірчої межи підсумкової похибки $\Delta(P)$.

Підсумкову похибку результату вимірювання можна характеризувати довірчою межею тільки випадкової похибки, якщо НСП в порівнянні з випадковою похибкою мала. Тобто, $\Delta(P) = \varepsilon(P) = t \cdot S(\overline{X})$ коли $\dfrac{\Delta_S(P)}{S(\overline{X})} \le 0{,}8$.

Якщо мала випадкова похибка, то підсумкову похибку результату вимірювання може характеризувати тільки довірча межа НСП. Тобто, $\Delta(P) = \Delta_S(P)$ коли $\dfrac{\Delta_S(P)}{S(\overline{X})} \ge 8$.

Якщо 0,8 < $\dfrac{\Delta_S(P)}{S(\overline{X})}$ < 8, то підсумкова похибка результату має враховувати обидві складові (випадкову та НСП) і для розрахунку довірчої похибки результату вимірювання використовують емпіричну формулу

$$\Delta(P) = t_\Sigma \cdot S_\Sigma\,, \text{ де } t_\Sigma = \frac{\Delta_S(P) + \varepsilon(P)}{S(\overline{X}) + S_\theta},\ \ S_\Sigma = \sqrt{S^2(\overline{X}) + S_\theta^2}\,,\ \ S_\theta = \sqrt{\Delta_S^2(P)/3}\,. \tag{1.7}$$

У наведеній формулі довірчу межу випадкової похибки $\varepsilon(P)$ і межу НСП $\Delta_S(p)$ результату вимірювання необхідно брати при одній довірчій імовірності *P*.

Результат вимірювання записують у вигляді: $\overline{X} \pm \Delta(P)$, $P = \ldots$, $n = \ldots$. Якщо ж він використовується для подальшого аналізу, або порівняння з іншими результатами, то потрібно вказувати окремо межу НСП і СКВ випадкової похибки:

$$\hat{Q} = \overline{X}, \quad S\left(\overline{X}\right) = \dots, \quad \Delta_S(P) = \dots, \quad P = \dots, \quad n = \dots .$$

1.3. У вимірювальній практиці широко застосовують прямі одноразові вимірювання. При таких вимірюваннях показання засобу вимірювання (ЗВ) часто є результатом вимірювання, а похибка ЗВ, що використовується, нерідко визначає похибку результату. Перед проведенням подібних вимірювань необхідно прийняти відповідні заходи для забезпечення і підтримки нормальних умов для роботи ЗВ, проаналізувати похибки методу й оператора і переконатися в тім, що вони малі у порівнянні з похибкою, що припускається (тобто їх підсумок не перевищує 30% похибки вимірювання, що припускається). Якщо зазначені похибки істотні, їх варто врахувати при розрахунку похибки результату одноразового вимірювання.

До одноразових вимірювань звертаються у випадку виробничої необхідності, коли об'єкт вимірювання чи умови вимірювань не дозволяють повторити його. Одноразове вимірювання доцільно застосовувати, якщо випадкова складова похибки дуже мала в порівнянні з НСП. Якщо випадкова похибка істотна, результати одноразових вимірювань будуть розрізнятися. Однак, якщо підсумкова похибка одноразового вимірювання задовольняє необхідній точності результату, то одноразові вимірювання можна застосовувати. Іноді, щоб уникнути промахів, виконують два-три спостереження і за результат вимірювання приймають результат одного з цих спостережень.

2. ВИЯВЛЕННЯ ТА ВИКЛЮЧЕННЯ ГРУБИХ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ.

2.1. Інколи результат того чи іншого окремого спостереження значно відрізняється від результатів інших спостережень, отриманих у однакових умовах. Отже, такий результат може містити грубу похибку (промах). Грубими похибками вимірювань називають такі, що істотно перевищують очікувані похибки за даних умов вимірювань. Причинами появи результатів з грубими похибками можуть бути помилки оператора, несправність засобів вимірювань, різка зміна умов вимірювань, сильна короткочасна завада, тощо. Результати спостережень, що містять грубі похибки, треба визначити і виключити з розгляду. Однак визначити результат з грубою похибкою не завжди буває легко (особливо при одноразових вимірюваннях). Чим більше ряд повторних спостережень, тим легше визначити результат, що містить грубу похибку.

Похибки вимірювань, як і результати вимірювань, варто розглядати як випадкові величини, що підкоряються статистичним законам розподілу ймовірностей – найчастіше нормальному. Грубі похибки – це великі випадкові похибки. Їх поява теоретично має малу імовірність (наприклад, кілька похибок на 1 млн. спостережень), але усе-таки вони можливі; і не виключена можливість, що вже один з перших результатів спостережень містить грубу похибку і не заслуговує довіри. На практиці між результатами, що містять грубі похибки, і результатами, що заслуговують довіри, зазвичай не можна встановити чітку межу. Питання про те, чи містить даний результат грубу похибку, вирішується одним з методів перевірки статистичних гіпотез. Щодо вияву грубих похибок гіпотеза, що перевіряється, припускає, що результат спостереження x_i не містить грубої похибки і є одним зі значень випадкової величини X із визначеним законом розподілу ймовірностей (частіше - це нормальний закон). Сумнів у першу чергу викликають найбільший (x_{max}) і найменший (x_{min}) з результатів спостережень.

2.2. Перевірка гіпотези щодо вияву грубих похибок зводиться до наступного:

- для ряду результатів спостережень, що отриманий при багаторазовому вимірюванні, визначають статистичні оцінки параметрів нормального закону розподілу ймовірностей – оцінку математичного очікування

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.1}$$

і оцінку дисперсії

$$D_X = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2; \tag{2.2}$$

- потім визначають допоміжні відношення

$$\nu_1 = \frac{X_{\max} - \overline{X}}{\sqrt{D_X}}, \tag{2.3}$$

$$\nu_2 = \frac{\overline{X} - X_{\min}}{\sqrt{D_X}}; \tag{2.4}$$

- у довідковій таблиці (див. «Додаток № 1») відповідно до кількості результатів спостережень n і заданій (прийнятій) довірчій імовірності P знаходять найбільше значення ν_p, яке випадкова величина ν може приймати ще з чисто випадкових причин:

$$\nu_p(P = \dots, n = \dots) = \dots;$$

- якщо обчислене значення ν_1 (чи ν_2, або ν_1 і ν_2 разом) виявляється менше, ніж ν_p, то вказана вище гіпотеза приймається і робиться висновок, що результат x_{max} (чи x_{min}, або x_{max} і x_{min} разом) не містить грубої похибки;

- якщо ж обчислене значення ν_1 (чи ν_2, або ν_1 і ν_2 разом) виявляється більшим, ніж ν_p, то результат x_{max} (чи x_{min}, або x_{max} і x_{min} разом) варто вважати таким, що містить грубу похибку. У цьому випадку результат x_{max} (чи x_{min}, або x_{max} і x_{min} разом) виключають з ряду спостережень і новий ряд, що отримують, знову перевіряють на наявність грубих похибок у спосіб, наведена вище. При повторній перевірці застосовують статистичні оцінки параметрів розподілу нового ряду, отриманого після виключення результатів, що містять грубі похибки.

Слід зазначити, що надійність кожного з можливих висновків визначає прийнята довірча імовірність P.

Приклад 1.

При багаторазовому вимірюванні незмінної ФВ постійного розміру отримано серію з 13 результатів спостережень (див. таблицю нижче). Систематичні похибки в результатах спостережень виключені; всі результати рівної точності. Необхідно перевірити наявність грубих похибок в результатах спостережень (Р = 0.95); при виявлені результатів, що містять грубі похибки, виключити їх з серії.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}
1,256	1,243	1,264	1,223	1,237	1,247	1,226	1,213	1,254	1,224	1,322	1,227	1,254

Розв’язання прикладу.

1) Визначаємо середнє значення результатів спостережень за формулою (2.1):

$$\overline{X}_{13} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} x_i = 1{,}247.$$

2) Визначаємо дисперсію результатів спостережень за формулою (2.2):

$$D_{X.13} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{13}(x_i - 1{,}247)^2 = 7{,}38\cdot 10^{-4}.$$

3) Вибираємо в серії результатів $X_{max} = X_{11} = 1{,}322$ і $X_{min} = X_8 = 1{,}213$; визначаємо за формулами (2.3) і (2.4) допоміжні відношення:

$$\nu_{1.13} = \frac{X_{\max} - \overline{X}}{\sqrt{D_X}} = \frac{1{,}322 - 1{,}247}{\sqrt{7{,}38\cdot 10^{-4}}} = 2{,}76,$$

$$\nu_{2.13} = \frac{\overline{X} - X_{\min}}{\sqrt{D_X}} = \frac{1{,}247 - 1{,}213}{\sqrt{7{,}38\cdot 10^{-4}}} = 1{,}25.$$

4) В довідковій таблиці (див. «Додаток № 1») відповідно до $n = 13$ і $P = 0{,}95$ знаходимо значення $\nu_p = 2{,}43$. Оскільки $\nu_{1.13} = 2{,}76 > \nu_p = 2{,}43$, робимо висновок, що результат спостереження $X_{max} = X_{11} = 1{,}322$ містить грубу похибку. Виключаємо $X_{11} = 1{,}322$ із ряду результатів спостережень; отримуємо «новий» ряд, що містить 12 результатів спостережень, і перевіряємо його на наявність грубих похибок.

5) Визначаємо середнє значення результатів спостережень «нового» ряду за формулою (2.1):

$$\overline{X}_{12} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 1{,}227.$$

6) Визначаємо дисперсію результатів спостережень «нового» ряду за формулою (2.2):

$$D_{X.12} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(x_i - 1{,}227)^2 = 2{,}47\cdot 10^{-4}.$$

7) Вибираємо в серії результатів «нового» ряду $X_{max} = X_3 = 1{,}264$ і $X_{min} = X_8 = 1{,}213$; визначаємо за формулами (2.3) і (2.4) допоміжні відношення:

$$\nu_{1.12} = \frac{X_{\max} - \overline{X}}{\sqrt{D_X}} = \frac{1{,}264 - 1{,}227}{\sqrt{2{,}47\cdot 10^{-4}}} = 1{,}5,$$

$$\nu_{2.12} = \frac{\overline{X} - X_{\min}}{\sqrt{D_X}} = \frac{1{,}227 - 1{,}213}{\sqrt{2{,}47\cdot 10^{-4}}} = 1{,}72.$$

8) В довідковій таблиці відповідно до $n = 12$ і $P = 0{,}95$ знаходимо значення $\nu_p = 2{,}39$.

Висновок: результати спостережень «нового» ряду з імовірністю $P = 0{,}95$ не містять грубих похибок, оскільки $\nu_{1.12} = 1{,}5 < \nu_p = 2{,}39$ і $\nu_{2.12} = 1{,}72 < \nu_p = 2{,}39$.

3 ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТУ НЕРІВНОТОЧНОГО ВИМІРЮВАННЯ.

3.1. На практиці важко забезпечити повну відтворюваність умов повторних спостережень, якщо багаторазове вимірювання потребує значний час для його проведення . Зміна умов приводить до одержання груп результатів вимірювань з різними характеристиками похибок. Такі групи вимірювань називають нерівноточними. Якщо характеристики похибок груп вимірювань однакові, такі групи називають рівноточними. Як рівноточні, так і нерівноточні групи вимірювань можуть бути спільно статистично оброблені з метою оцінки результату вимірювання та його похибки.

Поява нерівноточних груп (рядів, серій) вимірювань є наслідком недотримання єдності вимірювань. При цьому, крім зміни умов вимірювань, поява нерівноточних результатів можлива з наступних причин:

а) у ряді випадків незмінну ФВ вимірюють з використанням різних засобів вимірювань, що можуть давати нерівноцінні по точності результати;

б) вимірювання можуть виконуватися кількома дослідниками чи групами дослідників різної кваліфікації; при цьому переслідується мета одержати можливо більшу кількість результатів спостережень і одночасно виключити чи згладити індивідуальні похибки дослідників;

в) вимірювання, що відносяться до зразкових мір чи вимірювальних приладів, часто виконуються з деякою перервою в часі. Зрештою накопичуються ряди спостережень і виникає необхідність об'єднати всі отримані результати і на основі їх математичної обробки одержати більш достовірне значення вимірюваної ФВ. Точність рядів спостережень різна, з одного боку, через те, що для вперше проведених вимірювань характерно більше розсіювання результатів, а з іншої сторони через те, що з часом ЗВ старіють і змінюються їх характеристики;

г) нерівноточними варто вважати і групи, у яких вимірювання однієї ФВ виконується різними методами, що характеризуються різними похибками.

У всіх подібних випадках при оцінці результату треба дотримуватися методів обробки результатів нерівноточних рядів спостережень, задача яких у загальному випадку полягає в знаходженні найбільш імовірного значення вимірюваної ФВ. Для того, щоб виникаючі зміни умов виміру, або зміни, що уводяться свідомо, не порушували вимог теорії похибок, кожна група результатів спостережень, що відносяться до однакових умов (даний дослідник, дане ЗВ і т.д.), повинна бути оцінена з погляду ступеня довіри (її ваги) у загальній сукупності результатів, що підлягають обробці.

3.2. У випадку обробки результатів нерівноточного вимірювання основою для оцінки результату вимірювання та його похибки є наступні дані:

1) $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ... \overline{X}_m$ – середні арифметичні значення для m груп (серій, рядів) рівноточних результатів спостережень постійної ФВ (систематичні похибки попередньо повинні бути виключені);

2) $\sigma_1, \sigma_2, ... \sigma_m$ – середні квадратичні відхилення (СКВ) результатів спостережень (чи їх оцінки) в окремих рівноточних групах (серіях, рядах);

3) n_1, n_2, ..., n_m – кількість спостережень у кожній рівноточній групі;

4) m – кількість груп.

Отже, у випадку нерівноточного вимірювання значення вимірюваної ФВ, найбільш близьке до її дійсного значення, визначається за формулою:

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\overline{X}_1 \cdot P_1 + \overline{X}_2 \cdot P_2 + ... + \overline{X}_m \cdot P_m}{P_1 + P_2 + ... + P_m}; \qquad (3.1)$$

де $\overline{\overline{X}}$ – середнє зважене; $P_1, P_2, ... P_m$ – ваги груп.

Позначення ваги в (1) тим же символом, що й імовірності (P), не випадкове. Найбільш правильним значенням ваги для даного результату є його імовірність. Але на практиці при обробці результатів вимірювань імовірності заздалегідь зазвичай невідомі. Тому ваги груп (як оцінки відповідних імовірностей) найчастіше обчислюють за наведеними нижче формулами (2) або (3):

$$P_1 : P_2 : P_3 : \cdots : P_m = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \frac{1}{\sigma_3^2} : \cdots : \frac{1}{\sigma_m^2}. \tag{3.2}$$

Відповідно до формули (2) ваги груп приймають обратно пропорційними дисперсіям результатів спостережень в рівноточних групах.

Іншим критерієм для визначення ваги групи результатів може бути кількість спостережень у кожній групі (наприклад при σ = const). В цьому випадку ваги груп обчислюють у такий спосіб:

$$P_1 : P_2 : P_3 : \cdots : P_m = n_1 : n_2 : n_3 : \cdots : n_m. \tag{3.3}$$

Вага групи характеризує ступінь нашої довіри до результатів відповідної групи спостережень. Чим більше кількість спостережень у кожній даній групі і чим менше дисперсія результатів спостережень, тим більше ступінь довіри до отриманого при цьому середнього арифметичного і з тим більшою вагою воно повинно враховуватися при визначенні оцінки дійсного значення вимірюваної ФВ – середнього зваженого.

3.3. Випадкову похибку результату нерівноточного вимірювання (середнього зваженого) характеризує СКВ середнього зваженого. Його визначають за формулою:

$$\sigma\left(\overline{\overline{X}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[1/\sigma^2\left(\overline{X}_j\right)\right]}}, \tag{3.4}$$

де $\sigma^2\left(\overline{X}_j\right)$ – дисперсія середнього арифметичного, що обчислена для j-ї групи результатів спостережень; причому, $\sigma^2\left(\overline{X}_j\right) = \frac{\sigma_j^2}{n_j}$.

При обробці результатів вимірювань зазвичай теоретичні СКВ σ_j і $\sigma\left(\overline{X}_j\right)$ невідомі. Тому використовують їх статистичні оцінки:

$$S_j = \sqrt{\frac{1}{n_j - 1}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij} - \overline{X}_j\right)^2}, \qquad S\left(\overline{X}_j\right) = \sqrt{\frac{1}{\left(n_j - 1\right)\cdot n_j}\cdot\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij} - \overline{X}_j\right)^2} = S_j \big/ \sqrt{n_j}.$$

З формули (4) видно, що СКВ середнього зваженого менше кожного з СКВ середнього арифметичного окремих груп спостережень ($\sigma\left(\overline{\overline{X}}\right) < \sigma\left(\overline{X}_j\right)$). Це означає, що при обробці нерівноточних рядів спостережень точність результату вимірювання (середнього зваженого) підвищується. В цьому і полягає доцільність застосування методики обробки нерівноточних результатів.

Приклад 2.

При багаторазовому вимірюванні незмінної ФВ трьома методами отримано три серії результатів спостережень. Систематичні похибки в результатах спостережень виключені; результати, що містять грубі похибки ($P = 0,95$), визначені і виключені з серій; в кожній серії всі результати рівної точності; серії між собою – нерівноточні. Підсумки попередньої статистичної обробки результатів спостережень в серіях надані в таблиці нижче.

$\overline{X}_i$	n_i	σ_i^2
$\overline{X}_1=1,227$	$n_1=12$	$\sigma_1^2=2,47\cdot10^{-4}$
$\overline{X}_2=1,242$	$n_2=13$	$\sigma_2^2=1,48\cdot10^{-4}$
$\overline{X}_3=1,241$	$n_3=11$	$\sigma_3^2=3,77\cdot10^{-4}$

Необхідно:

- оцінити результат нерівноточного вимірювання - середнє зважене;
- оцінити СКВ середнього зваженого (СКВ випадкової похибки результату нерівноточного вимірювання); порівняти СКВ середнього зваженого і СКВ середнього арифметичного кожної серії; зробити висновок про доцільність обробки нерівноточного вимірювання;
- записати кінцевий результат нерівноточного вимірювання використовуючи точкову і інтервальну оцінки.

Розв’язання прикладу.

1) Розраховуємо середнє зважене (результат нерівноточного вимірювання) за формулою (3.1)

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\overline{X}_1 \cdot P_1 + \overline{X}_2 \cdot P_2 + \overline{X}_3 \cdot P_3}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Ваги серій P_1, P_2 і P_3 визначаємо за формулою (3.2) із застосуванням дисперсій результатів спостережень в серіях, наданих в таблиці:

$$P_1 = \frac{1}{\sigma_1^2} = \frac{1}{2,47 \cdot 10^{-4}} = 4048, \quad P_2 = \frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{1}{1,48 \cdot 10^{-4}} = 6757, \quad P_3 = \frac{1}{\sigma_3^2} = \frac{1}{3,77 \cdot 10^{-4}} = 2653.$$

Звертаємо увагу, що серія з найменшою дисперсією результатів спостережень (друга) має найбільшу вагу у середньому зваженому, а серія з найбільшою дисперсією (третя)- має найменшу вагу. Отже

$$\overline{\overline{X}} = \frac{1,227 \cdot 4048 + 1,242 \cdot 6757 + 1,241 \cdot 2653}{4048 + 6757 + 2653} = 1,2042.$$

2) Визначаємо СКВ середнього зваженого (СКВ випадкової похибки результату нерівноточного вимірювання) за формулою (3.4)

$$\sigma\left(\overline{\overline{X}}\right) = \frac{1}{\left[\frac{1}{\sigma^2(\overline{X}_1)} + \frac{1}{\sigma^2(\overline{X}_2)} + \frac{1}{\sigma^2(\overline{X}_3)}\right]^{0,5}}.$$

Дисперсію середнього арифметичного і СКО середнього арифметичного кожної серії визначаємо наступним чином:

$$\sigma^2(\overline{X}_1) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} = \frac{2{,}47 \cdot 10^{-4}}{12} = 0{,}2058 \cdot 10^{-4}, \quad \sigma(\overline{X}_1) = \sqrt{0{,}2058 \cdot 10^{-4}} = 0{,}4537 \cdot 10^{-2};$$

$$\sigma^2(\overline{X}_2) = \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{1{,}48 \cdot 10^{-4}}{13} = 0{,}1138 \cdot 10^{-4}, \quad \sigma(\overline{X}_2) = \sqrt{0{,}1138 \cdot 10^{-4}} = 0{,}3374 \cdot 10^{-2};$$

$$\sigma^2(\overline{X}_3) = \frac{\sigma_3^2}{n_3} = \frac{3{,}77 \cdot 10^{-4}}{11} = 0{,}3427 \cdot 10^{-4}, \quad \sigma(\overline{X}_1) = \sqrt{0{,}3427 \cdot 10^{-4}} = 0{,}5854 \cdot 10^{-2}.$$

Отже:

$$\sigma\left(\overline{\overline{X}}\right) = \frac{1}{\left[\dfrac{1}{0{,}2058 \cdot 10^{-4}} + \dfrac{1}{0{,}1138 \cdot 10^{-4}} + \dfrac{1}{0{,}3427 \cdot 10^{-4}}\right]^{0{,}5}} = 0{,}2436 \cdot 10^{-2} \cdot$$

Висновок: результат нерівноточного вимірювання (середнє зважене $\overline{\overline{X}}$) точніше результату будь – якої серії (середнього арифметичного $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ або $\overline{X}_3$), оскільки СКО середнього зваженого менше, ніж СКО середнього арифметичного будь – якої серії [$\sigma(\overline{\overline{X}}) < \sigma(\overline{X}_1)$, $\sigma(\overline{\overline{X}}) < \sigma(\overline{X}_2)$ та $\sigma(\overline{\overline{X}}) < \sigma(\overline{X}_3)$].

3) Записуємо результат нерівноточного вимірювання у вигляді точкової оцінки (дивись (1.4) у п. 1.2.3), застосовуючи правила округлення похибки та результату вимірювання:

$$\hat{Q} = \overline{\overline{X}} = 1{,}2042; \quad \sigma\left(\overline{\overline{X}}\right) = 0{,}0024; \quad n = 36 \ .$$

4) В довідковій таблиці (див. «Додаток № 2») відповідно до $n = 36$ і $P = 0{,}95$ знаходимо значення коефіцієнта Ст'юдента $t = 2{,}03$; визначаємо довірчу межу випадкової похибки результату нерівноточного вимірювання $\varepsilon_p = t \cdot \sigma(\overline{\overline{X}}) = 2{,}03 \cdot 0{,}002436 = 0{,}00495$ і записуємо результат нерівноточного вимірювання у вигляді інтервальної оцінки (дивись (1.5) у п. 1.2.3), застосовуючи правила округлення:

$$1{,}204 \pm 0{,}005, \ P = 0{,}95, \ n = 36 \ .$$

4 НОРМУВАННЯ ПОХИБОК ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАННЯ. КЛАСИ ТОЧНОСТІ ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАННЯ, ЇХ ПОЗНАЧЕННЯ.

Під нормуванням похибки засобу вимірювань (ЗВ) розуміють встановлення межі значення похибки ЗВ, що припускається. Якщо реальні похибки ЗВ знаходяться у встановлених при нормуванні межах, то ЗВ вважається метрологічно справним, у протилежному випадку - метрологічно не справним. При нормуванні похибок для різних ЗВ використовують абсолютні (Δ), відносні ($\delta = \Delta / X$) і приведені ($\gamma = \Delta / X_N$) значення похибки.

4.1. Нормування абсолютної похибки ЗВ. При нормуванні абсолютної похибки ЗВ межа абсолютної основної похибки ЗВ, що припускається, може бути задана формулою

$$\Delta_p = \pm\, a, \tag{4.1}$$

якщо абсолютна похибка ЗВ у всьому робочому діапазоні обмежена постійною межею a, що не залежить від значення вимірюваної величини X (тобто, абсолютна похибка ЗВ у всьому робочому діапазоні залишається майже незмінною). Така похибка зветься адитивною або похибкою нуля.

Якщо похибка ЗВ росте пропорційно росту вимірюваної ФВ «X» і при $X = 0$ похибка $\Delta = 0$, то така похибка зветься мультиплікативною або похибкою чутливості.

Слід зазначити, що не існує приладів з чисто мультиплікативною похибкою, тому що неможливо створити ЗВ з похибкою, що дорівнює нулю при $X = 0$. Можливість існування такого ЗВ означала б можливість вимірювання зі скінченою (дуже малою) інструментальною похибкою будь-які, як завгодно малі, значення відповідної фізичної величини. Крім того, у будь-якому ЗВ існують адитивні похибки від власного шуму, дрейфу, наведень, тертя, люфтів і т.д. Тому в реальних ЗВ абсолютна похибка на початку діапазону вимірювання ($\Delta_н$) зазвичай менша від похибки наприкінці діапазону вимірювання ($\Delta_к$), а підсумкова похибка містить одночасно і адитивну, і мультиплікативну складові.

При нормуванні абсолютної похибки ЗВ в цьому випадку межа абсолютної основної похибки, що припускається, задається формулою

$$\Delta_p = \pm\,(a+bX). \tag{4.2}$$

Тут постійна «a» характеризує абсолютну адитивну складову похибки ЗВ, «b» — відносну мультиплікативну складову похибку, X — результат вимірювання.

<u>Нормування приведеної похибки ЗВ.</u> При нормуванні приведеної похибки ЗВ межу приведеної основної похибки ЗВ, що припускається, задають формулою

$$\gamma_p = \pm P, \tag{4.3}$$

де число «P» вибирається з ряду $P = (1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 4;\ 5;\ 6)\cdot 10^n$, n=1; 0; –1; –2 і т.д.

<u>Нормування відносної похибки ЗВ.</u> При нормуванні відносної похибки ЗВ межа відносної основної похибки ЗВ, що припускається, може бути задана наступною формулою:

$$\delta_p = \pm q\,, \tag{4.4}$$

де постійне число «q» вибирається з того ж ряду, що і «P» в формулі (4.3).

Слід мати на увазі, що у аналогових вимірювальних приладів зі стрілочним покажчиком кратність піддіапазонів вимірювань дорівнює 3,16 (тобто 10 Дб). При застосуванні такого приладу діапазон вимірювань слід обирати так, щоб не використовувалась перша третина шкали його покажчика, а результат вимірювання знаходився у другій чи третій третині шкали. Якщо у аналогового вимірювального приладу зі стрілочним покажчиком адитивна складова похибки значно перевищує мультиплікативну складову навіть при $X = X_{max}$, то для такого ЗВ нормують приведену похибку із застосуванням формули (4.3). Якщо ж зовні першої третини шкали ЗВ мультиплікативна складова похибки значно переважає адитивну, то для такого ЗВ нормують відносну похибку із застосуванням формули (4.4).

У вимірювальних приладах з цифровим відліком кратність піддіапазонів вимірювань зазвичай обирається такою, що дорівнює 10 (20 Дб). На цифровому покажчику при переключенні діапазонів вимірювань переміщується кома. Для цифрових вимірювальних приладів (ЦВП) зазвичай нормується відносна похибка і межа відносної основної похибки , що припускається, задається наступною формулою:

$$\delta_p = \pm\left[c + d\left(\frac{X_k}{X} - 1\right)\right], \tag{4.5}$$

де X — результат вимірювання; X_k — кінцеве значення застосованого піддіапазону вимірювання; c — коефіцієнт, що чисельно дорівнює відносній похибці наприкінці діапазону вимірювання в % (приведена похибка наприкінці діапазону); d — коефіцієнт, що чисельно дорівнює похибці на початку діапазону вимірювань, виражений у % від верхньої межі вимірювань на даному діапазоні (приведена похибка наприкінці діапазону).

Коефіцієнти c і d у формулі (4.5) вибираються з того ж ряду, що і число P у формулі (4.3).

Нормування похибки за формулою (4.5) дозволяє істотно сповільнити зростання відносної похибки ЗВ до початку діапазону. З формули (4.5) також видно, що чим ближче обмірюване значення X до X_k, тим менше відносна похибка δ. Значить при роботі з ЦВП діапазон вимірювань варто обирати таким чином, щоб результат вимірювання X був якомого ближче до X_k (при цьому кома на цифровому покажчику - по можливості, лівіше).

Інколи при нормуванні відносної похибки ЦВП формулу (4.5) записують в наступному вигляді (якщо $c > d$):

$$\delta_p = \pm\left[a + b\cdot\left(\frac{X_k}{X}\right)\right],$$

де $b = d$ і $a = c - d$.

В обґрунтованих випадках межу похибки ЗВ (абсолютної, приведеної або відносної), що припускається, можна нормувати і іншими формулами, ніж (4.1)...(4.5), або навіть у формі таблиць, графіків і т.п.

4.2. Клас точності — це узагальнена характеристика точності ЗВ, що обумовлена межею похибки, що припускається. Класи точності не встановлюються на ЗВ, для яких: а) передбачаються роздільні норми на систематичну і випадкову складові похибки, б) також на ЗВ, для яких істотне значення має динамічна похибка.

Позначення класу точності ЗВ залежить від способу нормування похибки ЗВ, а спосіб нормування, як встановлено вище, визначається головним чином залежністю похибки ЗВ від вимірюваної величини.

4.2.1. Клас точності ЗВ, для якого нормується відносна похибка формулою (5.4), позначають однією цифрою, що обирається з ряду чисел «P», вираженою у відсотках і розміщеною в колі. Так, клас точності ЗВ з $\delta_p = \pm\,0{,}005 = \pm\,0{,}5\%$ позначають як «**0,5**» .

4.2.2. Клас точності ЦВП, відносна похибка якого нормується формулою (5.5), позначають як «***c/d***», де числа c і d вибирають з ряду «P» і записують у Так, для ЦВП класу точності 0,02/0,01 межа відносної похибки, що припускається, розраховується за формулою

$$\delta_p = \pm\left[0{,}02 + 0{,}01\left(\frac{X_k}{X} - 1\right)\right]\%\,.$$

4.2.3. Клас точності ЗВ, для якого нормується приведена похибка формулою (5.3), позначають однією цифрою, що обирається з ряду чисел «P», вираженою у відсотках. Наприклад, якщо $\gamma_p = \pm\,0{,}005 = \pm\,0{,}5\%$, то клас точності позначається як «**0,5**».

Якщо шкала вимірювального приладу нерівномірна, а значення X_N, що нормує, прийнято у формулі (5.3) таким, що дорівнює не якомусь номінальному значенню в одиницях вимірюваної ФВ, а дорівнює довжині всієї шкали ЗВ або довжині якого-небудь її інтервалу, то клас точності позначається як «**0,5**».

4.2.4. Клас точності ЗВ, для якого нормується абсолютна похибка формулами (5.1) або (5.2), позначається прописними буквами латинського алфавіту або римських цифрами. Класи точності, яким відповідають менші похибки, позначають буквами, що знаходяться ближче до початку алфавіту, або цифрами, що позначають менші числа.

4.2.5. ЗВ декількох ФВ або з декількома діапазонами вимірювань можуть мати два і більше класів точності. Наприклад, приладу для вимірювання електричної напруги і електричного опору можуть бути привласнені 2 класи точності: один — як вольтметру, інший— як омметру.

Клас точності присвоюють ЗВ при їхній розробці. При експлуатації метрологічні характеристики ЗВ, зазвичай, погіршуються. При метрологічній атестації і повірці ЗВ його клас точності може бути підтверджений або допускається зниження класу точності.

Приклад 3.

Електронним вольтметром на діапазоні (0,2...2) В виконано багаторазове вимірювання е.р.с. джерела опорної напруги E_0 = 1,200 В. Шляхом подальшої статистичної обробки отриманих результатів потрібно:

1) оцінити результат багаторазового вимірювання ($\overline{U}$); у якості результатів спостережень застосувати наступні (грубі похибки з результатів спостережень виключені):

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}	U_{11}	U_{12}
1,256	1,243	1,264	1,223	1,237	1,247	1,226	1,213	1,254	1,224	1,227	1,254

2) визначити поправку, яку слід внести в результати отриманих спостережень – Π_u;

3) оцінити середнє квадратичне відхилення (СКВ) випадкового розсіювання результатів спостережень – σ_U;

4) оцінити СКВ результату багаторазового вимірювання (середнього арифметичного результатів спостережень) - $\sigma(\overline{U})$;

5) оцінити інструментальну складову похибки вимірювання (абсолютну), обумовлену класом точності застосованого вольтметру – Δ_{pv}; межу відносної похибки вольтметру, що припускається, визначити (у відсотках) за формулою:

$$\delta_{pv} = \pm\left[0{,}04 + 0{,}02\cdot\frac{U_k}{U}\right];$$

6) записати позначення класу точності вольтметру;

7) оцінити довірчу межу невиключеної систематичної похибки (абсолютної) результату вимірювання (НСП) - Δ_{su}.

8) оцінити підсумкову похибку результату багаторазового вимірювання з урахуванням обох складових – випадкової та НСП.

Розв'язання прикладу.

1) Результат багаторазового вимірювання визначаємо за формулою (1.1), вважаючи розподіл результатів спостережень нормальним:

$$\overline{U} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} U_i = 1{,}227\,.$$

2) Визначаємо систематичну похибку в результатах спостережень за формулою:

$$\Delta_s = \overline{U} - E_0 = (1{,}227 - 1{,}200)\text{ В} = 0{,}027\text{ В}.$$

Поправка, яку слід внести в результати спостережень, дорівнює:

$$\Pi_u = -\Delta_s = -0{,}027\text{ В}.$$

3) СКВ випадкового розсіювання результатів спостережень визначаємо за формулою (1.2):

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \overline{U}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}\left(U_i - 1{,}227B\right)^2} = 1{,}57\cdot 10^{-2}\ \text{В};$$

4) СКВ результату вимірювання (середнього арифметичного) визначаємо за формулою(1.3):

$$\sigma\left(\overline{U}\right) = \sigma_U \big/ n = \left(1{,}57\cdot 10^{-2} \big/ 12\right)\text{В} = 1{,}31\cdot 10^{-3}\ \text{В}.$$

5) Визначаємо довірчу межу відносної похибки вольтметру, що припускається, за формулою:

$$\delta_{pv} = \pm\left[0{,}04 + 0{,}02\cdot\frac{U_k}{U}\right]\% = \pm\left[0{,}04 + 0{,}02\cdot\frac{2B}{\overline{U}}\right]\% = \pm\left[0{,}04 + 0{,}02\cdot\frac{2B}{1{,}227B}\right]\% = \pm 0{,}0726\%\,;$$

а довірчу межу припустимої абсолютної похибки вольтметру (абсолютну інструментальну похибку вимірювання) визначаємо наступним чином:

$$\Delta_{pv} = \frac{\delta_{op}\cdot\overline{U}}{100\%} = \frac{\pm 0{,}0726\%\cdot 1{,}227B}{100\%} = \pm 0{,}89\cdot 10^{-3}\,\text{В}.$$

6) Для того, щоб записати клас точності вольтметру у вигляді «*c*/*d*» (дивись п. 4.2.2 розділу 4), потрібно надану у завданні прикладу формулу

$$\delta_{pv} = \pm\left[0{,}04 + 0{,}02\cdot\frac{U_k}{U}\right] = \pm\left[a + b\cdot\frac{U_k}{U}\right]$$

привести до вигляду

$$\delta_p = \pm\left[c + d\left(\frac{U_k}{U} - 1\right)\right],$$

де $c = a + b = 0{,}04 + 0{,}02 = 0{,}06(\%)$, $d = b = 0{,}02(\%)$ (дивись р. 4.1).

Отже, клас точності вольтметру можна позначити, як «0,06/0,02».

7) У даному прикладі НСП результату вимірювання (Δ_{su}) обумовлена лише інструментальною похибкою, тобто похибкою вольтметру. Тому довірчу межу абсолютної НСП результату вимірювання приймаємо такою, що дорівнює довірчій межі абсолютної похибки вольтметру, що припускається:

$$\Delta_{su} = \Delta_{pv} = \pm 0{,}89\cdot 10^{-3}\,\text{В}.$$

8) Довірчу межу підсумкової похибки результату вимірювання з урахуванням обох складових – випадкової та НСП – визначаємо у спосіб, що наведений у п. 1.2.5 розділу 1:

- визначаємо відношення довірчої межі абсолютної НСП результату вимірювання до СКВ результату багаторазового вимірювання (середнього арифметичного):

$$\frac{\Delta_{\text{su}}}{\sigma(\overline{U})} = \frac{0{,}89\cdot 10^{-3}B}{1{,}31\cdot 10^{-3}B} = 0{,}68 < 0{,}8;$$

- оскільки отримане відношення не перевищує 0,8 , робимо висновок, що основний внесок у підсумкову похибку вимірювання дає випадкова складова:

$$\Delta(P) = t(P;n)\cdot\sigma(\overline{U})\,;$$

- записуємо результат вимірювання у вигляді інтервальної оцінки з урахуванням випадкової складової похибки (дивись (1.5) у п. 1.2.3), застосовуючи правила округлення похибки та результату вимірювання:

$$\overline{U} \pm t(P=0{,}95; n=12)\cdot\sigma(\overline{U}) = (1{,}227 \pm 2{,}18\cdot 1{,}31\cdot 10^{-3})\text{В} = (1{,}2270 \pm 0{,}0029)\text{В}, \quad P=0{,}95\,,\ n=12.$$

5 НЕПРЯМІ ВИМІРЮВАННЯ. ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТУ ТА СКЛАДОВИХ ПІДСУМКОВОЇ ПОХИБКИ РЕЗУЛЬТАТУ НЕПРЯМОГО ВИМІРЮВАННЯ.

5.1. Значення деяких фізичних отримують не шляхом прямих вимірювань, а на підставі обчислювань за результатами прямих вимірювань (одноразових чи багаторазових) декількох фізичних величин (наприклад *A. B, C, …*), функцією яких є вимірювана величина *X*:

$$X = f(A, B, C, \ldots), \tag{5.1}$$

тут *X* – величина, значення якої отримують обчисленням за результатами прямих вимірювань величин *A, B, C, …* (результат непрямого вимірювання); *A, B, C, …* – величини, значення яких отримують шляхом прямими вимірювань (вимірювані аргументи); f – відома функція аргументів *A, B, C, …*, що визначає рівняння непрямого вимірювання (5.1).

Похибки непрямого вимірювання величини *X* залежать від похибок прямих вимірювань величин *A, B, C, …* . Це положення дійсно як для випадкової, так і для систематичної складової підсумкової похибки результату непрямого вимірювання.

5.2. У загальному випадку для обчислення середнього квадратичного відхилення (СКВ) випадкової складової похибки результату непрямого вимірювання застосовують наступну формулу:

$$\sigma_X(\overset{\circ}{\Delta}) = +\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\cdot\sigma_A\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\cdot\sigma_B\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\cdot\sigma_C\right)^2 + \ldots}\ . \tag{5.2}$$

Тут: $\sigma_X(\overset{\circ}{\Delta})$- СКВ випадкової похибки результату непрямого вимірювання величини *X*; σ_A - СКВ випадкової похибки результату прямого вимірювання величини *A* (відповідно для *B* та *C, …*); $\frac{\partial f}{\partial A}$, $\frac{\partial f}{\partial B}$ і $\frac{\partial f}{\partial C}$ - частні похідні величини *X* по відповідному прямому аргументу *A, B* і *C* (функції впливу або вагові функції), що визначають внесок похибки відповідного прямого вимірювання у похибку непрямого вимірювання; $\frac{\partial f}{\partial A}\cdot\sigma_A$, $\frac{\partial f}{\partial B}\cdot\sigma_B$, $\frac{\partial f}{\partial C}\cdot\sigma_C$ - частні випадкові похибки непрямого вимірювання.

5.3. Довірчу межу абсолютної невиключеної систематичної похибки (НСП) результату непрямого вимірювання величини *X* при довірчій імовірності *P* обчислюють за наступною формулою:

$$\Delta_{SX}(P) = k\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\cdot\Delta_{SA}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\cdot\Delta_{SB}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\cdot\Delta_{SC}\right)^2 + \ldots}\ . \tag{5.3}$$

де *k*– коефіцієнт, обумовлений прийнятою довірчою імовірністю *P* (*k* приймає значення від

0.95 до 1.49 – дивись пояснення до формули (1.6)); Δ_{SA} - довірча межа абсолютної невиключеної систематичної похибки результату прямого вимірювання величини *A* (відповідно для *B* та *C*); $\frac{\partial f}{\partial A}\cdot\Delta_{SA}$, $\frac{\partial f}{\partial B}\cdot\Delta_{SB}$, $\frac{\partial f}{\partial C}\cdot\Delta_{SC}$ - частні невиключені систематичні похибки непрямого вимірювання.

5.4. Подальша обробка результату непрямого вимірювань зводиться (за необхідністю) до обчислення довірчої межі підсумкової похибки $\Delta(P)$ з урахуванням випадкової складової та НСП. Розраховується межа підсумкової похибки $\Delta(P)$ у такий же спосіб, як і при прямих вимірюваннях (дивись п. 1.2.5).

Приклад 4.

Потужність *W* визначена за результатами прямих вимірювань струму *I* і напруги *U*. Результати вимірювань та характеристики вимірювальних приладів наведені в таблиці.

U=70 В	0,2/0,25	$U_к$=100 В
I=2 А	$\gamma = \pm\, 0{,}5$ %	$I_к$=3 А

Необхідно:

1) Визначити результат непрямого вимірювання потужності *W*;

2) оцінити інструментальні похибки прямих вимірювань напруги *U* і струму *I* (відносну δ і абсолютну Δ);

3) оцінити довірчу межу (*P* = 0,95) похибки непрямого вимірювання потужності *W* (абсолютну і відносну), обумовлену інструментальними похибками прямих вимірювань;

4) оцінити внески похибок прямих вимірювань струму *I* і напруги *U* в похибку непрямого вимірювання потужності *W* (частні похибки непрямого вимірювання), порівняти їх і зробити висновок - яке пряме вимірювання (струму *I* або напруги *U*) має більший внесок в похибку непрямого вимірювання (висновок обов’язково підтвердити розрахунками);

5) надати рекомендації щодо способу підвищення точності результату непрямого вимірювання потужності *W*, визначивши чергу і спосіб підвищення точності.

Розв’язання прикладу.

1) Визначаємо потужність *W* (результат непрямого вимірювання):

$$W = U\cdot I = 70\text{В}\cdot 2\text{А} = 140\ \text{Вт}.$$

2) Визначаємо інструментальні похибки прямих вимірювань (відносну і абсолютну похибки вольтметру і амперметру):

- відносну похибку вольтметру визначаємо за позначенням його класу точності

$$\delta_V = \pm\left[0{,}2 + 0{,}25\left(\frac{U_к}{U} - 1\right)\right]\% = \pm\left[0{,}2 + 0{,}25\left(\frac{100B}{70B} - 1\right)\right]\% = \pm 0{,}307\%,$$

- абсолютну похибку вольтметру визначаємо за його відносною похибкою

$$\Delta_V = \frac{\delta_V\cdot U}{100\%} = \frac{\pm\, 0{,}307\%\cdot 70B}{100\%} = \pm 0{,}215\ \text{В},$$

- приведена похибка амперметру надана в завданні - $\gamma_A = \pm\, 0{,}5$ **%,**

- абсолютну похибку амперметру визначаємо за його приведеною похибкою

$$\Delta_A = \frac{\gamma_A \cdot I_к}{100\%} = \frac{\pm 0{,}5\% \cdot 3A}{100\%} = \pm 0{,}015 \text{ А},$$

- відносну похибку амперметру визначаємо за його абсолютною похибкою і результатом вимірювання

$$\delta_A = \frac{\Delta_A \cdot 100\%}{I} = \frac{\pm 0{,}015A \cdot 100\%}{2A} = \pm 0{,}75\% .$$

3) Довірчу межу ($P = 0{,}95$) абсолютної НСП результату непрямого вимірювання потужності W оцінюємо за формулою (5.3):

$$\Delta_{SW}(P = 0{,}95) = k(P = 0{,}95) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial U} \cdot \Delta_v\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial I} \cdot \Delta_A\right)^2} ,$$

$$\frac{\partial W}{\partial U} = \frac{\partial (U \cdot I)}{\partial U} = I = 2\text{А} , \qquad \frac{\partial W}{\partial I} = \frac{\partial (U \cdot I)}{\partial I} = U = 70\text{В} ,$$

$$\Delta_{SW}(P = 0{,}95) = 1{,}1 \cdot \sqrt{(2\text{А} \cdot 0{,}215\text{В})^2 + (70\text{В} \cdot 0{,}015\text{А})^2} =$$

$$= 1{,}1 \cdot \sqrt{(\pm 0{,}43\text{Вт})^2 + (\pm 1{,}05\text{Вт})^2} = \pm 1{,}248\text{Вт}.$$

Межу відносної НСП результату непрямого вимірювання потужності W визначаємо наступним чином:

$$\delta_{SW} = \frac{\Delta_{SW}}{W} \cdot 100\% = \pm \frac{1{,}248\text{Вт}}{140\text{В4}} \cdot 100\% = \pm 0{,}89\%.$$

Результат непрямого вимірювання потужності записуємо наступним чином:

$$W = (140{,}0 \pm 1{,}2)\text{Вт}.$$

4) Похибка, яку вносить у результат непрямого вимірювання потужності пряме вимірювання напруги вольтметром, складає

$$\Delta_u = \frac{\partial W}{\partial U} \cdot \Delta_v = \pm 0{,}43\text{Вт} ,$$

а похибка, яку вносить пряме вимірювання струму амперметром, дорівнює

$$\Delta_I = \frac{\partial W}{\partial I} \cdot \Delta_A = \pm 1{,}05\text{Вт} .$$

5) Отже, похибка, яку вносить у результат непрямого вимірювання потужності пряме вимірювання струму амперметром (Δ_I), більш ніж удвічі перевищує похибку, яку вносить у результат непрямого вимірювання потужності пряме вимірювання напруги вольтметром (Δ_u). Для підвищення точності результату непрямого вимірювання потужності потрібно, у першу чергу, зменшити у 2,5 рази похибку амперметру Δ_A; для цього слід застосувати більш точний амперметр (наприклад, класу точності 0,2). Для подальшого підвищення точності результату непрямого вимірювання потужності потрібно одночасно підвищувати клас точності і амперметру, і вольтметру.

<u>Приклад 5.</u>

Інструментальний підсилювач, що не інвертує, виконаний шляхом охоплення колом негативного зворотного зв'язку (НЗЗ) на резисторах R_1 та R_2 операційного підсилювача постійного струму (ОППС). Коефіцієнт передачі підсилювача за напругою визначено, як при непрямому вимірюванні, за результатами прямих багаторазових вимірювань опорів резисторів R_1 та R_2 [K_u =(($R_1 + R_2$) / R_1), застосований ОППС вважається ідеальним]. Результати вимірювань опорів резисторів R_1 та R_2 наведені у наступній таблиці:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_1, кОм	1,256	1,243	1,264	1,223	1,237	1,247	1,226	1,213	1,254	1,224	1,227	1,254
R_2, кОм	12,51	12,31	12,32	12,23	12,34	12,65	12,56	12,47	12,48	12,39	12,47	12,33

Необхідно:

1) визначити коефіцієнт передачі підсилювача K_u;

2) оцінити середню квадратичну похибку результату непрямого вимірювання коефіцієнту передачі підсилювача $\sigma_{\overline{K}}$, обумовлену випадковими похибками σ_1 і σ_2 прямих вимірювань опорів резисторів R_1 та R_2 кола НЗЗ; записати результат вимірювання у вигляді точкової оцінки;

3) оцінити внески похибок прямих вимірювань опорів резисторів R_1 та R_2 у похибку непрямого вимірювання коефіцієнту передачі підсилювача K_u (частні похибки непрямого вимірювання), порівняти їх і зробити висновок: яке пряме вимірювання (резистору R_1 або резистору R_2) дає більший внесок у похибку непрямого вимірювання (висновок підтвердити результатами розрахунків);

4) надати рекомендації щодо способу підвищення точності результату непрямого вимірювання коефіцієнту передачі підсилювача K_u, визначивши чергу і спосіб підвищення точності результатів прямих вимірювань.

Розв’язання прикладу.

1) Виконуємо попередню статистичну обробку результатів прямих багаторазових вимірювань з метою визначення опорів резисторів R_1 та R_2 (результатів прямих багаторазових вимірювань) та середніх квадратичних похибок (σ_1 і σ_2) опорів резисторів (СКВ результатів прямих багаторазових вимірювань опорів резисторів). Вважаємо, що результати спостережень прямих багаторазових вимірювань опорів резисторів R_1 та R_2 відповідають нормальному закону розподілу ймовірностей. Результати вимірювань оцінюємо за формулою (1.1):

$$R_1 = \overline{R}_1 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} R_{1i} = 1{,}239\text{кОм}, \qquad R_2 = \overline{R}_2 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} R_{2i} = 12{,}42\text{кОм},$$

а середні квадратичні похибки опорів резисторів – за формулою (1.3):

$$\sigma(\overline{R}_1) = \sqrt{\frac{1}{(12-1)\cdot 12}\sum_{i=1}^{12}\left(R_{1i} - \overline{R}_1\right)^2} = 0{,}47\cdot 10^{-2}\,кОм = \sigma_1,$$

$$(\sigma_{01} = \frac{\sigma_1}{R_1} = \frac{0{,}47\cdot 10^{-2}}{1{,}239} = 0{,}0038 = 0{,}38\%);$$

$$\sigma(\overline{R}_2) = \sqrt{\frac{1}{(12-1)\cdot 12}\sum_{i=1}^{12}\left(R_{2i} - \overline{R}_2\right)^2} = 3{,}5\cdot 10^{-2}\,кОм = \sigma_2,$$

$$(\sigma_{02} = \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{3{,}5 \cdot 10^{-2}}{12{,}42} = 0{,}0028 = 0{,}28\%).$$

2) Визначаємо коефіцієнт передачі підсилювача за напругою

$$K_u = \frac{\overline{R}_1 + \overline{R}_2}{\overline{R}_1} = \frac{(1{,}239 + 12{,}42)\text{кОм}}{1{,}239\text{кОм}} = 11{,}024(\text{од.}).$$

3) Оцінюємо середню квадратичну похибку результату непрямого вимірювання коефіцієнту передачі підсилювача, обумовлену випадковими похибками прямих вимірювань опорів резисторів кола НЗЗ, за формулою (5.2):

$$\sigma_{\overline{K}} = +\sqrt{\left(\frac{\partial K_u}{\partial \mathrm{R}_1} \cdot \sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial K_u}{\partial \mathrm{R}_2} \cdot \sigma_2\right)^2};$$

$$\frac{\partial K_u}{\partial R_1} = \frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) = -\frac{R_2}{R_1^2} = -\frac{12{,}42\text{кОм}}{(1{,}239\text{кОм})^2} = -8{,}09\frac{1}{\text{кОм}},$$

$$\frac{\partial K_u}{\partial R_2} = \frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{(1{,}239\text{кОм})} = 0{,}807\frac{1}{\text{кОм}},$$

$$\sigma_{\overline{K}} = \sqrt{(-8{,}09\frac{1}{\text{кОм}} \cdot 0{,}47 \cdot 10^{-2}\,\text{кОм})^2 + (0{,}807\frac{1}{\text{кОм}} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{кОм})^2} =$$

$$= \sqrt{(3{,}8 \cdot 10^{-2})^2 + (2{,}82 \cdot 10^{-2})^2} = 0{,}047(\text{од.});$$

$$(\sigma_{0K} = \frac{\sigma_{\overline{K}}}{K_u} = \frac{0{,}047}{11{,}024} = 0{,}0043 = 0{,}4{,}3\%).$$

Записуємо результат непрямого вимірювання у вигляді точкової оцінки (дивись (1.4) у п. 1.2.3), застосовуючи правила округлення похибки та результату вимірювання:

$$\hat{Q} = K = 11{,}02; \quad \sigma_{\overline{K}} = 0{,}05; \quad n = 24\ .$$

4) Частні похибки непрямого вимірювання, що обумовлені випадковими похибками прямих вимірювань, складають:

$$\sigma_{\overline{K}}\Big|_{R_1} = \frac{\partial K_u}{\partial R_1} \cdot \sigma_1 = 0{,}038(\text{од.}),$$

$$\sigma_{\overline{K}}\Big|_{R_2} = \frac{\partial K_u}{\partial R_2} \cdot \sigma_2 = 0{,}0282(\text{од.});$$

$$\frac{\sigma_K\big|_{R_1}}{\sigma_K\big|_{R_2}} = \frac{0{,}038}{0{,}0282} = 1{,}35.$$

Отже, випадкова похибка, яку вносить у результат непрямого вимірювання K_u пряме вимірювання опору резистору R_1, у 1,35 рази перевищує похибку, яку вносить у результат непрямого вимірювання K_u пряме вимірювання опору резистору R_2.

5) Для підвищення точності результату непрямого вимірювання K_u потрібно, у першу чергу, зменшити у 1,35 рази середню квадратичну похибку $\sigma(\overline{R}_1)$; для цього потрібно підви-

щити приблизно у 2 рази (1,35×1,35=1,82) кількість спостережень у прямому вимірюванні опору R_1. Для подальшого зменшення випадкової похибки результату вимірювання K_u потрібно одночасно підвищувати кількість спостережень у прямих вимірюваннях опорів обох резисторів кола НЗЗ.

6. ЗАВДАННЯ НА РОБОТУ

Завдання 1.

При багаторазовому вимірюванні однієї і тієї ж незмінної ФВ постійного розміру отримано три серії результатів спостережень по 13 результатів в кожній (систематичні похибки в результатах спостережень виключені; в кожній серії всі результати рівної точності; серії між собою – нерівноточні). Необхідно:

1) перевірити наявність грубих похибок в результатах кожної серії спостережень (P = 0.95); при виявлені результатів , що містять грубі похибки, виключити їх з подальшого використання;

2) оцінити результат (середнє зважене) нерівноточного вимірювання (ваги серій визначати із застосуванням середнього квадратичного відхилення (СКВ) результатів спостережень в серіях без грубих похибок);

3) оцінити СКВ середнього зваженого (СКВ випадкової похибки результату нерівноточного вимірювання); порівняти СКВ середнього зваженого і СКВ середнього значення кожної серії (СКВ випадкової похибки результату багаторазового рівноточного вимірювання в серії); зробити висновок про доцільність обробки нерівноточного вимірювання;

4) записати кінцевий результат нерівноточного вимірювання (дотримуючись правил округлення похибки і результату вимірювання) використовуючи:

а) точкову оцінку - $\overline{\overline{X}} = \ldots,\ \sigma\left(\overline{\overline{X}}\right) = \ldots,\ n = \ldots$;

б) інтервальну оцінку - $\left[\overline{\overline{X}} \pm \dot{\varepsilon}_P\right],\ \dot{\varepsilon}_P = t_p \cdot \sigma\left(\overline{\overline{X}}\right),\ P = 0{,}95,\ \ n = \ldots,\ \left(t_p = \ldots\right)$.

Вказівка: три серії вимірювань відповідного варіанту роботи вибрати з рядків і стовпців табл. 1 по двох останніх цифрах (m - передостання цифра, n – остання) номера студентського квитка або залікової книжки; наприклад, номеру ХХ-Х435 відповідають всі числові значення, що наведені в рядку 3 (перша серія) і стовпці 5 (друга серія) табл. 1; третю серію вибирати в наступному стовпці, якщо n $\neq$ 0, і в попередньому - якщо n = 0.

Завдання 2

За допомогою електронного вольтметру відомого класу точності на діапазоні (0,2...2) В виконано багаторазове вимірювання е.р.с. джерела опорної напруги E_0. Шляхом подальшої статистичної обробки результатів спостережень (грубі похибки з результатів спостережень виключені) потрібно:

1) оцінити результат багаторазового вимірювання ($\overline{U}$) і визначити поправку, яку слід внести в результати отриманих спостережень – Π_u;

2) оцінити середнє квадратичне відхилення (СКВ) випадкового розсіювання результатів спостережень – σ_U ;

3) оцінити СКВ результату багаторазового вимірювання (середнього значення результатів спостережень) - $\sigma(\overline{U})$;

4) оцінити інструментальну складову похибки вимірювання (абсолютну), обумовлену класом точності застосованого вольтметру – Δ_{pv} ;

5) записати позначення класу точності вольтметру;

6) оцінити довірчу межу невиключеної систематичної похибки (абсолютної) результату вимірювання (НСП) - Δ_{su} ;

7) оцінити підсумкову похибку результату багаторазового вимірювання $\Delta(P)$ з урахуванням обох складових – випадкової та НСП. Записати результат багаторазового вимірювання у вигляді інтервальної оцінки.

Вказівки. У варіанті роботи:

1) використати у якості результатів спостережень багаторазового вимірювання результати двох любих серій завдання 1, що отримані після виключення грубих похибок;

2) прийняти значення е.р.с. джерела опорної напруги E_0 = 1,200 В, якщо остання цифра номера студентського квитка або залікової книжки непарна, і E_0 = 1,300 В - якщо парна або 0;

3) визначати межу відносної похибки вольтметру, що припускається, за формулою:

а) $\delta_{pv} = \pm\left[a + b\cdot\frac{U_k}{U}\right],\%$	- якщо передостання цифра номера студентського квитка або залікової книжки непарна,
б) $\delta_{pv} = \pm\left[c + d\cdot\left(\frac{U_k}{U} - 1\right)\right],\%$	- якщо передостання цифра номера студентського квитка або залікової книжки парна або 0;

Коефіцієнти «a» і «b» формули (а) обирати в таблицях 2 і 3 відповідно номеру завдання по двох останніх цифрах (m - передостання цифра, n – остання) номера студентського квитка або залікової книжки; c = $a + b$, $d = b$.

Завдання 3

Цифровим вольтметром класу точності «c/d» виміряне падіння напруги на резисторі R, що включений в електричне коло змінного гармонійного струму; вольтметр показав діюче значення напруги U на диапазоні вимірювання U_K. Значення опору резистора R зміряне омметром, що має відносну похибку δ_R. Необхідно:

1) визначити потужність W, розсіювану резистором R в електричному колі;

2) оцінити інструментальні похибки прямих вимірювань опору резистора R і напруги U (абсолютну Δ і відносну δ), що припускаються;

3) оцінити довірчу межу (P = 0,95) похибки непрямого вимірювання потужності W (абсолютну і відносну), обумовлену інструментальними похибками прямих вимірювань опору резистора R і напруги U;

4) оцінити внески похибок прямих вимірюваньопору резистора R і напруги U в похибку непрямого вимірювання потужності W (частні похибки непрямого вимірювання), порівняти їх і зробити висновок - яке пряме вимірювання (опору R або напруги U) дає більший внесок в похибку непрямого вимірювання (висновок обовязково підтверджувати результатами розрахунків);

5) надати рекомендації щодо способу підвищення точності результату непрямого вимірювання потужності W, визначивши чергу і спосіб підвищення точності результатів прямих вимірювань опору R і напруги U.

Вказівки:

1) у попередньому аналізі завдання встановити:

- яку складову підсумкової похибки вимірювання (за характером прояви) слід визначати у завданні,

- у який спосіб прийнято зменшувати ці складові похибки;

2) встановити на підставі виду функції W=f(U,R) і висновків попереднього пункту вказівок формулу, що встановлює зв'язок між похибками результатів прямих вимірювань опору R і напруги U і похибкою непрямого вимірювання потужності W;

3) початкові дані варіанту завдання роботи вибрати з таблиць 2 і 3 по двох останніх цифрах номера студентського квитка (залікової книжки).

Завдання 4

Інвертуючий інструментальний підсилювач виконаний шляхом охоплення операційного підсилювача постійного струму (ОППС) колом негативного зворотного зв'язку (НЗЗ) на резисторах R_1 та R_2. Коефіцієнт передачі підсилювачу з напруги визначено, як при непрямому вимірюванні, за результатами прямих багаторазових вимірювань опорів резисторів R_1=1 кОм та R_2 (застосований ОППС вважається ідеальним). Шляхом попередньої статистичної обробки результатів спостережень визначено відносні середні квадратичні похибки (С.К.В. середніх арифметичних значень) опорів резисторів R_1 та R_2 ($\sigma_{01} = \sigma_1 / R_1$, $\sigma_{02} = \sigma_2 / R_2$). Необхідно:

1) розрахувати потрібне значення опору резистора R_2 відповідно до наданого нижче в таблиці значення коефіцієнту передачі підсилювача K_u з напруги (K_u = - R2/R1);

2) розрахувати середню квадратичну похибку непрямого визначення коефіцієнту передачі підсилювача $\sigma_{\overline{K}}$, обумовлену випадковими похибками σ_1 і σ_2 прямих вимірювань опорів резисторів R_1 та R_2 кола НЗЗ;

3) оцінити внески похибок прямих вимірювань опорів резисторів R_1 та R_2 у випадкову похибку непрямого визначення коефіцієнту передачі підсилювача K_u (частні похибки непрямого вимірювання), порівняти їх і зробити висновок: яке пряме вимірювання (резистору R_1 або резистору R_2) дає більший внесок у похибку непрямого вимірювання (висновок підтвердити результатами розрахунків);

4) надати рекомендації щодо способу підвищення точності результату непрямого визначення коефіциенту передачі підсилювача K_u , визначивши чергу і спосіб підвищення точності результатів прямих вимірювань.

Вказівки:

1) у попередньому аналізі завдання встановити: а) яку складову підсумкової похибки непрямого вимірювання (за характером прояви) слід визначати у завданні, б) у який спосіб прийнято зменшувати цю складову підсумкової похибки;

2) встановити на підставі виду функції $K_u = f(R_1, R_2)$ і висновків попереднього пункту вказівок формулу, що встановлює зв'язок між похибками результатів прямих вимірювань опору резисторів R_1 та R_2 і похибкою непрямого визначення коефіцієнту передачі підсилювача K_u;

3) початкові дані варіанту завдання роботи вибрати з таблиць 2 і 3 по двох останніх цифрах номера студентського квитка (залікової книжки).

Таблиця 1 (до завдання 1)

m	**остання цифра - n**											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**			
1	1.251	1.232	1.233	1.244	1.235	1.236	1.247	1.248	1.247	1.219	1.228	1.357	1.251
2	1.231	1.254	1.229	1.244	1.239	1.257	1.221	1.224	1.219	1.221	1.329	1.248	1.242
3	1.232	1.223	1.228	1.263	1.238	1.248	1.232	1.213	1.208	1.212	1.238	1.347	1.303
4	1.223	1.252	1.267	1.262	1.237	1.239	1.253	1.232	1.217	1.202	1.327	1.266	1.214
5	1.234	1.241	1.256	1.221	1.246	1.238	1.264	1.251	1.246	1.232	1.216	1.345	1.265
6	1.265	1.262	1.255	1.232	1.245	1.258	1.245	1.202	1.255	1.253	1.355	1.244	1.266
7	1.256	1.243	1.264	1.223	1.234	1.247	1.226	1.213	1.254	1.244	1.254	1.322	1.227
8	1.247	1.254	1.273	1.234	1.223	1.246	1.247	1.234	1.243	1.255	1.323	1.233	1.248
9	1.248	1.265	1.242	1.245	1.212	1.255	1.268	1.225	1.232	1.246	1.222	1.331	1.239
0	1.239	1.206	1.231	1.226	1.211	1.234	1.279	1.236	1.251	1.325	1.331	1.209	1.213
	1.247	1.327	1.273	1.327	1.230	1.333	1.248	1.337	1.232	1.243			
	1.335	1.248	1.354	1.248	1.359	1.242	1.356	1.248	1.323	1.362			
	1.233	1.209	1.265	1.209	1.308	1.241	1.285	1.219	1.304	1.241			

Таблиця 2

m	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**№ завдання**
***a*, %**	0,01	0,02	0,025	0,04	0,05	0,04	0,05	0,025	0,02	0,01	2
R, Ом	1000	283	500	425	725	820	600	375	930	300	3
δ_R, %	0,5	1,5	2,5	4	2	2,5	2	0,5	4	1.5	
***c*, %**	0,2	0,1	0,6	0,25	0,05	0,15	0,05	0,25	0,5	0,6	
***d*, %**	0,1	0,05	0,25	0,1	0,02	0,05	0,2	0,1	0,2	0,5	
K_u	100	200	10	250	20	150	100	25	150	20	4

Таблиця 3

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	№ завдання
b	0,01	0,02	0,025	0,04	0,05	0,04	0,05	0,025	0,02	0,01	2
$U_к$, В	10	100	10	100	100	10	1	100	10	10	3
U, В	9,13	75.6	5,7	85,9	79,2	7,75	0,42	62,5	8,2	8,8	
σ_{01}, %	2	1,5	1	0,5	5	1	2	1,5	0,5	1	4
σ_{02}, %	1	2	1,5	1	0,5	1,5	1	2	1	2,5	

Додаток 1

Граничні значення ν_p для перевірки грубої похибки

n	ν_p при *P*, рівній				n	ν_p при *P*, рівній			
	0,9	**0,95**	**0,98**	**0,99**		**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**
3	1,41	1,41	1,41	1,41	**13**	2,26	2,43	2,56	2,71
4	1,64	1,69	1,71	1,72	**14**	2,30	2,46	2,60	2,76
5	1,73	1,78	1,92	1,96	**15**	2,33	2,49	2,64	2,81
6	1,89	2,00	2,07	2,13	**20**	2,49	2,64	2,80	2,90
7	1,97	2,09	2,18	2,65	**25**	2,62	2,78	2,96	3,08
8	2,04	2,17	2,27	2,37	**30**	2,72	2,88	3,07	3,20
9	2,10	2,24	2,35	2,46	**35**	2,79	2,96	3,16	3,29
10	2,15	2,29	2,41	2,54	**40**	2,85	3,00	3,22	3,36
11	2,19	2,38	2,47	2,61	**45**	2,90	3,08	3,28	3,42
12	2,23	2,39	2,52	2,66	**50**	2,99	3,16	3,37	3,52

Додаток 2

Коефіцієнти t розподілу Стьюдента

P	Число ступенів волі $f = n - 1$								
	3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**10**	**12**	**18**
0,90	2,35	2,13	2,01	1,94	1,90	1,86	1,81	1,78	1,73
0,95	3,18	2,78	2,57	2,45	2,38	2,31	2,23	2,18	2,10
0,99	5,84	4,6	4,03	3,71	3,50	3,36	3,17	3,06	2,88

P	Число ступенів волі $f = n - 1$					
	22	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
0,90	1,72	1,70	1,68	1,67	1,66	1,64
0,95	2,07	2,04	2,02	2,00	1,98	1,96
0,99	2,82	2,75	2,70	2,66	2,62	2,58

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Підвищення точності вимірювальних систем: Навчальний посібник для вищих навчальних закладів/ В.І. Бойко, А.А. Зорі, В.Д. Коренєв, М.Г. Хламов; під ред. Зорі А.А.- Донецьк: РВА ДонНТУ, 2005. – 252 с.

2. Основы метрологии и электрические измерения: Учебник для ВУЗов / Б.Я. Авдеев, Е.М. Антонюк, Е.М. Душин. Под ред. Е.М. Душина – Л.: Энергоатомиздат, Ленинградское отделение, 1987г, 480 с.

ЗМІСТ