УДК 531.38

©2004. **М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева**

Донецкий национальный технический университет.

Вращение гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

У роботі розглянуто обертання (рівномірні й нерівномірні) гіростата в магнітному полі з урахуванням ефекту Барнетта-Лондона. З'ясувалось, що навколо вертикалі можливі лише рівномірні обертання. Якщо же вісь обертання складає з вертикаллю кут, відмінний від прямого, отримано залежність першої компоненти кутової швидкості від кута φ власного обертання. З'ясовано, що у випадку прямого кута між вертикаллю і віссю власного обертання стала «інтегралу площ» дорівнює нулю, а залежність першої компоненти кутової швидкості від кута φ визначається з рівняння Абеля другого роду. Наведено окремі розв'язання цього рівняння.

Уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [1] имеют вид

$$
\begin{aligned}
&A_{11}\dot{\omega}_1 + A_{12}\dot{\omega}_2 + A_{31}\dot{\omega}_3 = (A_{12}\omega_1 + A_{22}\omega_2 + A_{23}\omega_3)\omega_3 - \\
&-(A_{31}\omega_1 + A_{23}\omega_2 + A_{33}\omega_3)\omega_2 + (B_{12}\omega_1 + B_{22}\omega_2 + B_{23}\omega_3)\nu_3 - \\
&-(B_{31}\omega_1 + B_{23}\omega_2 + B_{33}\omega_3)\nu_2 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 - \\
&-(C_{12}\nu_1 + C_{22}\nu_2 + C_{23}\nu_3)\nu_3 + (C_{31}\nu_1 + C_{23}\nu_2 + C_{33}\nu_3)\nu_2 + \\
&+ s_2\nu_3 - s_3\nu_2,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_{12}\dot{\omega}_1 + A_{22}\dot{\omega}_2 + A_{23}\dot{\omega}_3 = (A_{31}\omega_1 + A_{23}\omega_2 + A_{33}\omega_3)\omega_1 - \\
&-(A_{11}\omega_1 + A_{12}\omega_2 + A_{31}\omega_3)\omega_3 + (B_{31}\omega_1 + B_{23}\omega_2 + B_{33}\omega_3)\nu_1 - \\
&-(B_{11}\omega_1 + B_{12}\omega_2 + B_{31}\omega_3)\nu_3 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3 - \\
&-(C_{31}\nu_1 + C_{23}\nu_2 + C_{33}\nu_3)\nu_1 + (C_{11}\nu_1 + C_{12}\nu_2 + C_{31}\nu_3)\nu_3 + \\
&+ s_3\nu_1 - s_1\nu_3,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_{31}\dot{\omega}_1 + A_{23}\dot{\omega}_2 + A_{33}\dot{\omega}_3 = (A_{11}\omega_1 + A_{12}\omega_2 + A_{31}\omega_3)\omega_2 - \\
&-(A_{12}\omega_1 + A_{22}\omega_2 + A_{23}\omega_3)\omega_1 + (B_{11}\omega_1 + B_{12}\omega_2 + B_{31}\omega_3)\nu_2 - \\
&-(B_{12}\omega_1 + B_{22}\omega_2 + B_{23}\omega_3)\nu_1 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 - \\
&-(C_{11}\nu_1 + C_{12}\nu_2 + C_{31}\nu_3)\nu_2 + (C_{12}\nu_1 + C_{22}\nu_2 + C_{23}\nu_3)\nu_1 + \\
&+ s_1\nu_2 - s_2\nu_1,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$\dot{\nu}_1 = \nu_2\omega_3 - \nu_3\omega_2, \tag{4}$$

$$\dot{\nu}_2 = \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3, \tag{5}$$

$$\dot{\nu}_3 = \nu_1\omega_2 - \nu_2\omega_1 . \tag{6}$$

Система уравнений (1)–(6) допускает интегралы

$$\begin{gathered}(A_{11}\omega_1 + A_{12}\omega_2 + A_{31}\omega_3)\nu_1 + (A_{12}\omega_1 + A_{22}\omega_2 + A_{23}\omega_3)\nu_2 + \\ + (A_{31}\omega_1 + A_{23}\omega_2 + A_{33}\omega_3)\nu_3 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3 = k,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 . \tag{8}$$

В этих уравнениях ω_1, ω_2, ω_3 – компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела в неизменно связанной с телом системе координат, ν_1, ν_2, ν_3 – компоненты единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$. В этой системе координат вектор $\boldsymbol{\nu}$ сохраняет свое направление в пространстве. A_{ij} – компоненты тензора инерции тела, записанного в неподвижной точке, компоненты B_{ij} и C_{ij} характеризуют магнитное и электрическое поля, λ_i – компоненты гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}$, s_i – компоненты обобщенного центра масс.

Точкой обозначена относительная производная по времени t.

Вращение гиростата вокруг первой оси характеризуется двумя инвариантными соотношениями

$$\omega_2 = 0 , \ \omega_3 = 0 . \tag{9}$$

Производные $\dot{\omega}_2 = 0$, $\dot{\omega}_3 = 0$ вместе с соотношениями (9) подставим в уравнения (1)–(6) и получим

$$A_{11}\dot{\omega}_1 = (B_{12}\nu_3 - B_{31}\nu_2)\omega_1 - (C_{12}\nu_1 + C_{22}\nu_2 + C_{23}\nu_3)\nu_3 + \\ + (C_{31}\nu_1 + C_{23}\nu_2 + C_{33}\nu_3)\nu_2 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2, \qquad (10)$$

$$A_{12}\dot{\omega}_1 = A_{31}\omega_1^2 + (B_{31}\nu_1 - B_{11}\nu_3)\omega_1 + \lambda_3\omega_1 - \\ - (C_{31}\nu_1 + C_{23}\nu_2 + C_{33}\nu_3)\nu_1 + (C_{11}\nu_1 + C_{12}\nu_2 + C_{31}\nu_3)\nu_3 + \\ + s_3\nu_1 - s_1\nu_3, \qquad (11)$$

$$A_{31}\dot{\omega}_1 = -A_{12}\omega_1^2 + (B_{11}\nu_2 - B_{12}\nu_1)\omega_1 - \lambda_2\omega_1 - \\ - (C_{11}\nu_1 + C_{12}\nu_2 + C_{31}\nu_3)\nu_2 + (C_{12}\nu_1 + C_{22}\nu_2 + C_{23}\nu_3)\nu_1 + \\ + s_1\nu_2 - s_2\nu_1, \qquad (12)$$

$$\dot{\nu}_1 = 0, \qquad (13)$$

$$\dot{\nu}_2 = \nu_3\omega_1, \qquad (14)$$

$$\dot{\nu}_3 = -\nu_2\omega_1. \qquad (15)$$

Из уравнения (13) следует, что

$$\nu_1 = \nu_1^0, \qquad (16)$$

где ν_1^0 постоянная, обозначим

$$\nu_1^0 = \cos\theta_0, \qquad (17)$$

где θ_0 - угол между первой осью неизменно связанной с телом системы координат, вокруг которой тело вращается , и неизменным в пространстве вектором $\boldsymbol{\nu}$.

Вместо ω_1 введем дифференциальным соотношением новую переменную φ.

$$\omega_1 = \dot{\varphi}, \tag{18}$$

тогда из уравнений (14), (15) и интеграла (8) получим

$$\nu_2 = \sin\theta_0 \sin\varphi, \tag{19}$$

$$\nu_3 = \sin\theta_0 \cos\varphi. \tag{20}$$

Исключая $\dot{\omega}_1$ из уравнений (11), (12) с помощью (10), получаем

$$\begin{aligned} &A_{11}[A_{31}\omega_1^2 + (B_{31}\nu_1 - B_{11}\nu_3)\omega_1 + \lambda_3\omega_1 - (C_{31}\nu_1 + C_{23}\nu_2 + \\ &+ C_{33}\nu_3)\nu_1 + (C_{11}\nu_1 + C_{12}\nu_2 + C_{31}\nu_3)\nu_3 + s_3\nu_1 - s_1\nu_3] + \\ &+ A_{12}[(B_{31}\nu_2 - B_{12}\nu_3)\omega_1 + (C_{12}\nu_1 + C_{22}\nu_2 + C_{23}\nu_3)\nu_3 - \\ &- (C_{31}\nu_1 + C_{23}\nu_2 + C_{33}\nu_3)\nu_2 - s_2\nu_3 + s_3\nu_2] = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &A_{11}[-A_{12}\omega_1^2 + (B_{11}\nu_2 - B_{12}\nu_1)\omega_1 - \lambda_2\omega_1 - (C_{11}\nu_1 + C_{12}\nu_2 + \\ &+ C_{31}\nu_3)\nu_2 + (C_{12}\nu_1 + C_{22}\nu_2 + C_{23}\nu_3)\nu_1 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1] + \\ &+ A_{31}[(B_{31}\nu_2 - B_{12}\nu_3)\omega_1 + (C_{12}\nu_1 + C_{22}\nu_2 + C_{23}\nu_3)\nu_3 - \\ &- (C_{31}\nu_1 + C_{23}\nu_2 + C_{33}\nu_3)\nu_2 - s_2\nu_3 + s_3\nu_2] = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

Потребуем, чтобы в этих уравнениях коэффициенты при ω_1^2 обращались в нуль

$$A_{31} = 0, \; A_{12} = 0. \tag{23}$$

Это означает, что первая ось (вращения) является главной. При этом уравнение (21), (22) упрощаются.

Подставив в них вместо v_1, v_2, v_3 их выражения (17), (19), (20) получим

$$
\begin{aligned}
&(B_{31}\cos\theta_0+\lambda_3-B_{11}\sin\theta_0\cos\varphi)\cdot\omega_1+(s_3-C_{31}\cos\theta_0)\cos\theta_0+\\
&+\frac{1}{2}C_{31}\sin^2\theta_0-C_{23}\sin\theta_0\cos\theta_0\sin\varphi+\\
&+\left[(C_{11}-C_{33})\cos\theta_0-s_1\right]\sin\theta_0\cos\varphi+\\
&+\frac{1}{2}C_{12}\sin^2\theta_0\sin 2\varphi+\frac{1}{2}C_{31}\sin^2\theta_0\cos 2\varphi=0,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-B_{12}\cos\theta_0-\lambda_2+B_{11}\sin\theta_0\sin\varphi)\cdot\omega_1+(C_{12}\cos\theta_0-\\
&-s_2)\cos\theta_0-\frac{1}{2}C_{12}\sin^2\theta_0+C_{23}\sin\theta_0\cos\theta_0\cos\varphi+\\
&+\left[(C_{22}-C_{11})\cos\theta_0+s_1\right]\sin\theta_0\sin\varphi-\frac{1}{2}C_{31}\sin\theta_0\cos\theta_0\sin 2\varphi+\\
&+\frac{1}{2}C_{12}\sin^2\theta_0\cos 2\varphi=0.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Потребуем, чтобы (24), (25) тождественно обращались в нуль. Это приводит к условиям

$$B_{31}\cos\theta_0+\lambda_3=0, \tag{26}$$

$$B_{12}\cos\theta_0+\lambda_2=0, \tag{27}$$

$$B_{11}\sin\theta_0=0, \tag{28}$$

$$(s_3-C_{31}\cos\theta_0)\cos\theta_0+\frac{1}{2}C_{31}\sin^2\theta_0=0, \tag{29}$$

$$(s_2 - C_{12}\cos\theta_0)\cos\theta_0 + \frac{1}{2}C_{12}\sin^2\theta_0 = 0, \tag{30}$$

$$C_{23}\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0, \tag{31}$$

$$\left[(C_{11} - C_{33})\cos\theta_0 - s_1\right]\sin\theta_0 = 0, \tag{32}$$

$$\left[(C_{22} - C_{11})\cos\theta_0 + s_1\right]\sin\theta_0 = 0, \tag{33}$$

$$C_{12}\sin^2\theta_0 = 0, \tag{34}$$

$$C_{31}\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0, \tag{35}$$

$$C_{31}\sin^2\theta_0 = 0. \tag{36}$$

Из (28) вытекает возможность двух вариантов

$$\sin\theta_0 = 0, \tag{37}$$

$$B_{11} = 0. \tag{38}$$

Условие (37) означает, что гиростат вращается вокруг вертикали, при этом как следует из (19), (20)

$$\nu_2 = 0\,,\ \nu_3 = 0\,. \tag{39}$$

При условии (37) соотношения (31)–(36) выполнены, а из (26)–(30) находим

$$\lambda_2 = -B_{12}\,,\ \lambda_3 = -B_{31}\,, \tag{40}$$

$$s_2 = C_{12}\,,\ s_3 = C_{31}\,, \tag{41}$$

(считаем, что $\cos\theta_0 = 1$).

При условиях (9), (23), (37), (40), (41) уравнения (2), (3) обращаются в тождество, а из уравнения (1) следует, что $\dot{\varphi} = m = \text{const}$,

откуда

$$\varphi = mt + \varphi_0 . \tag{42}$$

Таким образом, если ось вращения является главной, вокруг вертикали возможны лишь равномерные вращения.

Рассмотрим вариант (38), считая вначале, что

$$\cos\theta_0 \neq 0. \tag{43}$$

Из соотношений (31), (34)–(36) имеем

$$C_{12} = 0 ,\ C_{23} = 0 ,\ C_{31} = 0 , \tag{44}$$

а из (32), (33)

$$(C_{11} - C_{33})\cos\theta_0 - s_1 = 0,$$

$$(C_{22} - C_{11})\cos\theta_0 + s_1 = 0,$$

складывая эти выражения, получаем

$$C_{22} = C_{33}, \tag{45}$$

тогда

$$s_1 = (C_{11} - C_{22})\cos\theta_0. \tag{46}$$

Из (29), (30) с учетом (44) находим

$$s_2 = s_3 = 0, \tag{47}$$

это означает, что центр масс гиростата принадлежит оси вращения.

И, наконец, из (26), (27) имеем

$$\lambda_2 = -B_{12}\cos\theta_0,\ \lambda_3 = -B_{31}\cos\theta_0. \tag{48}$$

Из уравнения (1) при условиях (9), (23), (38), (43)–(48) получим

$$A_{11}\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}(B_{12}\cos\varphi - B_{31}\sin\varphi)\sin\theta_0,$$

интегрируя которое находим

$$A_{11}\dot{\varphi} = (B_{12}\cos\varphi - B_{31}\sin\varphi)\sin\theta_0 + n,$$

$$\tag{49}$$

где n - постоянная интегрирования.

Запишем интеграл (7) при этих же условиях

$$A_{11}\dot{\varphi} = (B_{12}\cos\varphi - B_{31}\sin\varphi)\sin\theta_0 + \frac{k}{\cos\theta_0} - \lambda_1.$$

Сравнивая это выражение с (49) заключаем, что

$$n = \frac{k}{\cos\theta_0} - \lambda_1.$$

Зависимость φ от времени t, определим обращением квадратуры

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{A_{11} d\varphi}{(B_{12} \sin\varphi + B_{31} \cos\varphi) \sin\theta_0 + n}. \tag{50}$$

При вычислении этого интеграла необходимо рассмотреть три случая

1) $n^2 - (B_{12}^2 + B_{31}^2) \sin^2 \theta_0 > 0$, тогда

$$tg \frac{\varphi}{2} = \frac{(n + B_{31} \sin\theta_0) tg(m(t - t_0))}{2A_{11} m - B_{12} \sin\theta_0 tg(m(t - t_0))},$$

где $m = \frac{1}{2A_{11}} \sqrt{n^2 - (B_{12}^2 + B_{31}^2) \sin^2 \theta_0}$.

2) $n^2 - (B_{12}^2 + B_{31}^2) \sin^2 \theta_0 < 0$, тогда

$$tg \frac{\varphi}{2} = \frac{(n + B_{31} \sin\theta_0)(1 - e^{\kappa(t - t_0)})}{(B_{12} \sin\theta_0 - A_{11}\kappa) e^{\kappa(t - t_0)} - (B_{12} \sin\theta_0 + A_{11}\kappa)},$$

где

$$\kappa = \frac{1}{A_{11}} \sqrt{(B_{12}^2 + B_{31}^2) \sin^2 \theta_0 - n^2}.$$

Заметим, что

$$\lim_{t \to \infty} tg \frac{\varphi}{2} = \frac{B_{12} \sin\theta_0 + A_{11}\kappa}{B_{31} \sin\theta_0 - n}$$

3) $n^2 = (B_{12}^2 + B_{31}^2) \sin^2 \theta_0$, тогда

$$tg \frac{\varphi}{2} = \frac{(n + B_{31} \sin\theta_0)(t - t_0)}{2A_{11} - B_{12}(t - t_0) \sin\theta_0}.$$

Пусть выполняются условия

$$B_{11} = 0\,,$$

$$\cos\theta_0 = 0\,, \tag{51}$$

тогда из (17), (19), (20) следует, что

$$\nu_1 = 0\,,\ \nu_2 = \sin\varphi\,,\ \nu_3 = \cos\varphi\,. \tag{52}$$

Из условий (26), (27) имеем

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \tag{53}$$

это означает, что гиростатический момент принадлежит оси вращения. При условии (51) из (29), (30) получаем

$$C_{12} = C_{31} = 0, \tag{54}$$

а соотношения (32), (33) приводят к такому $s_1 = 0$, которое означает, что центр масс гиростата находится в плоскости, перпендикулярной оси вращения .

При условиях (9),(23),(51)–(53) из интеграла (7) получаем нулевое значение постоянной интегрирования ($k = 0$).

Внесем (9),(23),(52),(54) в уравнение (1) и получим

$$\begin{aligned} &A_{11}\dot{\omega}_1 - (B_{12}\cos\varphi - B_{31}\sin\varphi)\omega_1 + C_{23}\cos 2\varphi - s_2\cos\varphi + s_3\sin\varphi + \\ &+ (C_{22} - C_{33})\cos\varphi\sin\varphi = 0. \end{aligned} \tag{55}$$

Учитывая (18) , находим

$$\dot{\omega}_1 = \frac{d\omega_1}{d\varphi}\omega_1 \tag{56}$$

После чего уравнение (55) принимает вид

$$A_{11}\omega_1 \frac{d\omega_1}{d\varphi} = (B_{12}\cos\varphi - B_{31}\sin\varphi)\omega_1 - (C_{22} - C_{33})\cos\varphi\sin\varphi - \\ - C_{23}\cos 2\varphi + s_2\cos\varphi - s_3\sin\varphi \tag{57}$$

– уравнение Абеля второго рода (специального вида), которое , как известно , $[2, c.294]$ в общем случае не сводится к квадратурам.

Однако, некоторые частные решения указать можно.

Вначале будем искать частное решение в виде

$$\omega_1(\varphi) = l\cos\varphi + m\sin\varphi + n_*, \tag{58}$$

где l, m, n_* – искомые постоянные. Продифференцировав это выражение и подставив его и (58) в (57), получаем тригонометрический многочлен

$$\frac{1}{2}\left[l(m - \widetilde{B}_{12}) + lm - m\widetilde{B}_{31} + 2\widetilde{C}_{23}\right]\cos 2\varphi + \\ + \left[m^2 - l^2 - m\widetilde{B}_{12} + l\widetilde{B}_{31} + \widetilde{C}_{22} - \widetilde{C}_{33}\right]\sin 2\varphi + \\ + \left[n_*(m - \widetilde{B}_{12}) - \widetilde{s}_2\right]\cos\varphi + \left[n_*(\widetilde{B}_{31} - l) + \widetilde{s}_3\right]\sin\varphi + \\ + (m\widetilde{B}_{31} - l\widetilde{B}_{12}) = 0. \tag{59}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при различных гармониках, получаем систему уравнений, связывающую искомые коэффициенты и параметры задачи

$$
\begin{aligned}
& m\widetilde{B}_{31} = l\widetilde{B}_{12}, \\
& \widetilde{s}_2 = n_*(m - \widetilde{B}_{12}), \\
& \widetilde{s}_3 = n_*(l - \widetilde{B}_{31}), \\
& m^2 - l^2 - m\widetilde{B}_{12} + l\widetilde{B}_{31} = -(\widetilde{C}_{22} - \widetilde{C}_{33}), \\
& 2lm - l\widetilde{B}_{12} - m\widetilde{B}_{31} = -2\widetilde{C}_{23}.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Решение этой системы можно записать в виде

$$
l = \mu\widetilde{B}_{31}, \;\; m = \mu\widetilde{B}_{12}, \;\; \widetilde{s}_2 = n_*(\mu - 1)\widetilde{B}_{12},
$$

$$
\widetilde{s}_3 = n_*(\mu - 1)\widetilde{B}_{31}, \; \mu^2 - \mu = \frac{\widetilde{C}_{23}}{\widetilde{B}_{12}\widetilde{B}_{31}}
$$

при условии

$$
\frac{B_{12}^2 - B_{31}^2}{B_{12}B_{31}} = \frac{C_{22} - C_{33}}{C_{23}} .
$$

Искомое решение принимает вид

$$
A_{11}\omega_1(\varphi) = \mu(B_{31}\cos\varphi + B_{12}\sin\varphi + \frac{A_{11}C_{23}}{B_{12}B_{31}}) \tag{61}
$$

$$
\mu = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{B_{11}C_{23}}{B_{12}B_{31}}},
$$

$$s_2 = n(\mu - 1)B_{12},$$

$$s_3 = n(\mu - 1)B_{31.}$$

Для нахождения второго частного решения, предположим, что

$$B_{12} = B_{31} = 0, \qquad (62)$$

тогда уравнение (57) упростится

$$A_{11}\omega_1 \frac{d\omega_1}{d\varphi} = -(C_{22} - C_{33})\cos\varphi \sin\varphi - C_{23}\cos 2\varphi +$$
$$+ s_2 \cos\varphi - s_3 \sin\varphi,$$

интегрируя его получим

$$A_{11}\omega_1^2 - n = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{33})\cos 2\varphi - C_{23}\sin 2\varphi + 2s_2 \sin\varphi +$$
$$+ 2s_3 \cos\varphi, \qquad (63)$$

где n -постоянная интегрирования.

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{2}(\tilde{C}_{22} - \tilde{C}_{33})\cos 2\varphi - \tilde{C}_{23}\sin 2\varphi + 2\tilde{s}_2 \sin\varphi + 2\tilde{s}_3 \cos\varphi + \tilde{n}}\ ,$$

где

$$\tilde{n} = \frac{n}{A_{11}}.$$

Теперь можно записать

$$t=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{2}(\widetilde{C}_{22}-\widetilde{C}_{33})\cos 2\varphi-\widetilde{C}_{23}\sin 2\varphi+2\widetilde{s}_2\sin\varphi+2\widetilde{s}_3\cos\varphi+\widetilde{n}}},$$

с помощью подстановки

$$tg\frac{\varphi}{2}=u,$$

получим

$$t=2\int_{u_0}^{tg\frac{\varphi}{2}}\frac{du}{\sqrt{a_0u^4+4a_1u^3+6a_2u^2+4a_3u+a_4}} \tag{64}$$

где

$$a_0=\frac{1}{2}(\widetilde{C}_{22}-\widetilde{C}_{33})+\widetilde{n}-2\widetilde{s}_3, \qquad a_1=\widetilde{s}_2+\widetilde{C}_{23},$$

$$a_2=\frac{1}{6}\left[-3(\widetilde{C}_{22}-\widetilde{C}_{33})+2\widetilde{n}\right], \qquad a_3=\widetilde{s}_2-\widetilde{C}_{23}, \tag{65}$$

$$a_4=\frac{1}{2}(\widetilde{C}_{22}-\widetilde{C}_{33})+\widetilde{n}+2\widetilde{s}_3, \qquad u_0=tg\frac{\varphi_0}{2}.$$

Если уравнение

$$P_4(u)=a_0u^4+4a_1u^3+6a_2u^2+4a_3u+a_4=0$$

имеет кратный корень u_1, то есть

$$P_4(u)=(u-u_1)^2\left[a_0u^2+(a_0u_1+3a_1)\cdot u+a_0u_1^2+3a_1u_1+3a_2\right]=0, \tag{66}$$

то интеграл

$$t=2\int_{u_0}^{tg\frac{\varphi}{2}}\frac{du}{(u-u_1)\sqrt{a_0u^2+(a_0u_1+3a_1)\cdot u+a_0u_1^2+3a_1u_1+3a_2}}$$

можно выразить с помощью элементарных функций.

Для этого необходимо рассмотреть три варианта.

1) $a_0 u_1^2 + 2a_1 u_1 + a_2 > 0$, $(a_0 u_1 + a_1)^2 + 4(a_0 a_2 - a_1^2) \neq 0$

$$tg\frac{\varphi}{2} = u_1 + \frac{2cz_0}{(2c + bz_0)\cdot ch\tau + 2\sqrt{c(a_0 z_0^2 + bz_0 + c)}\cdot sh\tau - bz_0}.$$

2) $a_0 u_1^2 + 2a_1 u_1 + a_2 > 0$, $(a_0 u_1 + a_1)^2 + 4(a_0 a_2 - a_1^2) = 0$

$$tg\frac{\varphi}{2} = u_1 + \frac{2cz_0}{(2c + bz_0)\cdot e^{\tau} - bz_0}$$

в обоих случаях $\tau = -\frac{\sqrt{c}}{2}t.$

3) $a_0 u_1^2 + 2a_1 u_1 + a_2 < 0$, $(a_0 u_1 + a_1)^2 + 4(a_0 a_2 - a_1^2) < 0$

$$tg\frac{\varphi}{2} = u_1 + \frac{2cz_0}{(2c + bz_0)\cdot \cos\tau + 2\sqrt{-c(a_0 z_0^2 + bz_0 + c)}\cdot sh\tau - bz_0},$$

$$\tau = \frac{\sqrt{-c}}{2}t.$$

Для сокращения записи введены параметры b и c связанные с a_0, a_1, a_2, u_1 таким образом

$$b = 3(a_0 u_1 + a_1), \quad c = 3(a_0 u_1^2 + 2a_1 u_1 + a_2), \quad z_0 = u_0 - u_1.$$

При вычислении интеграла (64) необходимо найти инварианты g_2, g_3 и дискриминант уравнения (66) [3, с.17, 37]

$$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$

$$g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_4 a_1^2 - a_0 a_3^2 \qquad (67)$$

$$G = g_2^3 - 27 g_3^2. \qquad (68)$$

Для этого подставим значения (65) в выражения (67), (68) и получим

$$g_2 = (\widetilde{C}_{22} - \widetilde{C}_{33})^2 + \frac{4}{3}\widetilde{n}^2 + 4(\widetilde{C}_{23}^2 - \widetilde{s}_2^2 - \widetilde{s}_3^2),$$

$$g_3 = \frac{1}{27}\{8\widetilde{n}^3 - 18\widetilde{n}\left[(\widetilde{C}_{22} - \widetilde{C}_{33})^2 + 4\widetilde{C}_{23}^2 + 2(\widetilde{s}_2^2 + \widetilde{s}_3^2)\right] -$$
$$- 54(\widetilde{C}_{22} - \widetilde{C}_{33})(\widetilde{s}_2^2 - \widetilde{s}_3^2) - 216\widetilde{C}_{23}\widetilde{s}_2\widetilde{s}_3\}.$$

$$27G = \left[4\widetilde{n}^2 + 3(\widetilde{C}_{22} - \widetilde{C}_{33})^2 + 12(\widetilde{C}_{23}^2 - \widetilde{s}_2^2 - \widetilde{s}_3^2)\right]^3 -$$
$$- \{8\widetilde{n}^3 - 18\widetilde{n}\left[(\widetilde{C}_{22} - \widetilde{C}_{33})^2 + 4\widetilde{C}_{23}^2 + 2(\widetilde{s}_2^2 + \widetilde{s}_3^2)\right] -$$
$$- 54(\widetilde{C}_{22} - \widetilde{C}_{33})(\widetilde{s}_2^2 - \widetilde{s}_3^2) - 216\widetilde{C}_{23}\widetilde{s}_2\widetilde{s}_3\}^2.$$

Если $G \neq 0$ общее решение уравнения (64) можно представить в виде рациональной функции от $\wp(t)$ функции Вейерштрасса.

Эта функция является решением уравнения

$$(\wp')^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3 .$$

Список литературы.

1. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле.// Изв.АН СССР. Сер.Механика твердого тела.–1985г.–№6.–С.65–69.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука,1971.–576 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье.(серия «Справочная мат. библиотека»).–М.: Наука,1967.–300 с.