УДК 531.38

М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУОБРАТНОГО МЕТОДА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА

Уравнения движения двух гироскопов Лагранжа, сочленённых идеальным сферическим шарниром, содержат потенциальную энергию упругого элемента, которая является произвольной дифференцируемой функцией угла между осями динамической симметрии тел. Используя полуобратный метод, этот произвол для потенциальной энергии перенесен на переменную ξ. Специальный выбор переменной позволил построить два новых решения задачи.

В монографии [1] выполнена замена переменных

$$\omega_2 = \left(\lambda \sin\tau - \mu\cos\tau\right)/\sin 2\tau\,, \tag{1}$$

$$\Omega_2 = \left(\lambda \sin\tau + \mu\cos\tau\right)/\sin 2\tau\,, \tag{2}$$

на основании которой получена четвертая форма уравнений движения[1] (5.60)*

$$\lambda' - \mu\,\xi\,\mathrm{ctg}^2\tau = \Lambda(\tau,\xi), \tag{3}$$

$$\mu' + \lambda\,\xi\,\mathrm{tg}^2\tau = \mathrm{M}(\tau,\xi), \tag{4}$$

где

$$\Lambda(\tau,\xi) = \{(A+N)n_0 - (A_0+N)n - [(A+N)n_0 + (A_0+N)n]\xi\}\frac{\cos\tau}{H}\,,$$

---

[1] При ссылке на формулы монографии [1] будем снабжать их звездочкой

$$\mathrm{M}(\tau,\xi)=\{(A-N)n_0+(A_0-N)n-[(A-N)n_0-(A_0-N)n]\xi\}\frac{\sin\tau}{H}$$

(штрихом обозначено дифференцирование по τ, $\tau=\theta/2$).

Придавая ξ значения нуль, один и $\dfrac{1}{\sin\tau\cos\tau}$, на основе этих уравнений получено три точных решения. Оказывается, эту форму уравнений можно использовать и для построения других точных решений. Для этого преобразуем систему (3), (4) к одному неоднородному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами.

$$\lambda''+[2(\mathrm{tg}\tau+\mathrm{ctg}\tau)-\xi'/\xi]\lambda'+\xi^2\lambda=f(\tau,\xi,\xi'), \qquad 5$$

где

$$f(\tau,\xi,\xi')=\mathrm{M}(\tau,\xi)\xi\,\mathrm{ctg}^2\tau+\Lambda(\tau,\xi)[2(\mathrm{tg}\tau+\mathrm{ctg}\tau)-\xi'/\xi]+\Lambda'(\tau,\xi). \qquad 6$$

Запишем соответствующее однородное уравнение

$$\lambda''+[2(\mathrm{tg}\tau+\mathrm{ctg}\tau)-\xi'/\xi]\lambda'+\xi^2\lambda=0. \qquad 7$$

Если, задавая определенным образом ξ, сможем найти соответствующее ему какое-либо частное решение $\lambda_1(\tau)$, то второе линейно независимое частное решение найдем по формуле Лиувилля

$$\lambda_2(\tau)=\lambda_1(\tau)\int\frac{W(\tau)}{\lambda_1^2(\tau)}d\tau, \qquad 8$$

где W(τ) – определитель Вронского

$$W(\tau)=e^{-\int\left(2(\mathrm{tg}\tau+\mathrm{ctg}\tau)-\xi'/\xi\right)d\tau}. \qquad 9$$

Выполняя интегрирование в (9), находим

$$W(\tau)=\xi(\tau)\mathrm{ctg}^2\tau. \qquad 10$$

Зная фундаментальное решение $\lambda_1(\tau)$, $\lambda_2(\tau)$, общее решение неоднородного уравнения (5) определим в виде

$$\lambda(\tau) = C_1\lambda_1(\tau) + C_2\lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)\int \frac{\lambda_2(\tau) f_*(\tau)}{W(\tau)} d\tau + \lambda_2(\tau)\int \frac{\lambda_1(\tau) f_*(\tau)}{W(\tau)} d\tau, \quad 11$$

где $f_*(\tau)$ – функция, соответствующая выбранному значению $\xi(\tau)$, после подстановки его в (6).

Покажем, что выбирая $\xi = -\frac{4\sin\tau\cos\tau}{\sin^4\tau + \cos^4\tau}$, $\xi = \frac{1}{\sin\tau}$, можно построить два новых решения.

<u>Первое решение.</u> Зададим инвариантное соотношение в виде

$$\xi = -\frac{4\sin\tau\cos\tau}{\sin^4\tau + \cos^4\tau}. \quad 12$$

При этом уравнение (7) допускает частное решение

$$\lambda_1(\tau) = \frac{C_*}{1 + \mathrm{tg}^4\tau}. \quad 13$$

Определитель Вронского находим из (10) с учетом (12)

$$W(\tau) = -\frac{4\left(1 + \mathrm{tg}^2\tau\right)}{\mathrm{tg}\tau\left(1 + \mathrm{tg}^4\tau\right)}. \quad 14$$

Подставив найденные значения (13), (14) в (8), получим второе частное решение

$$\lambda_2(\tau) = -\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^4\tau}\left(\ln\left(\mathrm{tg}^4\tau\right) + \mathrm{tg}^4\tau\right).$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$\lambda(\tau) = \frac{C_1}{1 + \mathrm{tg}^4\tau} - \frac{C_2\left(\ln\left(\mathrm{tg}^4\tau\right) + \mathrm{tg}^4\tau\right)}{1 + \mathrm{tg}^4\tau}.$$

В дальнейшем будем считать циклические постоянные нулевыми, а также постоянную интегрирования C_2 обратим в нуль.

$$n = n_0 = 0, \quad C_2 = 0, \qquad 15$$

то есть, будем изучать частое решение, соответствующее

$$\lambda(\tau) = \frac{C_* \cos^4 \tau}{\sin^4 \tau + \cos^4 \tau}, \qquad 16$$

(учет ненулевых значений циклических постоянных приводит к громоздким выражения для всех переменных задачи).

Переменную μ определим из (3) с учетом условия (15) и (12), (16) в виде

$$\mu(\tau) = \frac{C_* \sin^4 \tau}{\sin^4 \tau + \cos^4 \tau}. \qquad 17$$

Подставив (16), (17) в соотношение (1), (2), получим

$$\omega_2(\tau) = \frac{C_*\left(\cos^3 \tau - \sin^3 \tau\right)}{2\left(\sin^4 \tau + \cos^4 \tau\right)}, \qquad 18$$

$$\Omega_2(\tau) = \frac{C_*\left(\cos^3 \tau + \sin^3 \tau\right)}{2\left(\sin^4 \tau + \cos^4 \tau\right)}. \qquad 19$$

Теперь из конечных соотношений (5.61)*

$$\omega_3(\tau) = 2\left(\lambda \sin^3 \tau + \mu \cos^3 \tau\right) / \sin^2 2\tau, \qquad 20$$

$$\Omega_3(\tau) = 2\left(-\lambda \sin^3 \tau + \mu \cos^3 \tau\right) / \sin^2 2\tau \qquad 21$$

находим

$$\omega_3(\tau) = \frac{C_*(\cos\tau + \sin\tau)\cos\tau \sin\tau}{2\left(\sin^4 \tau + \cos^4 \tau\right)}, \qquad 22$$

$$\Omega_3(\tau)=\frac{C_*(-\cos\tau+\sin\tau)\cos\tau\sin\tau}{2\left(\sin^4\tau+\cos^4\tau\right)}. \qquad 23$$

Запишем формулы (5.57)*.

$$\omega_1=(\xi+1)\kappa, \quad \Omega_1=(\xi-1)\kappa, \qquad 24$$

и подставив в них (12), определим

$$\omega_1(\tau)=-\frac{\left(\sin^2 2\tau+4\sin 2\tau-2\right)}{2-\sin^2 2\tau}\kappa(\tau), \quad \Omega_1(\tau)=\frac{-2-4\sin 2\tau+\sin^2 2\tau}{2-\sin^2 2\tau}\kappa(\tau). \qquad 25$$

Для нахождения $\kappa(\tau)$воспользуемся интегралом (5.18)*

$$G_1^2+G_2^2+G_3^2=g^2, \qquad 26$$

$$\begin{gathered}G_1(\tau)=(A-N\cos 2\tau)\omega_1(\tau)+(A_0-N\cos 2\tau)\Omega_1(\tau), \qquad 27\\ G_2(\tau)=(A-N\cos 2\tau)\omega_2(\tau)+(A_0\cos 2\tau-N)\Omega_2(\tau)-n_0\sin 2\tau,\\ G_3(\tau)=\left(A_0\Omega_2(\tau)-N\omega_2(\tau)\right)\sin 2\tau+n+n_0\cos 2\tau.\end{gathered}$$

Отметим, что $G_2^2+G_3^2$ можно представить в виде

$$\begin{gathered}G_2^2+G_3^2=-H\left(\omega_2^2+\Omega_2^2-2\Omega_2\omega_2\cos 2\tau\right)+\\ +\left(A+A_0-2N\cos 2\tau\right)\left(A\omega_2^2+A_0\Omega_2^2-2N\Omega_2\omega_2\right), \qquad 28\\ H=AA_0-N^2>0.\end{gathered}$$

Вследствие (18), (19) имеем

$$\omega_2^2+\Omega_2^2-2\Omega_2\omega_2\cos 2\tau=\frac{C_*^2\sin^2\tau\cos^2\tau}{\sin^4\tau+\cos^4\tau},$$

$$\begin{gathered}A\omega_2^2+A_0\Omega_2^2-2N\omega_2\Omega_2=\frac{C_*^2}{4\left(\sin^4\tau+\cos^4\tau\right)^2}\left(A+A_0+2N\right)\sin^6\tau+ \qquad 29\\ +\frac{C_*^2}{4(\sin^4\tau+\cos^4\tau)^2}\left((A+A_0-2N)\cos^6\tau-2(A-A_0)\cos^3\tau\sin^3\tau\right).\end{gathered}$$

Подставив эти выражения в (28), находим

$$G_2^2+G_3^2=\frac{-HC_*^2\cos^2\tau\sin^2\tau}{\sin^4\tau+\cos^4\tau}+$$
$$+\frac{C_*\left[(A+A_0-2N)\cos^2\tau+(A+A_0+2N)\sin^2\tau\right]}{4\left(\sin^4\tau+\cos^4\tau\right)^2}[(A+A_0-2N)\cos^6\tau- \qquad 30$$
$$-2(A-A_0)\cos^3\tau\sin^3\tau+(A+A_0+2N)\sin^6\tau].$$

Преобразуем (27) с учетом (25)

$$G_1(\tau)=\frac{\kappa(\tau)}{\sin^4\tau+\cos^4\tau}[(-4(A+A_0-2N)\cos^3\tau\sin\tau-4(A+A_0+2N)\sin^3\tau\cos\tau+$$
$$+(A-A_0)(\cos^4\tau+\sin^4\tau)].$$

Внесем это выражение и (30) в (26) и получим

$$4\kappa^2(z)Q_4^2(z)=P^*{}_8(z), \qquad 31$$

где

$$z=\mathrm{tg}\,\tau, \qquad 32$$

$$Q_4(z)=(A-A_0)z^4-4(A+A_0+2N)z^3-4(A+A_0-2N)z+A-A_0,$$
$$P^*{}_8(z)=P_0z^8+P_2z^6+P_3z^5+P_4z^4+P_5z^3+P_6z^2+P_8,$$
$$P_0=4g^2-C_*^2(A+A_0+2N)^2,\quad P_2=\left[4H-(A+A_0-2N)(A+A_0+2N)\right]C_*^2,$$
$$P_3=2C_*^2(A-A_0)(A+A_0+2N),\ P_4=8g^2,\ P_5=2C_*^2(A-A_0)(A+A_0-2N),$$
$$P_6=\left[4H-(A+A_0-2N)(A+A_0+2N)\right]C_*^2,\quad P_8=4g^2-C_*^2(A+A_0-2N)^2.$$

Для определения зависимости времени t от вспомогательной переменной z вначале выразим из (32) $\tau=\mathrm{arctg}\,z$, затем продифференцируем это выражение по времени

$$\dot{\tau}=\dot{z}/(1+z^2), \qquad 33$$

и подставим в него (5.59)*

$$\dot{\tau} = -\kappa(\tau). \qquad 34$$

После этого из (31) находим

$$t - t_0 = -2\int \frac{Q_4(z)}{(1+z^2)\sqrt{P^*{}_8(z)}}dz.$$

Зависимость z от t можно получить обращением этого абелевого интеграла [2]. Для определения потенциальной энергии упругого элемента воспользуемся интегралом энергии (5.14)*

$$\left(A\omega_1^2 + A_0\Omega_1^2 - 2N\Omega_1\omega_1\cos 2\tau\right) + \left(A\omega_2^2 + A_0\Omega_2^2 - 2N\Omega_2\omega_2\right) = 2h - 2\Pi, \qquad 35$$

и, подставив в него (25), (29), (31), получим

$$2h - 2\Pi(z) = \frac{C_*^2(1+z^2)}{(1+z^4)^2}[(A + A_0 + 2N)z^6 - 2(A - A_0)z^3 + A + A_0 - 2N] + \\ + \frac{P^*{}_8(z)Q_{10}(z)}{Q_4^2(z)(1+z^4)^2(1+z^2)} \qquad 36$$

где

$$Q_{10}(z) = (A + A_0 - 2N)z^{10} - 8(A - A_0)z^9 + 17(A + A_0 + 2N)z^8 - 16(A - A_0)z^7 + \\ + [50(A + A_0) + 28N]z^6 - 16(A - A_0)z^5 + [50(A + A_0) - 28N]z^4 - \\ - 16(A - A_0)z^3 + 17(A + A_0 - 2N)z^2 - 8(A - A_0)z + A + A_0 + 2N.$$

Компоненты угловых скоростей полуподвижных базисов определены соотношениями (18) – (23), (25), (31), которые представим как функции от переменной z

$$\omega_1(z)=\frac{z^4-4z^3-4z+1}{z^4+1}\kappa(z),\quad \Omega_1(z)=-\frac{z^4+4z^3+4z+1}{z^4+1}\kappa(z),$$

$$\omega_2(z)=\frac{(1-z^3)\sqrt{z^2+1}}{2(z^4+1)},\qquad \Omega_2(z)=\frac{(1+z^3)\sqrt{z^2+1}}{2(z^4+1)},\tag{37}$$

$$\omega_3(z)=\frac{C_* z(1+z)\sqrt{z^2+1}}{2(z^4+1)},\qquad \Omega_3(z)=\frac{C_* z(1-z)\sqrt{z^2+1}}{2(z^4+1)},$$

Для определения угловых скоростей тел в неизменно связанными с телами базисах необходимо воспользоваться формулами $(5.32)_*$, $(5.37)_*$,(15)

$$\omega_1^*=\omega_1\cos\varphi+\omega_2\sin\varphi,\quad \omega_2^*=-\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi,\quad n=0,$$

$$\Omega_1^*=\Omega_1\cos\Phi+\Omega_2\sin\Phi,\quad \Omega_2^*=-\Omega_1\sin\Phi+\Omega_2\cos\Phi,\quad n_0=0,\tag{38}$$

Из циклических интегралов$(5.11)_*$

$$\omega_3+\dot{\varphi}=n/J,\qquad \Omega_3+\dot{\Phi}=n_0/J_0,$$

при ограничениях (15) имеем

$$\dot{\varphi}=-\omega_3(z),\qquad \dot{\Phi}=-\Omega_3(z).$$

А так как ω_3, Ω_3 представлены посредством функций z , то вследствие (32), (33) получим

$$\varphi-\varphi_0=\int\frac{\omega_3(z)}{(1+z^2)\kappa(z)}dz,\qquad \Phi-\Phi_0=\int\frac{\Phi_3(z)}{(1+z^2)\kappa(z)}dz.\tag{39}$$

Таким образом, задавая ξ в виде (12) , получено решение определяемое соотношениями (37)-(39).

<u>Второе решение.</u> Зададим инвариантное соотношение в виде

$$\xi=\frac{1}{\sin\tau}.\tag{40}$$

Тогда уравнение (7) имеет частное решение

$$\lambda_1(\tau) = -\frac{1}{\sin\tau}. \qquad 41$$

Определитель Вронского (10) при значении (40) таков

$$W(\tau) = \frac{\cos^2\tau}{\sin^3\tau}. \qquad 42$$

Второе линейно независимое частное решение $\lambda_2(\tau)$ находим по формуле (8), подставив в нее (41), (42)

$$\lambda_2(\tau) = -ctg\tau - \frac{\ln(tg\frac{\tau}{2})}{\sin\tau}. \qquad 43$$

Общее решение однородного уравнения (7) имеет вид

$$\lambda(\tau) = -\frac{C_1}{\sin\tau} - C_2(ctg\tau + \frac{\ln tg\frac{\tau}{2}}{\sin\tau}).$$

Определим правую часть уравнения (5) на инвариантном соотношении (40)

$$f_*(\tau) = \frac{1}{H}\{[(A+N)n_0 - (A_0+N)n]\frac{1+2(\cos\tau)^2}{\sin\tau} - [(A+N)n_0 + (A_0+N)n]\frac{1+(\cos\tau)^2}{(\sin\tau)^2} +$$
$$+[(A-N)n_0 + (A_0-N)n]\frac{(\cos\tau)^2}{(\sin\tau)^2} - [(A-N)n_0 - (A_0-N)n]\frac{(\cos\tau)^2}{(\sin\tau)^3}\}. \qquad 44$$

Общее решение неоднородного уравнения (5) можно найти по формуле (11) после подстановки в нее (41), (42), (44).

Можно показать, что интеграл

$$\int \frac{\lambda_2(\tau) f_*(\tau)}{W(\tau)} d\tau$$

относится к «неберущимся» интегралам. Поэтому будем считать, что циклические постоянные удовлетворяют условию (15). Чтобы избавится от трансцендентных функций в зависимостях для ω_i, Ω_i потребуем, чтобы $C_2 = 0$. То есть , будем рассматривать частное решение

$$\lambda(\tau) = -\frac{B}{\sin\tau} \qquad 45$$

(B -произвольная постоянная).

Из уравнения (3), вследствие (40),(45),(15) находим

$$\mu(\tau) = Btg\tau\,. \qquad 46$$

Подставив (45), (46) в (1), (2), получим

$$\omega_2(\tau) = -\frac{B(1+\sin\tau)}{\sin 2\tau}, \quad \Omega_2(\tau) = -\frac{B(1-\sin\tau)}{\sin 2\tau}, \qquad 47$$

после этого из (20) определим

$$\omega_3(\tau) = \frac{2B\sin\tau(\cos^2\tau - \sin\tau)}{\sin^2 2\tau}, \quad \Omega_3(\tau) = \frac{2B\sin\tau(\cos^2\tau + \sin\tau)}{\sin^2 2\tau}. \qquad 48$$

Вследствие (40) из (24) находим

$$\omega_1(\tau) = \frac{(1+\sin\tau)}{\sin\tau}\kappa(\tau), \quad \Omega_1(\tau) = \frac{(1-\sin\tau)}{\sin\tau}\kappa(\tau). \qquad 49$$

Для определения $\kappa(\tau)$ сначала получим $G_1(\tau)$ из (27) при ограничениях (15) и значениях (49)

$$G_1(\tau) = \frac{(A-A_0)\sin\tau + A + A_0 - 2N\cos 2\tau}{\sin\tau}\kappa(\tau). \qquad 50$$

Затем, подставив в (28) соотношения (47), с учетом ограничения (15) имеем

$$G_2^2 + G_3^2 = B^2\{\frac{-H(1+\cos^2\tau)}{\cos^2\tau} + \frac{A + A_0 - 2N\cos 2\tau}{\sin^2 2\tau}[(A + A_0 + 2N)\sin^2\tau + \qquad 51$$
$$+ A + A_0 - 2N + 2(A - A_0)\sin\tau]\}.$$

Представим интеграл (26) в виде

$$G_1(\tau) = \sqrt{g^2 - G_2^2 - G_3^2}\,,$$

внесем в это соотношение (50),(51) и получим

$$\kappa(\tau)\cos\tau = \frac{g\sqrt{P_4(\sin\tau)}}{2AQ_2(\sin\tau)}. \qquad 52$$

Введем новую переменную

$$\vartheta(\tau) = \sin(\tau), \qquad 53$$

вычислим ее производную с учетом (34)

$$\dot{\vartheta} = -\kappa \cos\tau . \qquad 54$$

Тогда из (52) находим

$$\frac{A}{g}\dot{\vartheta} = -\frac{\sqrt{P_4(\vartheta)}}{Q_2(\vartheta)},$$

откуда определяем зависимость времени t от вспомогательной переменной ϑ

$$\frac{g}{A}(t - t_0) = -2\int \frac{Q_2(\vartheta)}{\sqrt{P_4(\vartheta)}} d\vartheta,$$

где

$$Q_2(\vartheta) = 4b\vartheta^2 + (1 - a_*)\vartheta + 1 + a_* - 2b, \qquad 55$$

$$P_4(\vartheta) = \{-4 + 4C^2[(1 + a_* + 2b)b - a_* + b^2]\}\vartheta^4 + 8C^2(1 - a_*)b\vartheta^3 +$$
$$+ \{4 + C^2[1 + 10a_* + a_*^2 + 4(1 + a_*)b - 20b^2]\}\vartheta^2 + C^2(1 + a_* - 2b)^2 + \qquad 56$$
$$+ 2C^2(1 - a_*)(1 + a_* - 2b),$$

$$a_* = A_0 / A, \qquad 57$$

$$b = N / A, \qquad 58$$

$$gC = AB. \qquad 59$$

Существование движений сводится к условию $P_4(\vartheta) > 0$, отметим, что

$$P_4(1) = C^2(8a_* - 4b^2 + 8b + 4), \qquad 60$$

$$P_4(-1) = C^2(4a_*^2 + 8a_*b + 8a_* - 4b^2). \qquad 61$$

Вследствие (5.45)* имеют место неравенства

$$A + A_0 + 2N > 0, \qquad A + A_0 - 2N > 0, \qquad AA_0 - N^2 > 0,$$

которые, с учетом обозначений (57),(58) принимают вид.

$$1 + a_* + 2b > 0, \qquad 1 + a_* - 2b > 0, \quad a_* - b^2 > 0.$$

Представим (60),(61) в виде

$$P_4(1) = C^2[4(a_* - b^2) + 4(1 + a_* + 2b)],$$

$$P_4(-1) = C^2[4(a_* - b^2) + 4a_*(1 + a_* + 2b)]$$

и заметим, что

$$P_4(1) > 0, \quad P_4(-1) > 0, \quad P_4(0) = C^2(1 + a_* - 2b)^2 > 0.$$

Совокупность этих трех условий всегда определяет интервал, принадлежащий [-1;1], в котором $P_4(\vartheta) > 0$.

Используя интеграл (35), соотношения (47), (49), (51), а также обозначения (53), (56) — (58), находим потенциальную энергию упругого элемента

$$2h - 2\Pi(\vartheta) = \frac{g^2}{4A\vartheta^2(1-\vartheta^2)}\Big\{C^2\big[(1+a_* + 2b)\vartheta^2 + 2(1-a_*)\vartheta + 1 + a_* - 2b\big] + \\ + \frac{P_4(\vartheta)}{Q_2^2(\vartheta)}\big[-4b\vartheta^4 + (1+a_*+6b)\vartheta^2 + 2(1-a_*)\vartheta + 1 + a_* - 2b\big]\Big\}. \qquad 62$$

Запишем уравнение (39), с учетом замены (53), (54)

$$\kappa(\vartheta)\sqrt{1-\vartheta^2}\,\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \omega_3(\vartheta), \qquad \kappa(\vartheta)\sqrt{1-\vartheta^2}\,\frac{d\Phi}{d\vartheta} = \Omega_3(\vartheta)$$

и, подставив в них (48), (52), (59), находим

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{C(-\vartheta^2 - \vartheta + 1)Q_2(\vartheta)}{\vartheta(1-\vartheta^2)\sqrt{P_4(\vartheta)}}, \qquad \frac{d\Phi}{d\vartheta} = \frac{C(-\vartheta^2 + \vartheta + 1)Q_2(\vartheta)}{\vartheta(1-\vartheta^2)\sqrt{P_4(\vartheta)}}.$$

Теперь для углов собственных вращений тел имеем

$$\varphi - \varphi_0 = C\int \frac{(-\vartheta^2 - \vartheta + 1)Q_2(\vartheta)}{\vartheta(1-\vartheta^2)\sqrt{P_4(\vartheta)}}d\vartheta, \qquad \Phi - \Phi_0 = C\int \frac{(-\vartheta^2 + \vartheta + 1)Q_2(\vartheta)}{\vartheta(1-\vartheta^2)\sqrt{P_4(\vartheta)}}d\vartheta, \quad 63$$

где $P_2(\vartheta)$, $P_4(\vartheta)$, определены в (55),(56).

Компоненты угловых скоростей тел в неизменно связанных с телами базисах можно найти по формулам (38).

Таким образом, построено второе точное решение, для которого

$$\omega_1(\vartheta) = \frac{(1+\vartheta)}{\vartheta}\kappa(\vartheta), \qquad \Omega_1(\vartheta) = \frac{(1-\vartheta)}{\vartheta}\kappa(\vartheta),$$

$$\kappa(\vartheta) = \frac{g\sqrt{P_4(\vartheta)}}{2AQ_2(\vartheta)\sqrt{1-\vartheta^2}},$$

$$\omega_2(\vartheta) = -\frac{Cg(1+\vartheta)}{2A\vartheta\sqrt{1-\vartheta^2}}, \qquad \Omega_2(\vartheta) = -\frac{Cg(1-\vartheta)}{2A\vartheta\sqrt{1-\vartheta^2}},$$

$$\omega_3(\vartheta) = \frac{Cg(-\vartheta^2-\vartheta+1)}{2A\vartheta(1-\vartheta^2)}, \qquad \Omega_3(\vartheta) = \frac{Cg(-\vartheta^2+\vartheta+1)}{2A\vartheta(1-\vartheta^2)},$$

а $\varphi(\vartheta)$, $\Phi(\vartheta)$ определены квадратурами (63).

При этом потенциальная энергия упругого элемента имеет вид рациональной функции (62).

Литература

1 Лесина М.Е. Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. Донецк: ДонГТУ,1996.-238с.

2. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. -М.; Наука, 1977. –328 с.