

УДК 539.3

Неклюдов М. В., магістр  
АДІ ДВНЗ «ДонНТУ», м. Горлівка

### ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ШАРУ З ПРЯМОКУТНИМ ОТВОРОМ

*В роботі розглядається застосування для розв'язання поставленої задачі одного з варіантів методу граничних елементів (МГЕ) – методу фіктивних навантажень (МФН)[1]. Наведені результати розрахунків при зміні геометричних параметрів задачі, зроблено аналіз напружено-деформованого стану. Результати роботи можуть бути використані при розрахунках складних штучних споруд на автомобільних дорогах.*

#### **Вступ**

До проблеми, що розглядається в роботі, приводять задачі, які виникають у процесі проектування та експлуатації тунелів мілкого закладання. Такі складні штучні споруди влаштовують на автомобільних дорогах на території міста та у гірській місцевості. Задачі такого типу у доступній автору літературі не знайдені, тобто визначення напружено-деформованого стану (НДС) пружного шару з отворами – недосліджена проблема, яку слід визнати актуальною.

Для розв'язання таких задач застосовують математичний апарат теорії пружності. Але отримання аналітичного рішення при заданих умовах суміжне з великими труднощами або неможливе взагалі чи незручне для подальшого використання в інженерних задачах. В таких випадках застосовують чисельні методи, такі як *метод скінчених різниць* (МСР) чи *метод скінчених елементів* (МСЕ). Альтернативними чисельними методами є *методи граничних елементів*, які на даний час є одними з найбільш прогресивних у процесі розв'язання прикладних задач. Ці методи використовуються як в механіці деформівного твердого тіла [1-3], так і в гідро- та аеромеханіці [4, 5], в гірничій справі [1], електродинаміці і т. д. За їх допомогою розв'язують як статичні, так і динамічні задачі в лінійній та нелінійній постановці.

#### **Мета роботи**

Задача, що розглядається, відноситься до *плоскої задачі* теорії пружності в *лінійній постановці*. Метою роботи є визначення НДС пружного шару з отвором при змішаних граничних умовах.

#### **Основна частина**

В даній роботі аналізується НДС нескінченного шару  $|x| \leq \infty$ , який при побудові програми обрізається до розміру  $|x| \leq L/2$ , оскільки при використанні МФН неможливо моделювати таку нескінченну область, як шар. Розмір  $L$  вибирається так, що НДС при  $|x| = L/2$  близький до НДС на нескінченності  $|x| = \infty$ . При виборі граничних умов на бокових гранях досліджуваної області враховувалось, що напруження й переміщення прямують до нуля зі збільшенням координати  $x$ . Автор випробував граничні умови  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_{xy} = 0$  (вільна границя) та  $u_x = 0$ ,  $\sigma_{xy} = 0$  (періодична задача). Найбільші напруження на контурі отвору в цих випадках відрізняються несуттєво ( $3 \div 5\%$ ).

Шар (рис.1) ослаблений квадратним підкріпленням або невідкріпленням отвором і знає дії абсолютно жорсткого штампа або рівномірно розподіленого навантаження. В задачі про штамп задавалось його вертикальне переміщення  $u_0 = 0,01$  м, далі визначався головний вектор реактивних напружень під штампом  $R$  та інтенсивність розподіленого навантаження  $q = R/l$ , що використовувалось в задачі про навантаження.

Граничні умови прийняті такі:

- нижня грань шару ( $y = 0$ ) жорстко закріплена ( $u_x \equiv u_s = 0, u_y \equiv u_n = 0$ ; локальна система координат, пов'язана з кожним елементом, позначена через  $s, n$ );
- на верхній грані під штампом (якщо діє штамп) задане вертикальне переміщення (в розрахунках приймалось  $u_n = u_0 = 0,01$  м,  $|x| \leq l/2, y = H$ ); дотичні напруження приймались рівними нулю на всій грані ( $\sigma_s \equiv \sigma_{xy} = 0, |x| \leq l/2, y = H$ ), а нормальні відсутні за межами штампу ( $\sigma_n \equiv \sigma_y = 0, |x| > l/2, y = H$ );
- при дії на шар рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю  $q$  маємо таку умову:  $\sigma_y = -q, |x| \leq l/2, y = H$ ;
- на бокових гранях  $|x| = l/2$  прийняті такі умови:  $u_x \equiv u_s = 0, \sigma_s \equiv \sigma_{xy} = 0$ .
- На контурі отвору навантаження відсутнє; якщо отвір підкріплений, то на внутрішньому контурі підкріплення навантаження відсутнє, розрив напружень чи переміщень між отвором та підкріпленням неможливий.

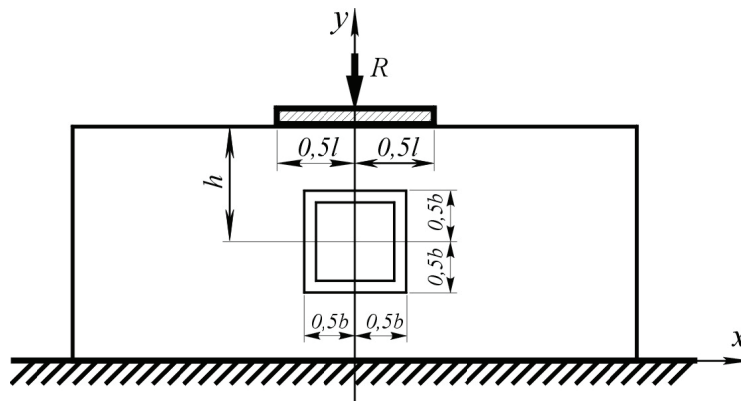


Рис. 1. Схема досліджуваної області шару з навантаженням

Значення геометричних параметрів приймались такі:  $L = 36$  м,  $H = 15$ ,  $h = 7,5$  м,  $b = 2,5; 2,75; 3$  м при  $l = 6$  м та  $l = 6; 6,25; 6,5$  м, при  $b = 3$  м, товщина підкріплення завжди  $0,3$  м. Матеріали шару та підкріплення ізотропні. Пружні характеристики для шару:  $E_1 = 1,5 \times 10^3$  МПа ( $G_1 = 600$  МПа),  $\nu_1 = 0,25$ ; для підкріплення  $E_2 = 3 \times 10^4$  МПа ( $G_2 = 1,25 \times 10^4$  МПа),  $\nu_2 = 0,2$ , тобто  $E_2/E_1 = 20$ .

При розрахунках границі шару та підкріплення розбивались на сукупність прямолінійних елементів довжиною  $2a_i = 0,125$  м,  $i = 1, \dots, N$ . Загальна кількість граничних елементів в разі підкріпленого отвору складає 1392 (для побудови поля напружень з метою згущення сітки точок границі підкріплення та отвору ділились на елементи довжиною  $2a_i = 0,1$  м).

Фіктивні навантаження ( $P_s^j = const$  — дотичне,  $P_n^j = const$  — нормальне) на  $j$ -му елементі границі, які використовуються при розв'язанні задачі, до розв'язання не відомі. Напруження та переміщення на  $i$ -му елементі (в локальній системі координат  $s, n$ , пов'язаній з  $i$ -им елементом) можна записати так

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^N (A_{ss}^{ij} P_s^j + A_{sn}^{ij} P_n^j), \quad \sigma_n^i = \sum_{j=1}^N (A_{ns}^{ij} P_s^j + A_{nn}^{ij} P_n^j); \quad (1)$$

$$u_s^i = \sum_{j=1}^N (B_{ss}^{ij} P_s^j + B_{sn}^{ij} P_n^j), \quad u_n^i = \sum_{j=1}^N (B_{ns}^{ij} P_s^j + B_{nn}^{ij} P_n^j), \quad (2)$$

де  $A_{ss}^{ij}, \dots, B_{nn}^{ij}$  — відомі граничні коефіцієнти впливу. Детально МФН, який ґрунтується на розв'язку задачі Кельвіна, описаний у [1].

Якщо в задачі на всій границі тіла задані напруження, то ліві частини в (1) — відомі величини, і ці залежності утворюють систему з  $2N$  лінійних рівнянь з  $2N$  невідомими  $P_s^j, P_n^j$ .

Якщо заданими є переміщення, то ліві частини в (2) – відомі. Якщо заданими є одне напруження та одне переміщення, то використовується по одному рівнянню з (1) і (2) відповідно. Розв’язавши отримані системи рівнянь, визначаємо  $P_s^j, P_n^j$ , а далі за формулами, схожими з (1) та (2) [1], знаходимо напруження чи переміщення в будь-якій точці всередині тіла.

### Напружений стан (НС) пружного шару

Розглянемо спочатку НС під штампом. У таблиці 1 наведені напруження  $\sigma_{yy}$  (ліва половина таблиці) та  $\sigma_{xx}$  (права половина) в разі непідкріпленого отвору (“чисельники”) та в разі підкріпленого отвору (“знаменники”) на елементах 1, 9, 17 та 24 (крайній), рахуючи від середини.

Напруження  $\sigma_{yy}$  поступово зростає від середини до краю, причому при збільшенні розмірів отвору величини цих напружень в усіх точках спадають порівняно з попереднім, меншим отвором; напруження на середніх точках змінюються більш суттєво, ніж на крайніх. Крім того, в разі підкріпленого отвору напруження більші за відповідні при не підкріпленому.

Напруження  $\sigma_{xx}$  більш стабільні при збільшенні розмірів отвору, причому при відсутності підкріплення в середній частині вони збільшуються при збільшенні розмірів отвору, а на крайній частині – спадають; в разі підкріпленого отвору – постійно зменшуються зі збільшенням отвору.

Для випадку збільшення розміру штампа ( $l = 6,25 \text{ м}$ ,  $l = 6,5 \text{ м}$ ,  $l = 6,75 \text{ м}$ ) при сталій ширині отвору  $b = 6 \text{ м}$  напруження  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  спадають як у разі відсутності підкріплення, так і при його наявності. Данні не приводяться.

Таблиця 1

Напруження  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  під штампом

| № елемента | x, м   | l = 6 м |           |         | l = 6 м |           |         |
|------------|--------|---------|-----------|---------|---------|-----------|---------|
|            |        | b = 5 м | b = 5,5 м | b = 6 м | b = 5 м | b = 5,5 м | b = 6 м |
| 1          | 0.0625 | -0.654  | -0.508    | -0.360  | -1.257  | -1.269    | -1.274  |
|            |        | -1.313  | -1.214    | -1.089  | -1.313  | -1.214    | -1.089  |
| 9          | 1.0625 | -0.823  | -0.691    | -0.555  | -1.310  | -1.319    | -1.322  |
|            |        | -1.434  | -1.352    | -1.247  | -1.434  | -1.352    | -1.247  |
| 17         | 2.0625 | -1.413  | -1.314    | -1.211  | -1.633  | -1.630    | -1.626  |
|            |        | -1.914  | -1.869    | -1.810  | -1.914  | -1.869    | -1.810  |
| 24         | 2.9375 | -8.567  | -8.433    | -8.306  | -5.505  | -5.454    | -5.411  |
|            |        | -9.583  | -9.586    | -9.588  | -9.583  | -9.586    | -9.588  |

Тепер розглянемо дію навантаження.

Головні вектори R при дії штампа на шар для параметрів  $l = 6 \text{ м}$ ;  $b = 5; 5,5; 6 \text{ м}$  та для  $b = 6 \text{ м}$ ;  $l = 6,25; 6,5; 6,75 \text{ м}$  виявились рівні -7,956; -8,79; -8,07; -8,294; -8,515; -8,748 МН/м, а еквівалентне розподілене навантаження  $q = 1,326; 1,465; 1,345; 1,327; 1,31; 1,296 \text{ МН/м}^2$  відповідно для випадку непідкріпленого отвору. Для підкріпленого отвору отримані такі величини: головні вектори  $R' = -13,038; -12,672; -12,192; -12,481; -12,766; -13,055 \text{ МН/м}$ ; еквівалентне розподілене навантаження  $q' = -2,173; -2,112; -2,032; -1,997; -1,964; -1,934 \text{ МН/м}^2$ .

У таблиці 2 наведені напруження  $\sigma_{xx}$  в разі непідкріпленого отвору (“чисельники”) та в разі підкріпленого отвору (“знаменники”) на елементах 1, 9, 17 та 24 (крайній), рахуючи від середини.

Напруження  $\sigma_{xx}$  при фіксованій ширині смуги навантаження  $l = 6 \text{ м}$  та збільшенні розмірів отвору  $b = 5; 5,5; 6 \text{ м}$  поступово спадає від середини до краю, причому при збільшенні розмірів отвору величини цих напружень у відповідних точках спочатку зростають в середній частині ділянки, а потім спадають на крайній частині порівняно з попереднім, меншим отвором; в разі підкріпленого отвору напруження більші за відповідні при не підкріпленому.

При  $b = 6$  м напруження  $\sigma_{xx}$  зі збільшенням ширини смуги навантаження  $l = 6,25; 6,5; 6,75$  м у відповідних точках поступово спадають і завжди менші порівняно з величинами в цих точках для ширини смуги навантаження  $l = 6$  м. Для випадку  $b = 6$  м,  $l = 6$  м напруження у всіх точках при непідкріпленому отворі менші за відповідні при підкріпленому, в усіх інших випадках картина змінюється на зворотну.

Таблиця 2

| Напруження $\sigma_{xx}$ під смугою навантаження |        |           |             |           |
|--|--------|-----------|-------------|-----------|
| № елемента                                       | $x, м$ | $l = 6 м$ |             |           |
|  |        | $b = 5 м$ | $b = 5,5 м$ | $b = 6 м$ |
| 1  | 0,0625 | -1,897    | -2,342      | -2,423    |
|  |        | -2,061    | -2,153      | -2,262    |
| 9  | 1,0625 | -1,783    | -2,183      | -2,243    |
|  |        | -2,011    | -2,075      | -2,152    |
| 17   | 2,0625 | -1,519    | -1,808      | -1,808    |
|  |        | -1,902    | -1,906      | -1,911    |
| 24   | 2,9375 | -1,008    | -1,155      | -1,106    |
|  |        | -1,400    | -1,365      | -1,320    |

Розглянемо НС по контуру отвору.

### 1. Отвір не має підкріплення

Спочатку розглянемо дію штампа. У таблиці 3 наведені контурні напруження  $\sigma_{xx}$  для верхньої ( $y = 10; 10,25; 10,5$  м) та нижньої ( $y = 5; 4,75; 4,5$  м) поверхонь отвору для трьох різних розмірів (див. “чисельники”). Данні приводяться для декількох з 48-ми елементів, розташованих симетрично щодо ширини отвору. Елементи 20, 22, 24 – останні для  $b = 5; 5,5; 6$  м відповідно.

Картина напружень по верхній і нижній поверхні відрізняється кількісно та якісно, але на обох поверхнях напруження розтягуючі, лише на останньому елементі нижньої та двох останніх елементах верхньої поверхні напруження стискаючі. Така картина очікувана, оскільки в цих точках відбувається перехід до стану стиснення вертикальної бічної поверхні отвору.

Видно, що максимальне напруження на верхній поверхні, яке має місце на першому елементі (рахуючи від осі симетрії), несуттєво зменшується зі збільшенням отвору. Аналогічна тенденція спаду напружень на нижній поверхні більш виражена, але слід відмітити, що тут напруження по ширині отвору майже не змінюються, за винятком переходу від розтягання до стиску на останньому елементі.

Такий саме розподіл напружень має місце при збільшенні ширини штампа ( $l = 6; 6,25; 6,5$  м) при фіксованих розмірах отвору  $b = 6$  м. Максимальне напруження на верхній поверхні зменшується зі збільшенням штампа від 1,163 МПа до 1,083 МПа. Максимальні напруження на нижній поверхні зростають з 0,248 МПа до 0,256 МПа. Детально данні не приводяться.

Тепер розглянемо дію навантаження (див. “знаменники” табл. 3). Можна бачити, що розподіл контурних напружень  $\sigma_{xx}$  має ідентичний характер. Напруження на верхній поверхні від дії навантаження всюди, за винятком декількох точок, більші порівняно з дією штампа. Напруження на нижній поверхні від дії навантаження всюди, за винятком випадку  $b = 5$  м, більші порівняно з дією штампа. При  $b = 5$  м в усіх точках менші.

При збільшенні ширини штампа ( $l = 6; 6,25; 6,5$  м) при фіксованих розмірах отвору  $b = 6$  м напруження на верхній поверхні майже не змінюються (максимальне збільшується зі збільшенням штампа від 1,730 МПа до 1,733 МПа). Максимальні напруження на нижній поверхні зростають з 0,266 МПа до 0,278 МПа.

Таблиця 3

Контурні напруження  $\sigma_{xx}$  для верхньої та нижньої поверхонь отвору

| № елемента         | $x, м$                         | $b = 5 м$ |          | $b = 5,5 м$ |             | $b = 6 м$  |            |
|--------------------|--------------------------------|-----------|----------|-------------|-------------|------------|------------|
|                    |                                | $y=10 м$  | $y'=5 м$ | $y=10,25 м$ | $y'=4,75 м$ | $y=10,5 м$ | $y'=4,5 м$ |
| 1                  | 0,0625                         | 1,241     | 0,336    | 1,226       | 0,269       | 1,201      | 0,209      |
|                    |                                | 1,353     | 0,297    | 1,668       | 0,284       | 1,727      | 0,221      |
| 5                  | 0,5625                         | 1,211     | 0,338    | 1,202       | 0,272       | 1,183      | 0,212      |
|                    |                                | 1,304     | 0,299    | 1,611       | 0,288       | 1,668      | 0,224      |
| 9                  | 1,0625                         | 1,126     | 0,343    | 1,131       | 0,279       | 1,126      | 0,220      |
|                    |                                | 1,174     | 0,304    | 1,458       | 0,295       | 1,515      | 0,233      |
| 13                 | 1,5625                         | 0,955     | 0,347    | 0,992       | 0,288       | 1,014      | 0,231      |
|                    |                                | 0,943     | 0,309    | 1,199       | 0,306       | 1,263      | 0,245      |
| 17                 | 2,0625                         | 0,578     | 0,324    | 0,725       | 0,290       | 0,805      | 0,242      |
|                    |                                | 0,507     | 0,293    | 0,784       | 0,310       | 0,890      | 0,258      |
| 20<br>(22)<br>(24) | 2,4375<br>(2,6875)<br>(2,9375) | -2,071    | -0,358   | -2,340      | -0,340      | -2,597     | -0,312     |
|                    |                                | -2,118    | -0,268   | -2,934      | -0,304      | -3,342     | -0,278     |

Перейдемо до розгляду НДС вертикальної бічної поверхні отвору. Спочатку розглянемо дію штампа (див. “чисельники” табл. 4).

Таблиця 4

Контурні напруження  $\sigma_{yy}$  для бічної поверхні отвору

| елемент       | $l = 6 м$ |             |           | $l = 6,25 м$ | $l = 6,5 м$ | $l = 6,75 м$ |
|---------------|-----------|-------------|-----------|--------------|-------------|--------------|
|               | $b = 5 м$ | $b = 5,5 м$ | $b = 6 м$ | $b = 6 м$    |             |              |
| перший        | -1,965    | -1,758      | -1,553    | -1,599       | -1,646      | -1,694       |
|               | -1,665    | -1,773      | -1,562    | -1,607       | -1,651      | -1,698       |
| проміжний     | -0,997    | -0,888      | -0,784    | -0,804       | -0,823      | -0,844       |
|               | -0,871    | -0,915      | -0,805    | -0,827       | -0,848      | -0,870       |
| передостанній | -2,912    | -2,921      | -2,910    | -2,934       | -2,955      | -2,973       |
|               | -1,948    | -2,305      | -3,238    | -3,299       | -3,357      | -3,417       |
| останній      | -5,177    | -5,290      | -5,369    | -5,388       | -5,402      | -5,409       |
|               | -4,891    | -6,011      | -6,145    | -6,249       | -6,344      | -6,443       |

Найбільші напруження виявляються на першому та останньому елементах, де вони інтенсивно зростають порівняно з середніми; найменші – в усіх розглянутих випадках на п'ятому проміжному елементі, рахуючи знизу (див. табл. 4).

При дії навантаження (див. “знаменники” табл. 4) розподіл напружень має ідентичний характер. Окрім випадку  $b=5 м$  напруження більші за відповідні при дії штампа.

## 2. Отвір підкріплений

З введенням підкріплення картина напружень значно змінюється. Загальне уявлення про розподіл напружень у шарі з вільним отвором та за наявності підкріплення дає аналіз рис. 2, на якому зображено половину центральної частини шару, що займає область  $0 < x \leq 5 м$ ;  $0 < y \leq 15 м$ . Картина напружень відповідає дії штампа шириною  $l = 6 м$  та розміру отвору  $b = 5 м$ . В цілому можна сказати, що з введенням підкріплення напруження  $\sigma_{xx}$  зменшуються, а  $\sigma_{yy}$  – збільшуються. Крім того, можна казати про *концентрацію напружень* коло кутів отвору та на границі штампа. В цих точках напруження можуть сягати значних величин, але їх поява носить локальний характер, не впливає на загальний розподіл напружень, і в

особливих точках, якими є кути отвору, потребує окремих досліджень. Очевидною перевагою варіанта з підкріпленням є значне зменшення зони розтягуючих напружень  $\sigma_{xx}$  в цілому та повна відсутність їх на верхній та нижній границях отвору. Також зникає зона незначних розтягуючих напружень  $\sigma_{yy}$  на нижній границі отвору. Однак, при збільшенні розмірів отвору додатні  $\sigma_{xx}$  все ж таки з'являються в середній третині верхньої границі отвору, про що йдеться далі.

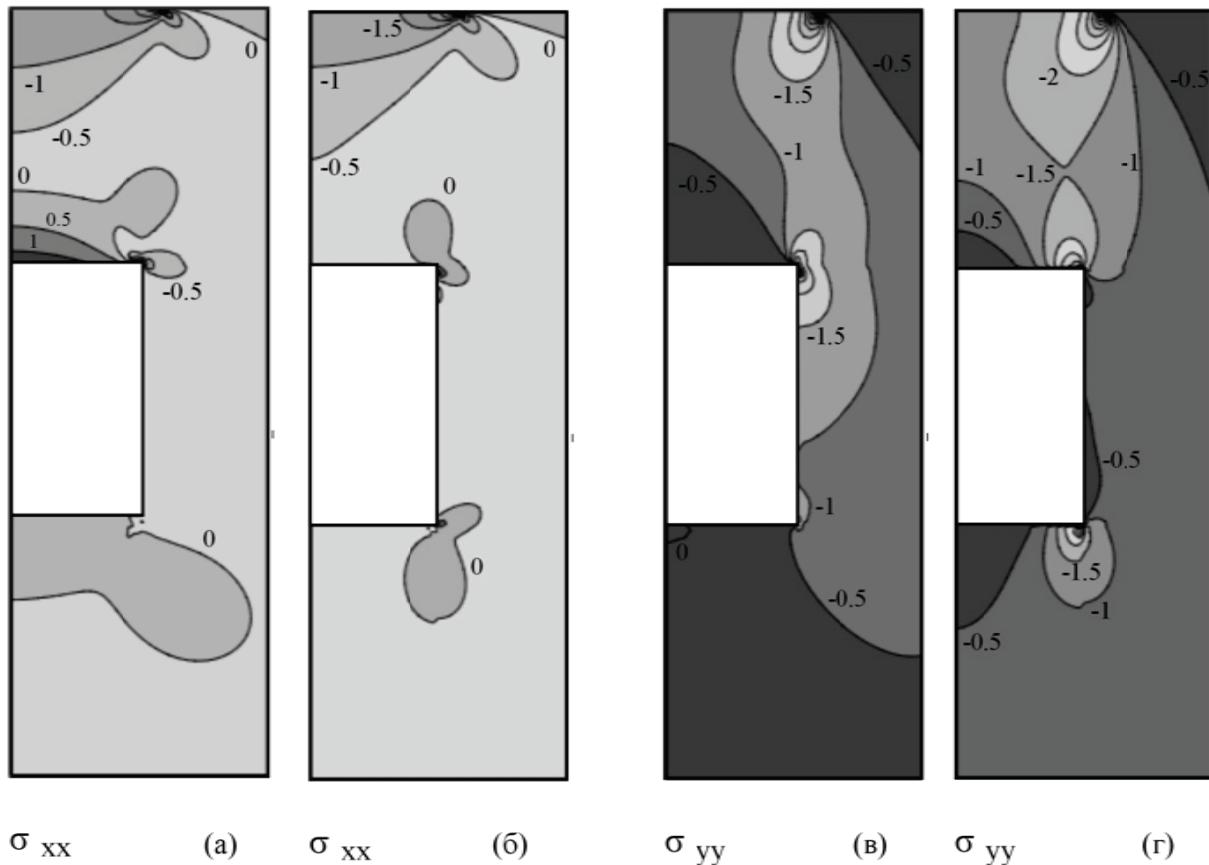


Рис. 2. Напруження  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  при дії штампa на шар з отвором без підкріплення (а, в) та з підкріпленням (б, г); представлена частина шару  $0 < x \leq 5$  м;  $0 < y \leq 15$  м

Перейдемо до кількісного аналізу. Величини напружень та їх розподіл при дії на шар штампa чи розподіленого навантаження відрізняються несуттєво, тому подальший опис для цих варіантів спільний.

При ширині отвору  $b = 5$  м контурні напруження  $\sigma_{xx}$  всюди стискаючі і найбільші на краях нижньої поверхні становлять  $-0,449$  МПа при дії штампa та  $-0,461$  МПа при дії навантаження. Найбільші напруження на верхній поверхні виникають при  $x = 1,8125$  м та дорівнюють  $-0,349$  МПа й  $-0,356$  МПа відповідно.

При збільшенні розмірів отвору ( $b=5,5$ ;  $6$  м) та ширини штампa чи смуги з навантаженням ( $l = 6,25$ ;  $6,5$  м) в середній третині верхньої та нижньої поверхні виникають розтягуючі напруження  $\sigma_{xx}$  (до  $0,081$  МПа при дії штампa та  $0,096$  МПа при дії навантаження). Найбільше стискаюче напруження з усіх розглянутих випадків становить  $-0,471$  МПа, тобто значно менше, ніж при відсутності підкріплення.

Контурні напруження  $\sigma_{yy}$  всюди стискаючі й несуттєво відрізняються на вертикальній бічній поверхні отвору при збільшенні отвору чи розмірів штампa (або смуги навантаження). Найбільші напруження тут виникають на першому ( $\sim -0,7$  МПа) та останньому ( $\sim -0,8$  МПа) елементах, проміжні сягають  $-0,5 \div -0,65$  МПа, тобто розподіл їх стає більш рівномірним, а величини менші порівняно з непідкріпленим отвором.

На верхній та нижній поверхнях при контакті з підкріпленням напруження  $\sigma_{yy}$  можуть сягати значних величин. Наприклад, при  $b = 5$  м та  $l = 6$  м на верхній поверхні вони зростають з  $-0,122$  МПа посередині до  $-3,722$  МПа на крайньому елементі; на нижній поверхні – з  $-0,028$  МПа до  $-3,67$  МПа відповідно.

#### НДС підкріплення

Детальне вивчення НДС виявило в середніх проміжках горизонтальних та вертикальних частин підкріплення розташування ізоліній напружень, близьке до паралельного, тому напруження на контурах цих структурних елементів достатньо характеризують їх НДС в цілому.

Верхня горизонтальна частина підкріплення зазнає згину з розтяганням. Такий висновок робимо з аналізу таблиці 5, де наведені напруження та переміщення на деяких елементах границі верхньої частини підкріплення при дії штампа. Напруження, як всюди, подані у МПа, переміщення – в мм.

Таблиця 5

Напруження  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xx}$  та переміщення  $u_x$ ,  $u_y$  точок верхньої частини підкріплення

| № елемента | x, м | поверхня контакту, $y = 10$ м |               |               |        |        | вільна поверхня, $y = 9,7$ м |        |               |
|------------|------|-------------------------------|---------------|---------------|--------|--------|------------------------------|--------|---------------|
|            |      | $\sigma_{yy}$                 | $\sigma_{xy}$ | $\sigma_{xx}$ | $u_y$  | $u_x$  | $u_x$                        | $u_y$  | $\sigma_{xx}$ |
| 1          | 0,05 | -0.122                        | 0.023         | 0.551         | -7.410 | 0,0007 | 0.018                        | -7.396 | 10.763        |
| 4          | 0,35 | -0.139                        | 0.165         | 0.330         | -7.342 | 0,004  | 0.123                        | -7.328 | 10.796        |
| 7          | 0,65 | -0.190                        | 0.320         | -0.190        | -7.168 | 0,004  | 0.229                        | -7.154 | 10.831        |
| 10         | 0,95 | -0.299                        | 0.499         | -0.886        | -6.882 | -0,003 | 0.335                        | -6.869 | 10.707        |
| 13         | 1,25 | -0.512                        | 0.712         | -1.413        | -6.477 | -0.015 | 0.438                        | -6.465 | 10.012        |
| 16         | 1,55 | -0.903                        | 0.957         | -0.921        | -5.952 | -0.028 | 0.529                        | -5.940 | 7.798         |
| 19         | 1,85 | -1.591                        | 1.199         | 2.649         | -5.328 | -0.024 | 0.584                        | -5.315 | 2.089         |
| 20         | 1,95 | -1.923                        | 1.252         | 5.402         | -5.109 | -0.010 | 0.587                        | -5.097 | -1.005        |
| 22         | 2,15 | -2.728                        | 1.108         | 13.506        | -4.700 | 0.056  | 0.556                        | -4.654 | -17.161       |
| 23         | 2,25 | -3.002                        | 0.864         | 15.318        | -4.541 | 0.109  |                              |        |               |
| 24         | 2,35 | -3.156                        | 0.669         | 14.264        | -4.427 | 0.162  |                              |        |               |
| 25         | 2,45 | -3.722                        | 0.616         | 12.746        | -4.362 | 0.211  |                              |        |               |

Зі збільшенням розмірів отвору порівняно невеликі стискаючі напруження  $\sigma_{xx}$  в середній третині на поверхні контакту спадають з  $-1,078$  МПа до  $-0,918$  МПа, потім зі збільшенням штампа зростають до  $-1,117$  МПа (наведені мінімальні величини).

НДС та розподіл напружень у нижній частині підкріплення ідентичний, але абсолютні значення напружень суттєво менші, тому детальні дані для нижньої частини не приводяться. Так, наприклад, найбільші розтягуючі напруження на вільній поверхні верхньої частини підкріплення коливаються коло значень  $10 \div 11$  МПа, на вільній поверхні нижньої частини підкріплення – коло значень  $5 \div 6$  МПа.

Відмітимо, що стискаючі напруження  $\sigma_{xx}$  в середній третині на поверхні контакту для нижньої частини підкріплення по аналогії з верхньою частиною спадають з  $-1,413$  МПа до  $-1,219$  МПа, потім зі збільшенням штампа зростають до  $-1,32$  МПа, тобто за абсолютними значеннями вони більші порівняно з верхньою частиною.

Дія навантаження не приводиться, оскільки принципових змін в цьому варіанті не спостерігається. Зазначимо тільки, що екстремальні значення напружень в цьому випадку можуть бути більші приблизно на 15% порівняно з дією штампа.

Бічна вертикальна частина підкріплення знаходиться в стані стиснення: в середній її частині ( $6$  м  $< y < 9$  м) напруження  $\sigma_{yy}$  зростають при прямуванні знизу вверх, як це показано у таблиці 6, де наведені напруження від дії штампа. Дія розподіленого навантаження принципово не відрізняється. Схожий розподіл має місце при збільшенні ширини штампа (смуги

навантаження) при сталому розмірі отвору  $b=5,5$  м; при цьому напруження дещо зростають (найбільші становлять  $-10,846$  МПа).

Таблиця 6

Напруження  $\sigma_{yy}$  в середньому проміжку вертикальної частині підкріплення

| № ел-та | у, м   | $l = 6$ м                    |                            |                               |                             |                            |                            |
|---------|--------|------------------------------|----------------------------|-------------------------------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|
|         |        | $b = 5$ м                    |                            | $b = 5,5$ м                   |                             | $b = 6$ м                  |                            |
|         |        | поверхня контакту, $x=2,5$ м | вільна поверхня $x'=2,2$ м | поверхня контакту, $x=2,75$ м | вільна поверхня $x'=2,45$ м | поверхня контакту, $x=3$ м | вільна поверхня $x'=2,7$ м |
| 7       | 6.0625 | -6.938                       | -8.690                     | -7.713                        | -8.241                      | -7.997                     | -7.973                     |
| 10      | 6.8125 | -8.648                       | -8.388                     | -8.782                        | -8.470                      | -8.739                     | -8.460                     |
| 13      | 7.5625 | -9.346                       | -8.898                     | -9.413                        | -9.031                      | -9.338                     | -9.036                     |
| 16      | 8.3125 | -9.864                       | -9.535                     | -10.055                       | -9.564                      | -10.034                    | -9.518                     |
| 18      | 8.8125 | -9.568                       | -10.542                    | -10.200                       | -10.196                     | -10.424                    | -9.937                     |

НС кутової області досить складний. На рис. 3 наведені поля напружень  $\sigma_{xx}$  (а) та  $\sigma_{yy}$  (б) для кутового фрагменту розмірами  $1$  м  $\times$   $1$  м. Для зручності сприйняття нанесена сітка, розмір якої відповідає розмірам граничних елементів.

При додаткових розрахунках контури отвору та підкріплення ділились на елементи довжиною  $2a_i = 0,1$  м, щоб утворити зручну сітку. За технікою граничних елементів надійні результати обчислень можна отримати в центрах граничних елементів [1]. При побудові поля напружень значення на кінцях граничних елементів знаходились шляхом інтерполяції чи екстраполяції.

Показово виникнення концентрації стискаючих напружень у внутрішньому куті розглядуваної області та зони розвантаження на поверхні контакту у стиснутій вертикальній частині підкріплення, що пояснюється дією згину горизонтальної частини. Найбільші по абсолютній величині стискаючі напруження у внутрішньому куті виявлені такі:  $\sigma_{xx} = -17,381$  МПа,  $\sigma_{yy} = -29,62$  МПа.

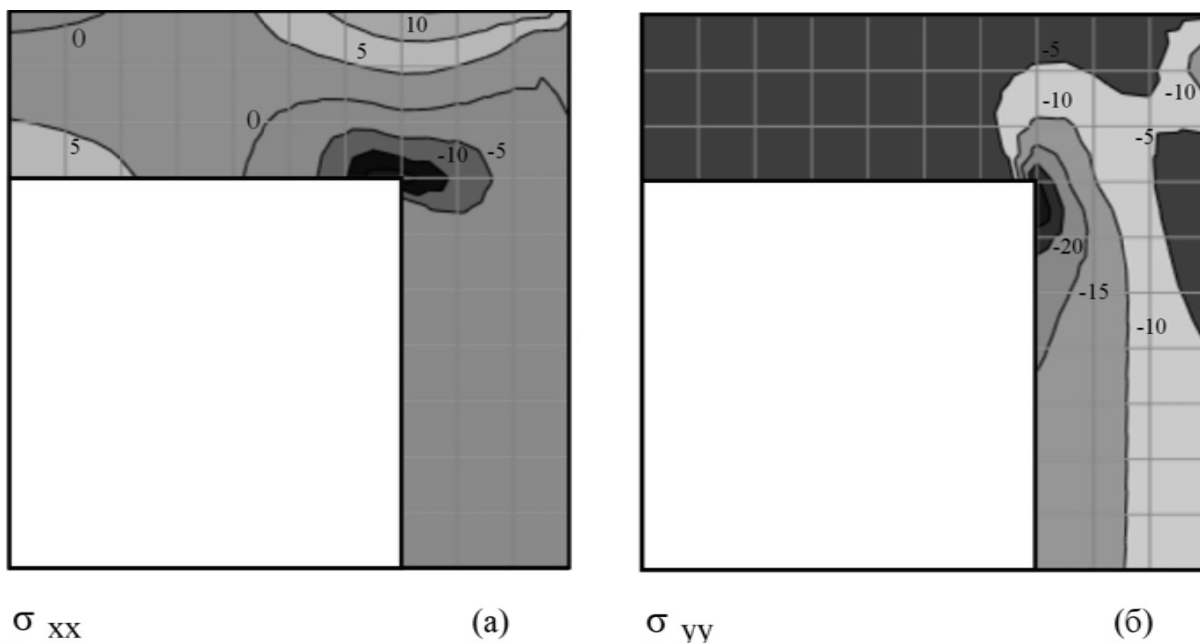


Рис. 3. Напруження  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  у верхній кутовій області підкріплення  $1 \times 1$  м



Аналогічна картина виявлена при дослідженні нижньої кутової області підкріплення. Тут відповідні екстремальні (мінімальні) напруження виявились такими:  $\sigma_{xx} = -9,291 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{yy} = -20,39 \text{ МПа}$ ; тобто меншими по абсолютній величині порівняно з верхньою областю.

Взагалі концентрація напружень у вершинах кутів підкріплення та у кутах отвору потребує окремого розгляду, що виходить за межі цієї роботи. Зазначимо, що у випадку отвору круглої форми ця проблема зникає.

### ***Висновки та перспективи подальших досліджень***

Аналіз наукових публікацій виявляє відсутність дослідження задач про навантаження шару з підкріпленими чи не підкріпленими отворами незважаючи на їх практичну цінність. Подана робота, можливо, є першою спробою розв'язати подібні задачі, що говорить про наукову новизну. Результати цієї роботи та подальше її розвинення можуть бути використані при розрахунках таких складних штучних споруд, як тунелі, що зустрічаються на автомобільних дорогах.

Виявлено позитивний вплив підкріплення на розподіл напружень у шарі навколо отвору, а саме у зменшенні зони розтягуючих напружень та при певних розмірах отвору практично повної відсутності розтягуючих напружень на його контурі.

Порівняння результатів розрахунків дає можливість стверджувати, що дія на шар розподіленого навантаження в усіх випадках більш небезпечна за дію штампа.

Перспективу подальших досліджень складає урахування власної ваги матеріалів шару та підкріплення при розв'язанні цих та аналогічних задач, врахування виникнення пластичних деформацій.

### ***Список літератури***

1. Крауч С., Старфілд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. — М.: Мир, 1987. — 328 с.
2. Теллес Д.К.Ф. Применение метода граничных элементов для решения неупругих задач. — М.: Стройиздат, 1987. — 161 с.
3. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Методы граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. — 296 с.
4. Бенерджи П., Баттерфілд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. — М.: Мир, 1984. — 494 с.
5. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. — М.: Мир, 1987. — 524 с.
6. Громадка П.Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. — М.: Мир, 1990. — 304 с.

Стаття надійшла до редакції 15.04.08

© Неклюдов М. В., 2008