УДК 571.926

Улитин Г. М. Донецкий национальный технический университет

Некоторые приёмы приведение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к известным уравнениям

Розглянуто прийоми, що дозволяють звести розв'язання певного класу лінійних диференційних рівнянь зі зміними коефіцієнтами до рівнянь, розв'язки якіх відомі, наприклад, зі сталими коефіцієнтами. Одержані умови таких зведень, які визначають взаємозв'язок між коефіцієнтами, розглянуті приклади.

Как известно, нет общих методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений второго и выше порядков с переменными коэффициентами. Существует относительно немного таких уравнений [1], решения которых известны, при этом, как, правило, - в специальных функциях. Поэтому представляет интерес случай, когда данное уравнение с переменными коэффициентами путём замены можно привести к известным уравнениям.

В работе [2] рассмотрен случай, когда линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами, и получено необходимое условие для замены. В статье [3] приведены достаточные условия такоой замены для случая уравнений второго порядка.

В данной работе рассмотрен общий подход для возможости приведения любого линейного дифференциального уравнения к решению известного.

Вначале остановимся на случае однородных уравнений (для неоднородных можно применить метод вариации произвольных постоянных) третьего порядка

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0 \qquad (1)$$

и пусть известно решение уравнения

$$\dddot{y} + a_1(t)\ddot{y} + a_2(t)\dot{y} + a_3(t)y = 0\,, \qquad (2)$$

где точка означает дифференцирование по аргументу t.

Для уравнений более высоких порядков идея остаётся аналогичной. Введём замену $t = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ пока неизвестная функция. Перейдём к дифференцированию по t и подставим замену в уравнение (1)

$$\dddot{y}+\frac{p_1(\varphi')^2+3\varphi'\varphi''}{(\varphi')^3}\ddot{y}+\frac{p_1\varphi+p_2\varphi'+\varphi''}{(\varphi')^3}\dot{y}+\frac{p_3}{(\varphi')^3}y=0\,. \quad (3)$$

Сравнивая коэффициенты уравнений (3) и (2), получаем равенства:

$$\frac{dt}{dx}=\sqrt[3]{\frac{p_3(x)}{a_3(t)}};$$

$$p_1\varphi+p_2\varphi'+\varphi'''=\frac{p_3a_2(\varphi(x))}{a_3(\varphi(x))}; \quad (4)$$

$$p_1(\varphi')^2+3\varphi'\varphi''=\frac{p_3a_1(\varphi(x))}{a_3(\varphi(x))}.$$

Из первого дифференциального уравнения относительно функции $\varphi(x)$ соотношений (4) определяем эту функцию (необходимое условие приведения к уравнению (2)). Остальные два равенства представляют собой достаточые условия приведения для данной замены. Им можно придать вид, содержащий только коэффициенты уравнений (1) и (2), но это лишнее, т. к. достаточные условия должны выполняться только при такой замене. Так, например, третье условие (4) можно представить соотошением

$$p_1p_3^{\frac{2}{3}}+p_3^{-\frac{1}{3}}p_3'=\frac{p_3^{\frac{2}{3}}a_3'(\varphi(x))}{a_3(\varphi(x))}+a_1(\varphi(x))a_3^{\frac{2}{3}}(\varphi(x)).$$

В частности, для уравнений второго порядка равенства (4) получаем выражения:

$$\frac{dt}{dx}=\sqrt{\frac{p_2(x)}{a_2(t)}};$$

$$p_1\varphi'+\varphi''=\frac{p_2a_1(\varphi(x))}{a_2(\varphi(x))}. \quad (5)$$

Аналогично можно было получить и условия для замены вида $x=\varphi(t)$.

В качестве примера проинтегрируем уравнение

$$y''+\frac{1}{x}y+9x^4y=0\,.$$

Попробуем его привести к уравнению Бесселя

$$\ddot{y}+\frac{1}{t}y+y=0.$$

Для определения замены воспользуемся первым условием (5) $\frac{dt}{dx}=\sqrt{9x^4}=3x^2 \Rightarrow t=x^3$. Проверим выполнение второго условия: $\frac{1}{x}\cdot 3x^2+6x=\frac{9x^4}{x^3}$. Таким образом, получаем решение данного уравнения, выраженное в функциях Бесселя

$$y=C_1J_0\left(x^3\right)+C_2Y_0\left(x^3\right).$$

Особый интерес представляет случай, когда уравнение можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами. Такие уравнения называются приводимыми [2]. Тогда условия (4) упрощаются и принимают вид

$$t=C\int\sqrt[3]{p_3}dx\ ;$$

$$p_3^{-\frac{4}{3}}p_3'+p_3^{-\frac{1}{3}}p_1=const; \tag{6}$$

$$3p_3^{-\frac{5}{3}}p_3''-8p_3^{-\frac{8}{3}}\left(p_3'\right)^2+3p_3^{-\frac{5}{3}}p_3'p_1+p_3^{-\frac{2}{3}}p_2=const.$$

Например, найдём общее решение уравнения

$$y'''-\left(\frac{3}{x}+2x\right)y''+\left(4x^2+\frac{3}{x^2}+8\right)y'-8x^3y=0.$$

Определим замену из первого условия (6): $t=-C\int 2xdx=-Cx^2$. Полагая $C=-1$, получаем $t=x^2$. Можно убедиться в том, что удовлетворяются и последние два условия. Так, например, для первого из них, выполняется равенство $\frac{1}{16x^4}\left(-24x^2\right)-\left(\frac{3}{x}+2x\right)\left(-\frac{1}{2x}\right)=1=const$.

Подставляя эту замену в уравнение (3), получаем

$$\dddot{y}-\ddot{y}+\dot{y}-y=0.$$

Его общее решение $y=C_1e^t+C_2\sin t+C_3\cos t$ и, соответственно, решение данного уравнения $y=C_1e^{x^2}+C_2\sin x^2+C_3\cos x^2$.

Такой приём нетрудно распространить на уравнения любого порядка. Рассмотрим, например, уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 .$$

Здесь $p_n = \frac{a_n}{x^n}$ и тогда нам требуется проверить только замену $t = C\sqrt[n]{a_n}\int\frac{dx}{x} = C\sqrt[n]{a_n}\ln x$. Если положить $C = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$, то $t = \ln x$ и $x = e^t$. Находим производные:

$$\begin{aligned} &y' = e^{-t}\dot{y}; \\ &y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}); \\ &y''' = e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}); \\ &\text{.................................} \end{aligned} .$$

Замечаем, что после такой замены уравнение Эйлера принимает вид

$$b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + b_n y = 0 ,$$

где постоянные коэффициенты $b_0, ..., b_n$ выражаются через постоянные коэффициенты в уравнении Эйлера, т. е. уравнение Эйлера является приводимым [2]. Аналогично можно проинтегрировать и уравнение Чебышева.

Кроме того, можно подобрать функцию $u(x)$ в замене $y = uz$, где $z(x)$ - искомая функция, а вид $u(x)$ определяется из условия приведения. Рассмотрим это на примере уравнения [1]

$$y^{(IV)} + 4y''' ctgx - 6y'' - 4y' ctgx + y = 0 .$$

Положим $y = z\sin^k x$, а параметр $k = -1$ определим из условия приведения. Тогда получаем уравнение для функции z

$$z^{(IV)} = 0 \Rightarrow y = (C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4)\frac{1}{\sin x} .$$

Рассмотрим ещё один приём на примере уравнения (1) приведения его к уравнению с постоянными коэффициентами. Решение будем искать в виде $y = uv$. Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем

$$u''' + u''\left(p_1 + \frac{3v'}{v}\right) + u'\left(p_2 + 2p_1\frac{v'}{v} + 3\frac{v''}{v}\right) +$$

$$+ u\left(p_3 + p_2\frac{v'}{v} + p_1\frac{v''}{v} + \frac{v'''}{v}\right) = 0. \qquad (7)$$

Чтобы уравнение (7) было уравнением с постоянными коэффициентами должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} &p_1 + \frac{3v'}{v} = C_1; \\ &p_2 + 2p_1\frac{v'}{v} + 3\frac{v''}{v} = C_2; \\ &p_3 + p_2\frac{v'}{v} + p_1\frac{v''}{v} + \frac{v'''}{v} = C_3. \end{aligned} \qquad (8)$$

Интегрируя первое из условий (8), находим

$$v = \exp\left(-\frac{1}{3}\int p_1 dx + \frac{C_1}{3}x\right). \qquad (9)$$

Если подставить выражение (9) в два последних условий (8), то получим достаточные условия приведения для этого подхода. Не нарушая общности, произвольную постоянную C_1 можно положить равную нулю и тогда достаточные условия приведения при такой замене примут вид

$$\begin{aligned} &p_2 - \frac{1}{3}p_1^2 - p_1' = const; \\ &p_3 - \frac{1}{3}p_2 p_1 + \frac{2}{27}p_1^3 - \frac{1}{3}p_1'' = const. \end{aligned} \qquad (10)$$

В качестве примера проинтегрируем уравнение

$$y''' - 3\cos x y'' + 3\left(\cos^2 x + \sin x\right)y' + \cos x\left(1 - \cos^2 x - 3\sin x\right)y = 0.$$

Проверим выполнение условий (10):

$$p_2 - \frac{1}{3}p_1^2 - p_1' = 3\cos^2 x + 3\sin x - 3\cos^2 x - 3\sin x = 0.$$

Аналогично, получаем $p_3 - \frac{1}{3}p_2 p_1 + \frac{2}{27}p_1^3 - \frac{1}{3}p_1'' = 0$. Условия выполняются, поэтому используем подстановку $y = ue^{\sin x}$. В силу того, что все константы равны нулю, для функции u получаем уравнение (можно это проверить и непосредственно)

$$u''' = 0 \;\Rightarrow\; u = C_1 + C_2 x + C_3 x^2,$$

т. е. общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x\right) e^{\sin x}.$$

Рассмотренные приёмы позволяют расширить класс интегрируемых линейных дифференциальных уравнений и могут быть использованы в том или ином объёме в учебном процессе.

Литература

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука. - 1976. - 576 с.

2. Сканави М. И. О приводимых линейных дифференциальных уравнениях // Научно – методические статьи по математике.- М.: Высшая школа. – 1972. – Вып. 2. – С. 78-80.
3. Улитин Г. М. , Картунов А. Н. Приведение линейных дифференциальных уравнений к уравнениям с постоянными коэффициентами. В сб.: Наука – практика. Донецк: ДГТУ – 1998. - Вып. 3. - С. – 52-56.