УДК 531.38

Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.
Донецкий национальный технический университет.

Частное решение уравнения Абеля для случая, когда одно из тел закреплено в центре масс.

Задача о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных идеальным сферическим шарниром, сведена сначала к системе семи дифференциальных уравнений первого порядка [1]. Использование четырех интегралов и автономности системы позволило свести задачу к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка [2]. Во второй части монографии [3] приведены различные формы уравнений движения, точные решения и для некоторых решений записаны уравнения аксоидов тел. В работе [4] предложена новая форма уравнений движения, для вспомогательной переменной получено уравнение Абеля второго рода. В этой же работе на инвариантном соотношении, которое позволило проинтегрировать уравнение Абеля, получено решение задачи большой общности.

В этой работе полученное ранее решение исследовано при единственном ограничении – одно из тел системы закреплено в центре масс.

В работе [4] для уравнения Абеля

$$\eta\eta' = F_1(\theta,\omega_2)\eta + F_0(\theta,\omega_2),$$

где

$$F_1(\theta,\omega_2) = [2\omega_2\sin\theta - 2(A_0k + Nk_0)\cos\theta + Ak_0 - Nk_0\cos\theta]\sin\theta,$$

$$F_0(\theta,\omega_2) = (\omega_2' - Nk_0)[-\omega_2\sin\theta + (A_0k + Nk_0)\cos\theta - (Ak_0 + Nk)]\sin^3\theta,$$

на инвариантном соотношении

$$\omega_2\sin\theta = (A_0k + Nk_0)\cos\theta + (Nk_0\cos\theta - Ak_0)/2 \qquad (1)$$

получено решение этого уравнения в виде

$$\begin{aligned}\eta^2(u) = {} & N^2k_0^2u^4/4 + Nk_0(3Ak_0 + 4Nk)u^3/6 + \\ & + [(\mathrm{A}^2 - 5N^2)k_0 + 2(A - A_0)Nk]k_0u^2/4 - \\ & - (Ak_0 + 2Nk)(2A_0k + 5Nk_0)u/2 + \eta_0^2 \equiv P_4(u),\end{aligned}$$

в котором

$$u = \cos\theta . \tag{2}$$

Найдем решение задачи для случая, когда одно из тел системы закреплено в центре масс

$$N = 0 . \tag{3}$$

При этом ограничении зависимость $\eta^2(u)$ становится такой

$$\eta^2(u) = A^2 k_0^2 u^2 / 4 - A A_0 k k_0 u + \eta_0^2 .$$

Представим $\eta^2(u)$ в виде

$$\eta^2(u) = \left(A k_0 u/2 - A_0 k\right)^2 + \eta_0^2 - A_0^2 k^2 . \tag{4}$$

Вариант $\eta_0^2 - A_0^2 k^2 = 0$ уже отмечен в работе [3].

Из двух вариантов

$$\begin{aligned} &\eta_0^2 - A_0^2 k^2 > 0 , \\ &\eta_0^2 - A_0^2 k^2 < 0 \end{aligned} \tag{5}$$

рассмотрим вначале первый.

Обозначив

$$\eta_0^2 - A_0^2 k^2 = \tilde{\eta}^2 ,$$

введем вместо u новую переменную ψ

$$A k_0 u/2 - A_0 k = \tilde{\eta}_0 \operatorname{ctg} 2\psi , \tag{6}$$

тогда из (4) находим

$$\eta(\psi) = \tilde{\eta}_0 / \sin 2\psi . \tag{7}$$

Предполагая k_0 отличным от нуля, из (2), (6) определим

$$u = \cos\theta = 2\left(\tilde{\eta}_0 \operatorname{ctg} 2\psi + A_0 k\right) / A k_0 . \tag{8}$$

Подставив (8) в (1), получим зависимость ω_2 от ψ

$$\omega_2(\psi) = \frac{4 A_0^2 k^2 - A^2 k_0^2 + 4 A_0 k \tilde{\eta}_0 \operatorname{ctg} 2\psi}{2\sqrt{A^2 k_0^2 - 4\left(A_0 k + \tilde{\eta}_0 \operatorname{ctg} 2\psi\right)^2}} . \tag{9}$$

Переменные Ω_2 и η связаны между собой соотношением [4]

$$\Omega_2 \sin\theta = \eta + [\omega_2 \cos\theta + (A_0 k + N k_0) \sin\theta] \sin\theta$$

и при ограничении (3) имеем

$$\Omega_2 \sin\theta = \eta + (\omega_2 \cos\theta + A_0 k \sin\theta) \sin\theta.$$

Внесем (7)–(9) в это выражение и определим зависимость Ω_2 от ψ

$$\Omega_2(\psi) = \frac{\tilde{\eta}_0 A k_0 \operatorname{tg}\psi}{\sqrt{A^2 k_0^2 - 4\left(A_0 k + \tilde{\eta}_0 \operatorname{ctg} 2\psi\right)^2}}. \qquad (10)$$

Отметим, что ω_3, Ω_3 связаны с ω_2, Ω_2 соотношениями[1] [3, (5.55)*]

$$\omega_3 \sin\theta = \Omega_2 - \omega_2 \cos\theta, \qquad (11)$$

$$\Omega_3 \sin\theta = \Omega_2 \cos\theta - \omega_2, \qquad (12)$$

а вместо Ω_1, ω_1 введены [3, (5.57)*] переменные ξ, κ

$$\Omega_1 = (\xi - 1)\kappa, \quad \omega_1 = (\xi + 1)\kappa. \qquad (13)$$

Для переменной ξ получено такое выражение в [4]

$$\xi = \frac{-2\omega_2' + N k_0 - A_0 k + \omega_3}{A_0 k + N k_0 - \omega_3},$$

которое при ограничении (3) и значениях (11), (9), (10) принимает вид

$$\xi(\psi) = -1 + 2\cos 2\psi.$$

Представим (13) с учетом полученного соотношения

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\kappa \cos 2\psi, \\ \Omega_1 &= 2\kappa\,(\cos 2\psi - 1), \end{aligned} \qquad (14)$$

$$\dot{\theta} = -2\kappa. \qquad (15)$$

---

[1] При ссылке на формулы монографии [3] будем снабжать их звездочкой внизу.

Для определения переменной κ воспользуемся интегралом [3, (5.13)*] и соотношениями [3, (5.14)*], (15)

$$G_1^2+G_2^2+G_3^2=g^2, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &G_1=(A-N\cos\theta)\omega_1+(A_0-N\cos\theta)\Omega_1, \\ &G_2=(A-N\cos\theta)\omega_2+(A_0\cos\theta-N)\Omega_2-n_0\sin\theta, \\ &G_3=(A_0\Omega_2-N\omega_2)\sin\theta+n+n_0\cos\theta. \end{aligned} \tag{17}$$

При условии (3) циклические постоянные имеют вид

$$n=AA_0k, \quad n=AA_0k_0 \tag{18}$$

и компоненты (17) момента количества движения системы таковы

$$\begin{gathered} G_1=A\omega_1+A_0\Omega_1, \quad G_2=A\omega_2+A_0\Omega_2\cos\theta-AA_0k_0\sin\theta, \\ G_3=A_0\Omega_2\sin\theta+AA_0(k+k_0\cos\theta). \end{gathered} \tag{19}$$

Внесем в (19) соотношения (14), (9), (10) и получим

$$\begin{aligned} &G_1=2[-A_0+(A+A_0)\cos 2\psi]\kappa, \\ &G_2\sin\theta=-(A+2A_0)Ak_0/2+ \\ &+2A_0(A_0k+\tilde{\eta}_0\operatorname{ctg}2\psi)[(A+2A_0)k+\tilde{\eta}_0\operatorname{ctg}\psi]/Ak_0, \\ &G_3=A_0[(A+2A_0)k+\tilde{\eta}_0\operatorname{ctg}\psi]. \end{aligned}$$

Подставив найденные значения для G_i в интеграл (16), находим

$$\begin{aligned} &4\kappa^2[-A_0+(A+A_0)\cos 2\psi]^2\sin^2\theta=g^2\sin^2\theta- \\ &-\left[(A+2A_0)^2A^2k_0^2/4-(A+2A_0)^2A_0^2k^2+(A+2A_0)A_0\tilde{\eta}_0^2\right]+ \\ &+(A+2A_0)^2A_0k\tilde{\eta}_0\operatorname{ctg}\psi+(A+A_0)A_0\tilde{\eta}_0^2\operatorname{ctg}^2\psi- \\ &-(A+2A_0)^2A_0k\tilde{\eta}_0\operatorname{tg}\psi. \end{aligned} \tag{20}$$

Введем переменную z вместо ψ

$$z=\operatorname{ctg}\psi \tag{21}$$

и представим (20) с учетом (15), (8), (21)

$$\left[-A_0+\frac{(A-A_0)(z^2-1)}{z^2+1}\right]\frac{\tilde{\eta}_0(1+z^2)\dot{z}}{Ak_0z^2}=\sqrt{P(z)}\,, \qquad (22)$$

где

$$P(z)=g^2\left\{1-\frac{1}{z^2}\left[\frac{2A_0k}{Ak_0}z+\frac{\tilde{\eta}_0}{Ak_0}(z^2-1)\right]^2\right\}+$$
$$+\left[(A+2A_0)^2A_0^2k^2-(A+2A_0)A_0\tilde{\eta}_0^2-(A+2A_0)^2A^2k_0^2/4\right]+ \qquad (23)$$
$$+(A+2A_0)^2A_0k\tilde{\eta}_0z+(A+A_0)A_0\tilde{\eta}_0^2z^2-(A+2A_0)^2A_0k\tilde{\eta}_0/z\,.$$

Так как случай $N=0,\ k_0=0$ уже изучен [4], то будем рассматривать

$$k_0\neq 0\,.$$

Введем безразмерные параметры $\eta_*,\ k_*,\ b_*,\ g_*$

$$\tilde{\eta}_0=Ak_0\eta_*,\quad Ak_0=Ak_0k_*,\quad A_0=Ab_*,\quad g^2=A^4k_0^2g_*^2 \qquad (24)$$

и представим функцию (23) в виде

$$P(z)=A^4k_0^2P_4(z)/z^2\,, \qquad (25)$$

где

$$P_4(z)=M_4z^4+M_3z^3+M_2z^2+M_1z+M_0\,,$$

$$\begin{aligned}
&M_4=\eta_*^2\left[(1+b_*)b_*-g_*^2\right],\\
&M_3=\eta_*k_*\left[(1+2b_*)^2-4g_*^2\right],\\
&M_2=g_*^2(1-4k_*^2+2\eta_*^2)+(1+2b_*)^2k_*^2-(1+2b_*)b_*\eta_*^2-(1+2b_*)^2/4,\\
&M_1=-M_3\,,\quad M_0=-g_*^2\eta_*^2\,.
\end{aligned} \qquad (26)$$

Вместо параметра g_*^2 введем σ^2

$$g_*^2=b_*^2+b_*+(1+\sigma^2)/4\,,$$

и, подставив это значение в коэффициенты (26), получим

$$\begin{aligned}
&M_4=-(1+\sigma^2)\eta_*^2/4\,,\\
&M_3=-\sigma^2k_*\eta_*=-M_1\,,\\
&M_2=\sigma^2(1-4k_*^2+2\eta_*^2)/4+(1+2b_*)\eta_*^2/2\,,\\
&M_0=-\left[(1+2\mathrm{b}_*)^2+\sigma^2\right]\eta_*^2/4.
\end{aligned}$$

Многочлен $P_4(z)$ теперь можно представить в виде

$$P_4(z)=\sigma^2\left\{z^2-\left[\eta_*(z^2-1)+2k_*z\right]^2\right\}/4-\eta_*^2\left[z^2-(1+2b_*)\right]^2/4. \qquad (27)$$

Так как при $\sigma^2=0$ $P_4(z)<0$ (а, следовательно, и $P(z)<0$) то, как следует из (22), движения тел существуют лишь при выполнении условия

$$4g_*^2>(1+2b_*)^2. \qquad (28)$$

Область возможных движений определяется условием

$$P_4(z)\geq 0.$$

Преобразуем уравнение $P_4(z)=0$ к виду

$$\sigma^2\left[\eta_*z^2+(2k_*+1)z-\eta_*\right]\left[-\eta_*z^2-(2k_*-1)z+\eta_*\right]=\eta_*^2(z^2-1-2b_*)^2.$$

Так как дискриминанты $D_1=(2k_*+1)^2+4\eta_*^2$ и $D_2=(2k_*-1)^2+4\eta_*^2$ не отрицательны, то уравнение

$$\left[\eta_*z^2+(2k_*+1)z-\eta_*\right]\left[-\eta_*z^2-(2k_*-1)z+\eta_*\right]=0$$

имеет четыре действительных корня: $-\infty<z_4<-1<z_3<z_2<1<z_1<\infty$.

Уравнение

$$(z^2-1-2b_*)^2=0$$

имеет по два кратных корня, причем

$$z_1^*=\sqrt{1+2b_*}>1.$$

Для существования движений достаточно выполнения условия

$$\sqrt{1+2b_*}<z_1,$$

где

$$z_1=\max\left\{\frac{-(2k_*+1)+\sqrt{D_1}}{2\eta_*},\ \frac{-(2k_*-1)+\sqrt{D_2}}{2\eta_*}\right\}.$$

Зависимость t от z определим квадратурой из (22), с учетом (25), (24) в виде

$$Ak_0(t-t_0)=\eta_*\int\frac{z^2-1-2b_*}{z\sqrt{P_4(z)}}\,dz\,. \tag{29}$$

Естественно в дальнейшем вспомогательной переменной считать z, зависимость которой от времени получим обращением эллиптического интеграла (29).

Определим зависимость основных переменных задачи ω_1, ω_2, ω_3, Ω_1, Ω_2, Ω_3 от z. Для этого подставим (21) в (14), (9)–(12) и учтем обозначения (24)

$$\omega_1(z)=2\frac{z^2-1}{z^2+1}\kappa(z),\quad \Omega_1(z)=\frac{-4\,\kappa(z)}{z^2+1}, \tag{30}$$

$$\kappa(z)=\frac{Ak_0(z^2+1)\sqrt{P_4(z)}}{2z\,(z^2-1-2b_*)}, \tag{31}$$

$$\omega_2(z)=\frac{Ak_0\left[2k_*\eta_*(z^2-1)+(4k_*^2-1)\,z\right]}{2\sqrt{z^2-\left[\eta_*(z^2-1)+2k_*z\right]^2}}, \tag{32}$$

$$\Omega_2(z)=\frac{\eta_*Ak_0}{\sqrt{z^2-\left[\eta_*(z^2-1)+2k_*z\right]^2}}, \tag{33}$$

$$\omega_3(z)=Ak_0k_*+\frac{Ak_0\eta_*(z^2+1)\,z}{2\left(z^2-\left[\eta_*(z^2-1)+2k_*z\right]^2\right)}, \tag{34}$$

$$\Omega_3(z)=\frac{Ak_0}{2}\;\frac{6k_*\eta_*z^3-(2\eta_*^2+1-4k_*^2)\,z^2-2k_*\eta_*z+2\eta_*^2}{\eta_*^2(z^2-1)^2+4k_*\eta_*z\,(z^2-1)-(1-4k_*^2)\,z^2}, \tag{35}$$

где $P_4(z)$ определено соотношением (27).

Соотношениями (30)–(35) определены компоненты угловых скоростей ω, Ω полуподвижных базисов $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$.

Компоненты угловых скоростей ω_*, Ω_* тел S и S_0 связаны с ω_i, Ω_i $(i=1,2,3)$ так [3, (5.32)*, (5.37)*]

$$\omega_1^* = \omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi, \quad \omega_2^* = -\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi, \quad \omega_3^* = (\omega_3 + \dot{\varphi})/J,$$
$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cos\Phi + \Omega_2 \sin\Phi, \qquad \Omega_2^* = -\Omega_1 \sin\Phi + \Omega_2 \cos\Phi,$$
$$\Omega_3^* = (\Omega_3 + \dot{\Phi})/J_0,$$

Для определения φ, Φ используем циклические интегралы [3, (5.11)$_*$]

$$\omega_3 + \dot{\varphi} = n/J, \tag{36}$$

$$\Omega_3 + \dot{\Phi} = n_0/J_0. \tag{37}$$

Постоянные n и n_0 с учетом (18), (24) запишем в виде

$$n/J = AA_0 k/J = A^2 k_0 k_*/J, \tag{38}$$

$$n_0/J_0 = AA_0 k/J_0 = A^2 b_* k_0/J_0. \tag{39}$$

Подставив (38), (39), (34), (35) в (36), (37) получим уравнения для определения скоростей собственных вращений тел

$$\dot{\varphi}(z) = A^2 k_0 k_*/J - Ak_0 k_* - \frac{Ak_0 \eta_* z\,(z^2+1)}{2\left[z^2 - [\eta_*(z^2-1) + 2k_* z]^2\right]},$$

$$\dot{\Phi}(z) = n_0/J_0 - \frac{Ak_0}{2}\ \frac{6k_*\eta_* z^3 - (2\eta_*^2 + 1 - 4k_*^2)z^2 - 2k_*\eta_* z + 2\eta_*^2}{\eta_*^2 (z^2-1)^2 + 4k_*\eta_* z(z^2-1) - (1-4k_*^2)z^2},$$

из которых с учетом (29) находим углы φ, Φ в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\frac{A}{J} - 1\right) Ak_0 k_* t - \frac{\eta_*^2}{2} \int \frac{(z^2+1)(z^2-1-2b_*)}{\sqrt{P_4(z)}\left\{z^2 - [\eta_*(z^2-1) + 2k_* z]^2\right\}} dz, \tag{40}$$

$$\Phi = \Phi_0 + n_0 t/J_0 - \tag{41}$$
$$- \frac{\eta_*}{2} \int \frac{[6k_*\eta_* z^3 - (2\eta_*^2 + 1 - 4k_*^2)\, z^2 - 2k_*\eta_* z + 2\eta_*^2]\,(z^2-1-2b_*)}{z\left[\eta_*^2 (z^2-1)^2 + 4k_*\eta_* z\,(z^2-1) - (1-4k_*^2)\, z^2\right]\sqrt{\mathrm{P}_4(z)}}\, dz.$$

Для завершения построения решения необходимо найти потенциальную энергию упругого элемента $\Pi(\theta)$. Для этого воспользуемся интегралом энергии системы тел [3, (5.14)$_*$]

$$A\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)+A_0\left(\Omega_1^2+\Omega_2^2\right)-2N\left(\omega_1\Omega_1\cos\theta+\omega_2\Omega_2\right)+2\Pi(\theta)=2h,$$

который с учетом условия (3) принимает вид

$$A\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)+A_0\left(\Omega_1^2+\Omega_2^2\right)+2\Pi(\theta)=2h. \tag{42}$$

Подставляем (30)–(33) в (42) и определяем

$$2h-2\Pi(\theta)=A^3k_0^2\left\{\frac{\left[\left(z^2-1\right)^2+4b_*\right]P_4(z)}{z^2\left(z^2-1-2b_*\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{4b_*\eta_*^2+\left[2k_*\eta_*\left(z^2-1\right)+\left(4k_*^2-1\right)z\right]^2}{4\left\{z^2-\left[\eta_*\left(z^2-1\right)+2k_*z\right]^2\right\}}\right\}. \tag{43}$$

Отметим, что потенциальная энергия представляет собой рациональную функцию переменной z.

Выделим частный случай

$$k_0\neq 0,\quad k=0,$$

тогда вследствие замены (24) имеем

$$k_*=0.$$

Условие (44) упростит зависимости (32)–(35), (40), (41), (43), которые теперь принимают вид

$$\omega_2(z)=\frac{-Ak_0z}{2\sqrt{z^2-\eta_*^2\left(z^2-1\right)^2}},$$

$$\Omega_2(z)=\frac{Ak_0\eta_*}{\sqrt{z^2-\eta_*^2\left(z^2-1\right)^2}}.$$

$$\omega_3(z)=\frac{Ak_0\eta_*\left(z^2+1\right)z}{2\left[z^2-\eta_*^2\left(z^2-1\right)^2\right]},$$

$$\Omega_3(z)=-\frac{Ak_0}{2}\,\frac{\left[\left(2\eta_*^2+1\right)z^2-2\eta_*^2\right]}{\eta_*^2\left(z^2-1\right)^2-z^2},$$

$$4P_2\left(z^2\right)=\sigma^2\left[z^2-\eta_*^2\left(z^2-1\right)^2\right]-\eta_*^2\left[z^2-1-2b_*\right]^2, \tag{45}$$

$$\Phi(z)=\Phi_0+\frac{n_0}{J_0}t(z)+\frac{\eta_*}{2}\int\frac{\left[(2\eta_*^2+1)z^2-2\eta_*^2\right](z^2-1-2b_*)}{z\left[(z^2-1)^2\eta_*^2-z^2\right]\sqrt{P_2(z^2)}}dz, \qquad (46)$$

$$\varphi(z)=\varphi_0-\frac{\eta_*^2}{2}\int\frac{(z^2+1)(z^2-1-2b_*)}{\sqrt{P_2(z^2)}\left[z^2-\eta_*^2(z^2-1)^2\right]}dz, \qquad (47)$$

$$2h-2\Pi(z)=A^3k_0^2\left\{\frac{\left[(z^2-1)^2+4b_*\right]P_2(z^2)}{z^2(z^2-1-2b_*)^2}+\frac{b_*\eta_*^2z^2}{z^2-\eta_*^2(z^2-1)^2}\right\}. \qquad (48)$$

В соотношениях (30),(31),(46)–(48), вместо (27) подставили (45). Таким образом, при единственном условии $N=0$ на инвариантном соотношении (1) построено решение, зависящее от десяти безразмерных параметров b_*, k_*, η_*, σ_*, A/J, A_0/J_0, φ_0, Φ_0, t_0, $h_*=h/A^3k_0^2$.

Отметим, что при $k\neq 0$ интегралы, стоящие в правых частях (29), (40), (41) – эллиптические, а при $k=0$ интегралы в (29),. (41) выражаются посредством элементарных функций.

Для этого сделаем замену

$$z^2=w. \qquad (49)$$

Тогда из (29) имеем

$$Ak_0(t-t_0)=\eta_*\int\frac{(w-1-2b_*)}{w\sqrt{P_2(w)}}dw, \qquad (50)$$

где

$$P_2(w)=aw^2+bw+c,$$

$$a=-(1+\sigma^2)\eta_*^2, \quad b=(1+\sigma^2)(1+2\eta_*^2)-1+4b_*\eta_*^2, \qquad (51)$$

$$c=-\left[\sigma^2+(1+2b_*)^2\right]\eta_*^2. \qquad (52)$$

Дискриминант уравнения $P_2(w)=0$ имеет вид

$$D=\sigma^2\left[(1+\sigma^2)(1+4\eta_*^2)-(1-4b_*\eta_*^2)^2\right] \qquad (53)$$

и, вследствие (5), (24), (28), $D>0$.

Итак, из (50) имеем

$$Ak_0(t-t_0)=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\arcsin\frac{-2(1+\sigma^2)\eta_*^2 w+(1+\sigma^2)(1+2\eta_*^2)-(1-4b_*\eta_*^2)}{\sqrt{D}}-$$

$$-\frac{(1+2b_*)}{\sqrt{\sigma^2+(1+2b_*)^2}}\arcsin\frac{[(1+\sigma^2)(1+2\eta_*^2)-(1-4b_*\eta_*^2)]w-2\eta_*^2\left[\sigma^2+(1+2b_*)^2\right]}{w\sqrt{D}}$$

Представим (46) в виде

$$\Phi(z)=\Phi_0+n_0 t/J_0+\Phi_*(w),$$

$$\Phi_*(w)=\frac{1}{4\eta_*}\int\frac{\left[(2\eta_*^2+1)w-2\eta_*^2\right](w-1-2b_*)}{w(w-w_1)(w-w_2)\sqrt{P_2(w)}}dw, \tag{54}$$

где

$$w_{1,2}=\left(1+2\eta_*^2\pm\sqrt{1+4\eta_*^2}\right)\Big/2\eta_*^2. \tag{55}$$

После вычисления интеграла (54) получим

$$\Phi_*(w)=\frac{1+2b_*}{2\sqrt{(1+2b_*)^2+\sigma^2}}\arcsin\frac{bw+2c}{w\sqrt{D}}+$$

$$+\frac{1}{4}\left[\arcsin\frac{(2aw_1+b)w+bw_1+2c}{(w-w_1)\sqrt{D}}+\arcsin\frac{(2aw_2+b)w+bw_2+2c}{(w-w_2)\sqrt{D}}\right],$$

здесь a, b, c, D, w_1, w_2 определены в (51)–(53), (55).

Выполнив преобразования, угол Φ можно записать так:

$$\Phi(z)=\Phi_0+\frac{n_0}{J_0}t(z)+\frac{1+2b_*}{2\sqrt{(1+2b_*)^2+\sigma^2}}\arcsin\frac{bz^2+2c}{z^2\sqrt{D}}+$$

$$+\frac{1}{4}\arcsin\frac{2\eta_*(z^2-1-2b_*)\sqrt{P_2(z^2)}}{\sigma^2\left[\eta_*^2(z^2-1)^2-z^2\right]}.$$

Зависимость угла φ от z, как следует из (47), с учетом замены (49) можно представить в виде

$$\varphi(w)=\varphi_0+\frac{\eta_*^2}{4}\int\frac{(w+1)(w-1-2b_*)\,dw}{\left[\eta_*^2(w-1)^2-w\right]\sqrt{P_2(w)\,w}}.$$

Подкоренное выражение можно записать таким образом

$$w(w-w_*)(w-w^*)$$

и, следовательно, имеем третий канонический вид эллиптических функций, введенных Лау (A.R. Low; 1950), который занимает промежуточное положение между формами Вейерштрасса и Лежандра и обладает некоторыми преимуществами, присущими и той и другой форме [5].

Литература.

1. *Лесина М.Е.* О колебаниях оси маховика в теле-носителе // Механика твердого тела. – 1979. –Вып.11. – С. 32–37.
2. *Лесина М.Е.* Об условиях существования точных решений задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных сферическим шарниром // Механика твердого тела. – 1984. –Вып.16. – С. 32–36.
3. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.
4. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Новое точное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных упругим сферическим шарниром.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967, 300 с.