D 56

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Ю.М. Добровольський

Навчальний посібник

ОСНОВИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА І
(МНОЖИНИ, ЛОГІКА ТА ТЕОРІЯ ГРУП)

ЧАСТИНА ІІ
(Логічні функції)

(для студентів технічних вищих навчальних закладів всіх форм навчання, за напрямками, програмою яких передбачено викладання основ дискретної математики)

Донецьк ДонНТУ 2010

УДК 519.4 (075.8)

Основи дискретної математики. Частина I: «Множини, логіка та теорія груп ». Частина II: «Логічні функції». Навчальний посібник/ Ю.М. Добровольський. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2010. – 104 с.

У навчальному посібнику послідовно викладені основні питання теорії множин і логіки, що починаються з загальнодоступних і завершуються абстрактними. Теоретичний матеріал подається з великою кількістю прикладів.

У першій частині посібника викладені основні поняття теорії множин і операції з ними, поняття про вектори і проекції множин, їх добутки, відображення, перетворення. Описані алгебраїчні системи і деякі операції в них, поняття групи - як однієї із найбільш важливих об'єктів дискретної математики та алгебри в цілому.

У другій частині подано основи математичної логіки. Особливе місце посідає поняття логічної функції. Розглянуто шістнадцять основних логічних функцій і різні перетворення з ними. Особливу увагу звернено на диз'юнктивні і кон'юнктивні нормальні форми логічних функцій та їх мінімізацію.

Посібник розрахований на студентів технічних вищих навчальних закладів всіх форм навчання, за напрямками, програмою яких передбачено викладання основ дискретної математики.

„Рекомендовано Вченою радою Донецького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів всіх форм навчання, за напрямками, програмою яких передбачено викладання основ дискретної математики”. Протокол № 7 від “ 22 ” жовтня 2010 р.

Автор: Ю.М. Добровольський,

Відп. за випуск: В.М. Павлиш, д.т.н., професор.

© Ю. М. Добровольський, 2010

© ДВНЗ «ДонНТУ», 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Ю.М. Добровольський

Навчальний посібник

ОСНОВИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА І
(МНОЖИНИ, ЛОГІКА ТА ТЕОРІЯ ГРУП)

ЧАСТИНА ІІ
(Логічні функції)

(для студентів технічних вищих навчальних закладів всіх форм навчання, за напрямками, програмою яких передбачено викладання основ дискретної математики)

Розглянуто
на засіданні кафедри ОМ та П
протокол № 2 від “ 17 ” вересня 2010 р.

Затверджено
навчально-видавничою радою ДонНТУ
протокол № 4 від “ 07 ” жовтня 2010 р.

Донецьк ДонНТУ 2010

ЗМІСТ

Частина 1. Множини

1.1. Вступ

Обмін інформацією в системах комп'ютерного опрацювання інформації здійснюється за допомогою сигналів, якими можуть бути будь-які фізичні величини - струм, напруга, магнітні стани, світлові хвилі.

Фізичні величини являють собою функції часу або певний розподіл сигналів у просторі. Параметри часових функцій, що передаються, - таких як частота, амплітуда, фаза, тривалість імпульсів або просторовий розподіл сигналів, послідовність імпульсів, точок на зображенні, поєднання кольорів на екрані і т.п., - називаються інформаційними параметрами сигналів.

Розрізняють такі види сигналів:

1. Аналоговий або неперервний.

Його параметри в середині заданого діапазону можуть набувати будь-яких значень у довільний момент часу. Ці параметри є інформаційними, оскільки вони передають інформацію про стан об'єкта, який вони відображають.

2. Дискретний сигнал.

Параметри такого сигналу можуть набувати лише певних значень у дискретні моменти часу. При цьому важливим є не рівень сигналу, а його наявність.

Існують два види дискретних сигналів.

1. Дискретні сигнали, отримані способом дискретизації неперервних сигналів.

2. Дискретні сигнали, подані у вигляді кодових комбінацій – слів.

Подання у вигляді слів є найбільш універсальним і поширеним. Воно застосовується для кодування людської мови, у математиці, цифровій електроніці.

Дискретна математика – це наука про способи побудови та ефективного опрацювання послідовностей цілих об'єктів, в окремому випадку літер $\mathbf{a_1a_2 \ldots a_i \ldots a_n}$, породжуваних деяким алфавітом $\mathbf{B}=\{\mathbf{b_1,b_2,\ldots,b_n}\}$, $\mathbf{a_i} \in \mathbf{B}$, які можна розглядати як слова.

Дискретна математика застосовується для електронних цифрових пристроїв і систем, широко також використовується для створення та експлуатації комплексних автоматизованих систем обробки інформації, пакетів прикладних програм, банків даних, мікропроцесорних систем, мереж передачі даних.

Основною особливістю дискретної математики є відсутність граничного переходу і неперервності, притаманних класичній математиці. Дискретна математика містить теорію множин і алгебраїчних систем, математичну логіку, теорію графів, теорію автоматів і формальних граматик, теорію алгоритмів, теорію кодування, теорію чисел, комбінаторні обчислення, дискретні екстремальні задачі.

Математика – наука молодих.
Н. Вінер

1.2. Основні означення

Під множиною розуміють об'єднання в одне ціле об'єктів, які добре розрізняються нашою інтуїцією або нашою думкою.

Об'єкти, що утворюють множину, будемо називати елементами множини.

Елементи позначаються малими літерами латинського алфавіту. Якщо **m** належить множині **M**, то використовується запис $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$, в іншому випадку – $\mathbf{m} \notin \mathbf{M}$. Множина, яка містить скінченне число елементів, називається скінченною, а множина, що містить нескінченне число елементів, - нескінченною.

Якщо множина не містить жодного елемента, то вона називається пустою і позначається **Ø**.

Множина може задаватися різними способами: перерахуванням елементів для скінченної множини або зазначенням їх властивостей. У разі перерахування використовуються фігурні дужки {}. Наприклад, множину M цифр десяткового алфавіту можна задати у вигляді **M={0,1,...9}**, або **M={i | i-ціле, 0 ≤i ≤9}**, де справа від риски зазначається властивість елементів цієї множини. Наприклад, множина **M** парних чисел записується **M={m | m – парне число}**.

Множина **M'** називається підмножиною множини **M** тоді й лише тоді, коли будь-який елемент множини **M'** належить до множини **M**: $\mathbf{M'} \subseteq \mathbf{M} \leftrightarrow (\mathbf{m} \in \mathbf{M'} \rightarrow \mathbf{m} \in \mathbf{M})$, де $\subseteq$ - знак включення підмножини; $\rightarrow$ - " **якщо ..., то ...**", $\leftrightarrow$ -" **якщо і лише якщо ...**". Зокрема, множини **M'** і **M** можуть збігатися. Невключення підмножини **M'** до множини **M** позначається як $\mathbf{M'} \not\subset \mathbf{M}$.

Множина **A**, що строго включена до **B**, позначається як $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Це означає, що **B** містить й інші елементи, крім елементів **A**, і це особливо підкреслюється.

Дві множини рівні в тому і лише в тому випадку, коли вони складаються з одних і тих самих елементів.

Рівність двох множин **X** і **У** позначатиметься через **X=У**, а нерівність множин **X** і **У** – через $\mathbf{X} \neq \mathbf{У}$. Для будь-яких множин **X**, **Y**, **Z** виконуються такі умови:

1. **X = X**.
2. Якщо **X = У**, то **У = X**.
3. Якщо **X = У**, **У = Z**, то **X = Z**.

Порядок елементів у множині не є суттєвим.

Множини {**3,4,5,6**} і {**4,5,6,3**} являють собою одну і ту саму множину.

Множини не містять однакових елементів. Так, множина простих дільників числа **60** дорівнює {**2,3,5**}, а не ,{**2,2,3,5**}.

Слід розрізняти предмет і множину, єдиним елементом якої є цей предмет.

<u>Приклад.</u> Множини $\{\{\mathbf{1,2}\}\}$ і $\{\mathbf{1,2}\}$ не рівні, оскільки перша – одноелементна множина, що має свій єдиний елемент $\{\mathbf{1,2}\}$, а друга має два два елементи **1** і **2**.

Іноді нескінченні множини задаються простим перерахуванням кількох перших елементів, і тоді характеристична властивість виявляється заданою в неявному вигляді. Наприклад, множину парних чисел можна задати у вигляді $\mathbf{A}=\{\mathbf{2,4,6,8,\ldots}\}$.

Множина $\{\varnothing\}$ не є пустою, тобто $\varnothing \neq \{\varnothing\}$; ця множина є одноелементною. Її єдиним елементом є пуста множина.

<u>Теорема1.</u> Пуста множина є підмножиною будь-якої множини.

<u>Доведення.</u> Щоб установити це, потрібно довести, що коли **A** є довільною множиною, то кожний елемент множини **Ø** є елементом множини **A**. Оскільки **Ø** не має елементів, то ця умова виконана.

<u>Інше доведення.</u> Припустимо, що $\varnothing \subseteq \mathbf{A}$ – хибне твердження. Це може бути лише в тому разі, якщо існує деякий елемент множини **Ø**, що не є елементом множини **A**. Але це неможливо, оскільки **Ø** не має елементів. Отже, умова $\varnothing \subseteq \mathbf{A}$ не є хибною, тобто $\varnothing \subseteq \mathbf{A}$. Теорему доведено■

Кожна множина $\mathbf{A} \neq \varnothing$ має принаймні дві підмножини: **A** і **Ø**.

Оскільки будь-яка множина має своєю підмножиною $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}$, то і $\varnothing \subseteq \varnothing$.

Крім того, елемент множини **A** визначає деяку підмножину множини **A**. Якщо $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, то $\{\mathbf{a}\} \subseteq \mathbf{A}$. Множина всіх підмножин множини **A** називається множиною-степенем, або булеаном множини **A**, і позначається через **P(A)**. Якщо, наприклад, $\mathbf{A}=\{\mathbf{1,2,3}\}$, то
$\mathbf{P(A)}=\{\{\mathbf{1,2,3}\},\{\mathbf{1,2}\},\{\mathbf{1,3}\},\{\mathbf{2,3}\},\{\mathbf{1}\},\{\mathbf{2}\},\{\mathbf{3}\},\{\varnothing\}\}$.

<u>Теорема2.</u> Множина-степінь **P(A)** множини $\mathbf{A}=\{\mathbf{a_1,a_2,\ldots,a_n}\}$, що складається з **n** елементів, включає $\mathbf{2^n}$ підмножин множини **A**.

<u>Доведення.</u> Очевидно, що існує одна пуста підмножина і одна підмножина, що містить усі елементи множини **A**. Число підмножин, що містить **1,2,...,n-1** елементів, визначається числом сполучень **1,2,…,n-1** з **n**. Загальне число підмножин дорівнюватиме сумі чисел цих сполучень плюс **2**. Як відомо, така сума

$$\mathbf{N}=\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i+2=\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i+C_n^0+C_n^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i=2^n$$

. Теорему доведено■

<u>Приклади</u>

1. Довести, що множина **A** всіх додатних парних цілих чисел дорівнює множині **B** усіх додатних цілих чисел, що подаються у вигляді суми двох додатних непарних цілих чисел.

<u>Розв’язування.</u> Припустимо, що $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, і доведемо, що $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$. Якщо $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, то $\mathbf{x=2m}$, або $\mathbf{x=(2m-1)+1}$. Це і означає, що $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$.

Припустимо тепер, що $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$, і виведемо звідси, що $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$. Якщо $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$, то $\mathbf{x=(2p-1)+(2q-1)}$, звідки $\mathbf{x=2(p+q-1)}$, з чого випливає, що $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$.

Таким чином, ми довели що множини **A** і **B** складаються з одних і тих самих елементів.

2. Чи є множини $\{\mathbf{2,4,6}\}$, $\{\mathbf{2,6,4}\}$ і $\{\mathbf{2,4,4,6}\}$ рівними?

Розв'язування. Оскільки множини $\{\mathbf{2,4,6}\}$ і $\{\mathbf{2,6,4}\}$ складаються з одних і тих самих елементів, то вони будуть рівними. З цієї ж причини вони дорівнюють і множині $\{\mathbf{2,4,4,6}\}$.

3. Чи є множини $\{\{\mathbf{1,2}\},\{\mathbf{2,3}\}\}$, $\{\mathbf{1,2,3}\}$ і $\{\mathbf{1,2},\{\mathbf{3}\}\}$ рівними.

Розв'язування. Ні, вони не рівні, оскільки елементами першої множини будуть $\{\mathbf{1,2}\}$ і $\{\mathbf{2,3}\}$, другої – $\mathbf{1,2,3}$ і третьої – $\mathbf{1,2},\{\mathbf{3}\}$.

4. Чи є множини $\{\{\mathbf{1,2}\}\}$ і $\{\mathbf{1,2}\}$ рівними?

Розв'язування. Ні, не є рівними, оскільки перша – одноелементна множина, що має своїм єдиним елементом $\{\mathbf{1,2}\}$, а друга має своїми елементами **1** і **2**.

5. Чи вірно, що $\{\mathbf{1,2}\} \in \{\{\mathbf{1,2,3}\},\{\mathbf{1,3}\},\mathbf{1,2}\}$?

Розв'язування. Ні, не вірно, оскільки в правій множині немає елемента $\{\mathbf{1,2}\}$.

Для того щоб позначити множину всіх предметів, що є елементами множини **A** і мають властивість **P**, замість $\{\mathbf{x}|\mathbf{x}\in\mathbf{A}$ і $\mathbf{P(x)}\}$ часто пишуть $\{\mathbf{x}\in\mathbf{A}|\mathbf{P(x)}\}$.

Наприклад, $\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}|\mathbf{0}\le\mathbf{x}\le\mathbf{1}\}$ означає множину всіх дійсних чисел між **0** та **1** включно, а $\{\mathbf{x}\in\mathbf{Q}^+|\mathbf{x}^2<\mathbf{2}\}$ – множину всіх додатних раціональних чисел, квадрати яких менші за число **2**.

Вправи

1. Які з поданих тверджень вірні для всіх множин **A**, **B** і **C**:

a) якщо $\mathbf{A}\notin\mathbf{B}$ і $\mathbf{B}\notin\mathbf{C}$, то $\mathbf{A}\notin\mathbf{C}$;

b) якщо $\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$ і $\mathbf{B}\neq\mathbf{C}$, то $\mathbf{A}\neq\mathbf{C}$;

c) якщо $\mathbf{A}\in\mathbf{B}$ і невірно, що $\mathbf{B}\subseteq\mathbf{C}$, то $\mathbf{A}\in\mathbf{C}$;

d) якщо $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$ і $\mathbf{B}\subseteq\mathbf{C}$, то невірно, що $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{A}$;

e) якщо $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$ і $\mathbf{B}\in\mathbf{C}$, то $\mathbf{A}\not\subset\mathbf{C}$?

2. Перелічити всі елементи множини $\mathbf{A}=\{\{\mathbf{1,2}\},\{\mathbf{3}\},\mathbf{1}\}$.

3. Довести, істинність кожного з поданих тверджень для довільних множин **A**, **B** і **C**:

a) якщо $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$ і $\mathbf{B}\subseteq\mathbf{C}$, то $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{C}$;

b) якщо $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$ і $\mathbf{B}\subset\mathbf{C}$, то $\mathbf{A}\subset\mathbf{C}$;

c) якщо $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$ і $\mathbf{B}\subset\mathbf{C}$, то $\mathbf{A}\subset\mathbf{C}$.

4. Які з наведених нижче співвідношень хибні і чому:

1) $\mathbf{x}\in\{\mathbf{2,a,x}\}$.

2) $\mathbf{3}\in\{\mathbf{1},\{\mathbf{2,3}\},\mathbf{4}\}$.

3) $\{\mathbf{x,y}\}\in\{\mathbf{a},\{\mathbf{x,y}\},\mathbf{b}\}$?

5. Чи рівні між собою множини:

a) $\mathbf{A}=\{\mathbf{2,5,4}\}$, $\mathbf{B}=\{\mathbf{5,4,2}\}$;

b) $\mathbf{A}=\{\mathbf{1,2,4,2}\}$, $\mathbf{B}=\{\mathbf{1,2,4}\}$;

c) $\mathbf{A}=\{\mathbf{2,4,5}\}$, $\mathbf{B}=\{\mathbf{2,4,3}\}$;

d) $\mathbf{A}=\{\mathbf{1},\{\mathbf{2,5}\},\mathbf{6}\}$, $\mathbf{B}=\{\mathbf{1},\{\mathbf{5,2}\},\mathbf{6}\}$;

e) $\mathbf{A}=\{\mathbf{1},\{\mathbf{2,5}\},\mathbf{6}\}$, $\mathbf{B}=\{\mathbf{1,2,5,6}\}$?

6. Чи зв'язані множини **A** і **B** відношенням включення:

a) $\mathbf{A=\{a,b,d\}}$, $\mathbf{B=\{a,b,c,d\}}$;

b) $\mathbf{A=\{a,c,d,e\}}$, $\mathbf{B=\{a,e,c\}}$;

c) $\mathbf{A=\{c,d,e\}}$, $\mathbf{B=\{c,a\}}$?

7. В яких відношеннях перебувають між собою множини: $\mathbf{A=\{1,3\}}$; **B**-множина непарних додатних чисел; **C** – множина розв’язків рівняння $\mathbf{x^2-4x+3=0}$?

8. Для множини перших **20** натуральних чисел запишіть такі її підмножини: **A** – парних чисел; **B** – непарних чисел; **C** – квадратів чисел; **D** – простих чисел. В яких відношеннях перебувають ці підмножини?

Вивчення математики наближає
до безсмертних богів.
Платон

1.3. Дії над множинами

Об’єднанням множин **A** і **B** називається множина, що складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать хоча б одній з множин **A** або **B**. Позначається $\mathbf{A\cup B=\{x|x\in A}$ або $\mathbf{x\in B\}}$ (називається **сумою** або **об’єднанням**).

Таким чином, за наведеним означенням $\mathbf{x\in A\cup B}$ тоді і лише тоді, коли **x** є елементом хоча б однієї з множин **A** або **B**. Наприклад, $\{\mathbf{1,2,3}\}\cup\{\mathbf{1,3,4}\}=\{\mathbf{1,2,3,4}\}$.

Аналогічно визначається об’єднання довільної (у тому числі й нескінченної) системи множин. Якщо система містить невелику кількість множин, то їх об’єднання описується явно: $\mathbf{A\cup B\cup C\cup D}$ і т.д.

У загальному випадку використовують позначення $\bigcup\limits_{A\in S} A$, яке читається як об’єднання усіх множин **A**, що належать до системи **S**.

У випадку, якщо всі множини системи **S** занумеровані індексами, використовуються інші варіанти позначень: $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, коли $\mathbf{S=\{A_1,A_2,\ldots A_k\}}$; $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, коли **S** – нескінченна система і її множини занумеровані підряд натуральними числами.

Для об’єднання справедливі комутативний і асоціативний закони:

1. Комутативний закон: $\mathbf{A\cup B=B\cup A}$.

2. Асоціативний закон: $\mathbf{(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)}$.

Справедливість цих законів випливає з того, що ліва і права частини рівностей складаються з одних і тих самих елементів.

Також має місце $\mathbf{A\cup \varnothing=A}$.

Перетином (**добутком**) множин **A** і **B** називається множина, що складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать як множині **A**, так і множині **B**. Позначається $\mathbf{A\cap B}$.

Формальне означення: $\mathbf{A\cap B=\{x|x\in A}$ і $\mathbf{x\in B\}}$.

Наприклад $\{\mathbf{1,2,3}\}\cap\{\mathbf{1,3,4}\}=\{\mathbf{1,3}\}$. Мають місце такі включення:

$\mathbf{\varnothing\subseteq A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B}$, $\mathbf{\varnothing\subseteq A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B}$.

Дві множини **A** і **B** називаються непересічними, якщо **A**$\cap$**B=Ø**, і пересічними, якщо **A**$\cap$**B≠Ø**.
Перетин множин має комутативну властивість: **A**$\cap$**B=B**$\cap$**A**,
і асоціативну: **(X**$\cap$**Y)**$\cap$**Z=X**$\cap$**(Y**$\cap$**Z)=X**$\cap$**Y**$\cap$**Z**.
Має місце також співвідношення: **X**$\cap$**Ø= Ø**.

Різниця множин

Визначається лише для двох множин.

Різницею множин **A** і **B** називається множина, що складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать **A** і не належать **B**.

Різниця множин **A** і **B** позначається через **A\ B**, або **A-B**, що відповідає умові $\{$**a|a**$\in$**A** і **a**$\notin$**B**$\}$, яка визначає ті елементи множини **A**, які не є елементами множини **B**. Різниця множин іноді називається також відносним доповненням.

Множина **A+B=(A-B)**$\cup$**(B-A)** називається **симетричною** різницею.

Універсальна множина

Найбільша множина **I** (позначається також **U**), яка розглядається і для якої вся решта множин є підмножинами, називається **універсальною** множиною, також повною, або одиночною.

Ця множина іноді називається **універсумом**. Універсальна множина є поняттям відносним. Наприклад, в арифметиці універсальною множиною вважається множина раціональних чисел.

Для універсальної множини **A**$\cap$**I=A**, **A**$\cup$**I=I**.

Доповнення множини

Множина $\overline{A}$, що визначається за співвідношенням $\overline{A}$**=I\A**, називається абсолютним **доповненням** множини **A** до універсальної множини **I**, або прсто доповненням.

A і $\overline{A}$ не мають спільних елементів. Тому **A**$\cap\overline{A}$**= Ø**. Крім того, **A**$\cup\overline{A}$**=I**. Очевидно, що **A** є доповненням до $\overline{A}$. Це значить, що **A=**$\overline{\overline{A}}$.

За допомогою операції доповнення можна також у зручному вигляді подати різницю множин **A\B**.

<u>**Теорема 1.**</u> **A\B=A**$\cap\overline{B}$

<u>Доведення.</u> Оскільки **A\B=**$\{$**x|x**$\in$**A** і **x**$\notin$**B**$\}$=$\{$**x|x**$\in$**A** і **x**$\in\overline{B}\}$, то **A\B=A**$\cap\overline{B}$.

Розбиття множин

Системою **S** називається сукупність **n** множин: $\mathbf{A_1,A_2,\ldots,A_n}$.

Система множин **S** називається розбиттям множин **M**, якщо вона задовольняє таким умовам:

1. Будь-яка множина **A** системи **S** є підмножиною множини **M**: **A**$\subseteq$ **M**.
2. Будь-які дві множини **A** і **B** з **S** є непересічними: **A**$\cap$**B= Ø**.
3. Об'єднання всіх множин системи **S** утворює множину **M**: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ **=M**,

$\mathbf{A_i} \in \mathbf{S}$

З метою проведення доведень в алгебрі множин використовують діаграми (круги) **Ейлера** (**Вена**). Універсальна множина **U** зображається у вигляді точок деякого прямокутника.

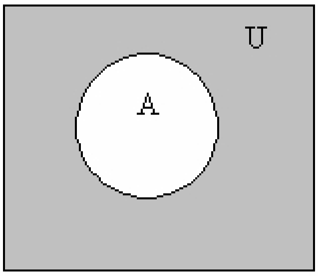


Рис.1. Діаграма Ейлера для множини А (заштриховано для $\overline{A}$)

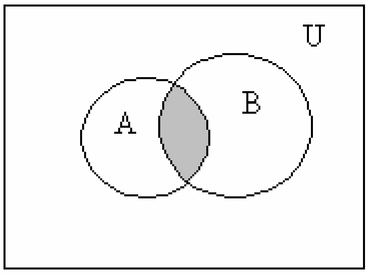


Рис.2. Діаграма Ейлера для двох пересічних множин А і В (заштриховано А$\cap$В)

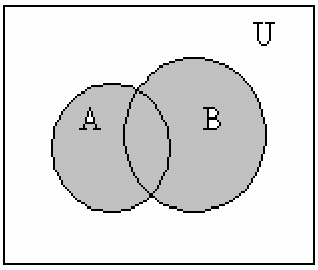


Рис.3. Діаграма Ейлера для двох об'єднаних множин А$\cup$В (заштриховано А$\cup$В)

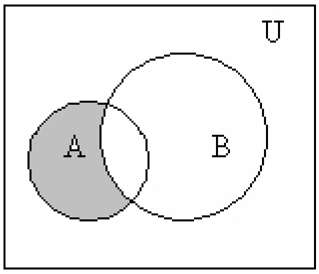


Рис.4. Діаграма Ейлера для різниці двох множин А-В (заштриховано А-В)

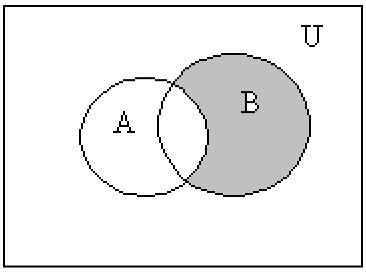


Рис.5. Діаграма Ейлера для різниці двох множин В-А (заштриховано В-А)

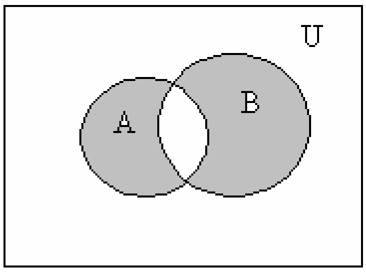


Рис.6. Симетрична різниця двох множин А+В (заштриховано А+В)

а її підмножина- у вигляді круга всередині прямокутника (рис.1). Доповнення множини **А** до **U-A** зображається тією частиною прямокутника, яка лежить поза кругом, що зображає **А**. Якщо на діаграмі Ейлера зобразити кругами множини **А** і **В**, що є підмножинами **U**, то множини **А**$\cap$**В** і **А**$\cup$**В** будуть зображені заштрихованими областями на рис. 2 і 3 відповідно. Різниці двох множин, показані заштрихованими областями (рис. 4, 5, 6).

<u>Приклади</u>

1. Чи існують підмножини **А**, **В**, і **С** універсальної множини **U**, для яких одночасно мали б місце такі співвідношення:

C≠ Ø, **A⋂B≠ Ø**, **A⋂C= Ø**, **(A⋂B)-C= Ø**.

Розв'зування. З другої умови випливає, що **A** і **B** перетинаються, з чого стає зрозумілим, що обидві множини не пусті. Четверта умова говорить про те, що **A⋂B⊆C**. З цього видно, що перша умова зайва. З одного боку, **A⋂B** входить до **C**, а з іншого - **A⋂C** є пустою множиною. Це суперечність. Отже, множини, що задовольняють усім наведеним умовам не існують.

2. Нехай **F**, **G**, **L** – такі підмножини множини **U**, що **F⊆G**, **G⋂L⊆F**, **L⋂F= Ø**. Чи існують множини **F**, **G**, **L**, які задовольняли б зазначеній сукупності умов?

Розв'язування. Оскільки **L⋂F= Ø** і **G⋂L⊆F**, то **L** і **G** не можуть перетинатися, і тому **G⋂L=Ø**.

З іншого боку, якщо **F⊆G** і **G⋂L= Ø**, то виконуються всі задані умови (див. рис. 7).

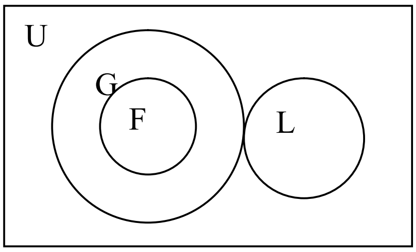


Рис.7. Діаграми Ейлера для трьох множин F, G, L прикладу 2.

Вправи

1. Довести, що для будь-яких множин **A** і **B** справедливо **Ø⊆A⋂B⊆A⋃B**.

2. Нехай **A** – довільна множина. Що являють собою такі множини: **A⋂Ø**, **A⋃Ø**, **A- Ø**, **A-A**, **Ø-A** ?

3. Визначити: **Ø⋂{Ø}**, **{Ø}⋂{Ø}**, **{Ø, {Ø}}- Ø**, **{Ø, {Ø}}- {Ø}**, **{Ø, {Ø}}- {{Ø}}**.

4. Нехай **A** і **B** – підмножини множини **U**. Покажіть, що для кожної наведеної нижче ситеми співвідношень (a), (b), (c) зі справедливості одного співвідношення системи випливає справедливість інших співвідношень даної системи:

a) **A⊆B**, $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, **A⋃B=B**, **A⋂B=A**;

b) **A⋂B=Ø**, **A**$\subseteq \overline{B}$, **B**$\subseteq \overline{A}$;

c) **A⋃B=U**, $\overline{A}\subseteq$**B**, $\overline{B}\subseteq$**A**.

5. Довести, що для довільних множин **A**, **B** і **C** **A⋂(B⋃C)=(A⋂B)⋃(A⋂C)**.

6. Довести, що для довільних множин **A**, **B** і **C** **(A-B)-C=(A-C)-(B-C)**.

7. Побудувати діаграму Ейлера, що відповідає симетричній різниці **A+**$\overline{B}$**=(A-**$\overline{B}$**)⋃(**$\overline{B}$**-A)** множин **A** і **B**.

8. За допомогою діаграми Ейлера показати комутативність і асоціативність операції симетричної різниці.

9. Показати, що для будь-якої множини **A**

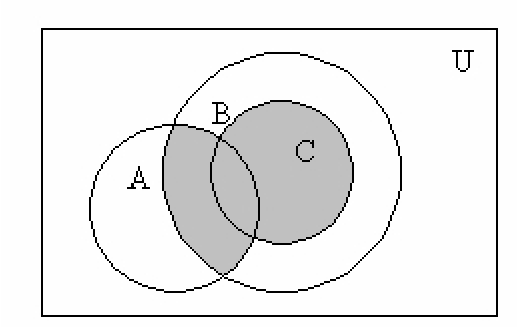
A-A= Ø, **A+ Ø=A**, **A+A=A**.

10. За допомогою діаграми Ейлера довести, що якщо **A**, **B** і **C** – такі підмножини **U**, що

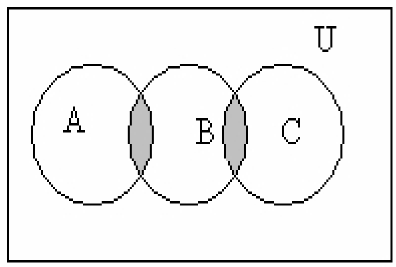
$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\subseteq\overline{C}$ і $\mathbf{A}\cup\mathbf{C}\subseteq\mathbf{B}$, то $\mathbf{A}\cap\mathbf{C}=\varnothing$.

11. Сформулювати означальну властивість кожної з отриманих множин:

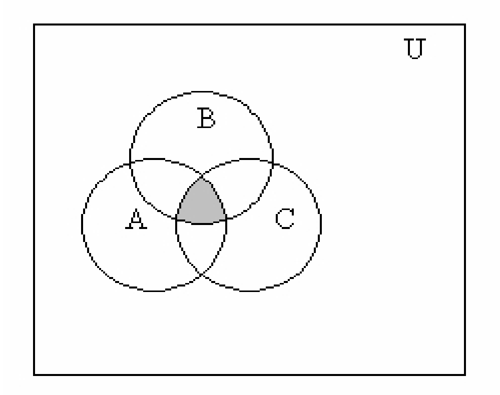
$\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\cap\mathbf{C}$, $\mathbf{A}\cap\mathbf{D}$, **C-A**, **C-B**, $\mathbf{C}+\overline{D}$.



а)



б)



в)

Рис.8. Приклади діаграм Ейлера
для трьох множин A, B, C.

12. Записати за допомогою операцій над множинами вирази для множин, що відповідають заштрихованим областям діаграм Ейлера на рис. 8 а, б, в.

13. Показати, що для будь-якої множини **A** справедливі співвідношення $\mathbf{A}\cap\overline{A}=\varnothing$; $\mathbf{A}\cup\varnothing=\mathbf{A}$.

14. Показати, що із співвідношень $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\mathbf{C}$ випливає, що $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{A}$ і $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{B}$.

Знайти доведення математичної теореми
дорожче, ніж завоювати перське царство.
Демокріт

1.4. Алгебра множин

Алгебра множин являє собою сукупність тотожностей (рівностей).

Для будь-яких підмножин **A**, **B** і **C** універсальної множини **U** дійсними є такі рівності:

1. $\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}\cup\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cup\mathbf{C}$. 1'. $\mathbf{A}\cap(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cap\mathbf{C}$.
2. $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{B}\cup\mathbf{A}$. 2'. $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\mathbf{B}\cap\mathbf{A}$.
3. $\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap(\mathbf{A}\cup\mathbf{C})$. 3'. $\mathbf{A}\cap(\mathbf{B}\cup\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cup(\mathbf{A}\cap\mathbf{C})$.
4. $\mathbf{A}\cup\varnothing=\mathbf{A}$. 4'. $\mathbf{A}\cap\mathbf{U}=\mathbf{A}$.
5. $\mathbf{A}\cup\overline{A}=\mathbf{U}$; $(\overline{A}=\mathbf{U}-\mathbf{A})$. 5'. $\mathbf{A}\cap\overline{A}=\varnothing$.

Кожну з наведених рівностей можна довести, показавши, що, множина, яка стоїть з одного боку від знака рівності, включена до множини, що стоїть з іншого боку від цього знака рівності.

<u>Доведемо рівність 3</u>. Доведення складається з двох частин:

1. Нехай $\mathbf{x}\in\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})$. Тоді $\mathbf{x}\in\mathbf{A}$ або $\mathbf{x}\in\mathbf{B}\cap\mathbf{C}$. Якщо $\mathbf{x}\in\mathbf{A}$, то $\mathbf{x}\in\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ і $\mathbf{x}\in\mathbf{A}\cup\mathbf{C}$, і, таким чином, **x** є елементом перетину цих множин: $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap(\mathbf{A}\cup\mathbf{C})$.

Якщо $\mathbf{x}\in\mathbf{B}\cap\mathbf{C}$, то $\mathbf{x}\in\mathbf{B}$ і $\mathbf{x}\in\mathbf{C}$. Отже, $\mathbf{x}\in\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ і $\mathbf{x}\in\mathbf{A}\cup\mathbf{C}$, тобто і в цьому випадку **x** є елементом перетину $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap(\mathbf{A}\cup\mathbf{C})$.

2. Доведемо, що $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap(\mathbf{A}\cup\mathbf{C})\subseteq\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})$.

Нехай $\mathbf{x}\in(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap(\mathbf{A}\cup\mathbf{C})$. Тоді $\mathbf{x}\in\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ і $\mathbf{x}\in\mathbf{A}\cup\mathbf{C}$. Отже або $\mathbf{x}\in\mathbf{A}$, або ж $\mathbf{x}\in\mathbf{B}$ і $\mathbf{x}\in\mathbf{C}$. З цього випливає, що $\mathbf{x}\in\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})$.

Доведення решти рівностей провести самостійно за аналогією.

Рівності 1 і 1' називаються **асоціативними** законами для об'єднання і перетину, а тотожності 2 і 2' – **комутативними** законами для цих операцій.

Рівності 3 і 3' – це **дистрибутивні** закони для цих операцій

У загальному вигляді рівності 3 і 3' можна подати в такий спосіб:

$\mathbf{A}\cup(\mathbf{B_1}\cap\mathbf{B_2}\cap\ldots\cap\mathbf{B_n})=(\mathbf{A}\cup\mathbf{B_1})\cap(\mathbf{A}\cup\mathbf{B_2})\cap\ldots\cap(\mathbf{A}\cup\mathbf{B_n})$.

$\mathbf{A}\cap(\mathbf{B_1}\cup\mathbf{B_2}\cup\ldots\cup\mathbf{B_n})=(\mathbf{A}\cap\mathbf{B_1})\cup(\mathbf{A}\cap\mathbf{B_2})\cup\ldots\cup(\mathbf{A}\cap\mathbf{B_n})$.

Для довільних підмножин **A** і **B** універсальної множини **U** справедливі такі рівності:

1. Якщо $\mathbf{B}\not\subseteq\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{A}$, то $\mathbf{B}=\varnothing$. 1'. Якщо $\mathbf{B}\not\subseteq\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\mathbf{A}$, то $\mathbf{B}=\mathbf{U}$.
2. $\overline{\varnothing}=\mathbf{U}$. 2'. $\overline{\mathrm{U}}=\varnothing$.
3. $\mathbf{A}\cup\mathbf{A}=\mathbf{A}$. 3'. $\mathbf{A}\cap\mathbf{A}=\mathbf{A}$.
4. $\mathbf{A}\cup\mathbf{U}=\mathbf{U}$. 4'. $\mathbf{A}\cap\varnothing=\varnothing$.
5. $\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{B})=\mathbf{A}$. 5'. $\mathbf{A}\cap(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})=\mathbf{A}$.
6. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$. 6'. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.
7. Якщо $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{U}$ і $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\varnothing$, то $\mathbf{B}=\overline{A}$. 7'. Якщо $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\varnothing$ і $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{U}$, то $\mathbf{B}=\overline{A}$.

Доведення провести самостійно.

Деякі з рівностей відомі під спеціальними назвами. Так 3 і 3' – це закони **ідемпотентності**; 5 і 5' – закони **поглинання**; 6 і 6' – **закони де Моргана**.

Рівність алгебри множин, отримана з іншої рівності через заміну всіх входжень $\cup$ на $\cap$, $\cap$ на $\cup$, $\varnothing$ на **U** і **U** на $\varnothing$, називається **двоїстою** (дуальною) по відношенню до вихідної рівності.

Принцип двоїстості для алгебри множин

Для будь-якого істинного твердження, що формується в термінах $\cup$ та $\cap$, **Ø** та **U** двоїсте по відношенню до цього речення є істинним.

З цього принципу випливає, що якщо є деяке твердження 1-7 з термінами $\cup$ та $\cap$, **Ø** та **U**, то відповідне йому твердження зі штрихом 1'-7' на підставі двоїстості випливає з цього ж самого твердження.

Це дозволяє спрощувати різні складні вирази алгебри множин.

Узагальнення операцій над множинами

1. Об'єднання n множин:

$\mathbf{A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, також $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ при $\mathbf{n=\infty}$.

2. Перетин множин:

$\mathbf{A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_n} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, також $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ **,** при $\mathbf{n=\infty}$.

3. Формули де Моргана:

$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$; $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

<u>Приклад 1.</u> $\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}\cup B = \overline{A}\cup B\cup B = \overline{A}\cup B$.

<u>Приклад 2.</u>

$(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup\overline{B}\cup\overline{C} = [(A\cup\overline{A})\cap B\cap C]\cup\overline{B}\cup\overline{C} =$

$= (U\cap B\cap C)\cup\overline{B\cap C} = (B\cap C)\cup(\overline{B\cap C}) = U$.

<u>Приклад 3.</u>

$(A\cap B\cap C\cap\overline{X})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap X) =$

$= (A\cap B\cap C\cap\overline{X})\cup[(\overline{A}\cup\overline{B}\cup X)\cap C] = [A\cap B\cap\overline{X}\cup\overline{A\cap B\cap\overline{\overline{X}}}]\cap C = U\cap C = C$ **.**

<u>Приклад 4.</u> Довести тотожність: $\mathbf{A\cup A=A}$:

$A\cup A = (A\cup A)\cap U = (A\cup A)\cap(A\cup\overline{A}) = A\cup(A\cap\overline{A}) = A\cup Ø = \mathrm{A}$.

<u>Вправи</u>

1. Довести, що подані рівності є тотожностями:

$\mathbf{(A\cap B\cap X)\cup(A\cap B\cap C\cap X\cap У)\cup(A\cap X\cap \overline{A})=A\cap B\cap X}$;

2. Довести, що для довільних множин $\mathbf{A_1,A_2,\ldots,A_n}$ $\mathbf{(n\geq 2)}$

$\mathbf{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\ldots\cup(A_{n-1}-A_n)\cup(A_n-A_1)\cup(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)}$.

3. Довести, що для довільних множин **A, B, C, D** і **X**:

a) $\overline{(\overline{A}\cap X)\cup(\overline{B}\cap X)} = (A\cup\overline{X})\cap(B\cup\overline{X})$;

b) $(A\cap X)\cup(B\cap\overline{X})\cup(C\cap X)\cup(D\cap\overline{X}) = [(A\cup C)\cap X]\cup[(B\cup D)\cap\overline{X}]$;

c) $[(A\cap X)\cup(B\cap\overline{X})]\cap[(C\cap X)\cup(D\cap\overline{X})] = [(A\cap C)\cap X]\cup[(B\cap D)\cap\overline{X}]$.

4. Довести, що множина $\mathbf{(M-N)\cap(N-M)=Ø}$.

5. Довести за допомогою кругів Ейлера тотожність

$\mathbf{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$.

6. Довести за допомогою кругів Ейлера тотожність

$\mathbf{(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)=C}$.

7. Довести, що $\mathbf{A-(A-B)=B-(B-A)}$.

8. За допомогою кругів Ейлера показати, що:

a) $\mathbf{A\cap B\subseteq A\cup B}$; b) $\mathbf{A+\bar{A}=U}$; c) якщо $\mathbf{A\cap B=C}$, то $\mathbf{C\subset A}$ і $\mathbf{C\subset B}$;

d) $(\overline{M-N})\cup(\overline{N-M})=U$;

9. У якому співвідношенні знаходяться множини **A** і **B**, якщо $\mathbf{A-B=B-A=\varnothing}$?

10. Показати справедливість тотожностей:

a) $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}\cup B=A\cup B$; b) $(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)=B\cap C$.

11. На основі відношення належності довести, що:

a) $\mathbf{A\cup(B-A)=A\cup B}$; b) $\mathbf{A\cap(B-A)=\varnothing}$; c) $\mathbf{A-(A\cap B)=A-B}$; d) $\mathbf{A\cap(B-C)=(A\cap B)-C}$; e) $\mathbf{A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)}$; f) $\mathbf{A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)}$; g) $\mathbf{(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)}$.

Природа – це реалізація найпростіших
математичних ідей.
А. Ейнштейн

1.5. Вектори і прямий добуток

Вектор (кортеж) – це упорядкований набір елементів. Елементи, що утворюють вектор, називаються координатами, коефіцієнтами або компонентами вектора. Координати нумеруються зліва направо. Число координат називається довжиною, або розмірністю вектора. Координати вектора можуть збігатися. Вектор береться в круглі дужки, наприклад, **(0,5,4,5)**.

Вектори довжини 2 називаються упорядкованими парами, довжини 3 – трійками, довжини **n** - енками.

Два вектора рівні, якщо вони мають однакову довжину і відповідні їм коефіцієнти також рівні, тобто вектори $\mathbf{(a_1, a_2,\ldots, a_m)}$ і $\mathbf{(b_1, b_2,\ldots, b_n)}$ рівні, якщо $\mathbf{m=n}$ і $\mathbf{a_1=b_1}$, $\mathbf{a_2=b_2},\ldots,\mathbf{a_m=b_n}$.

Вектор $\mathbf{(a_1, a_2)}$ може розглядатись як точка на площині або як вектор, проведений від початку координат до даної точки (рис. 1).

Відповідно до цього вектор $\mathbf{(a_1, a_2, a_3)}$ розглядається як точка в тривимірному просторі (рис. 2).

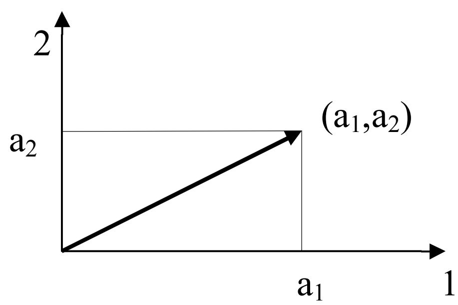
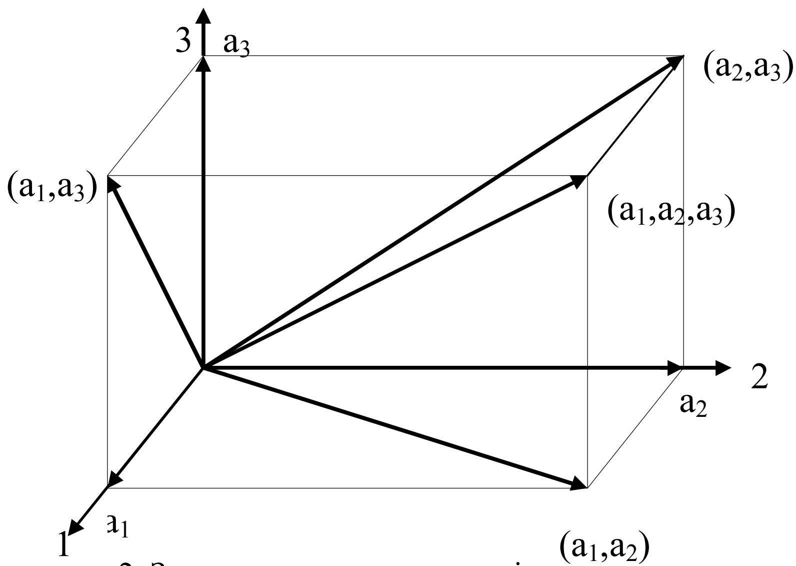


Рис. 1. Задання вектора на площині



2. Задання вектора в просторі

Проекції вектора на осі координат
$\mathbf{Пр_i(a_1,a_2,a_3)=a_i,\ i=1,2,3}$.
Проекції вектора на координатну площину
$\mathbf{Пр_{i,j}(a_1,a_2,a_3)=(a_i,a_j)}$, $\mathbf{i=1,2,3}$; $\mathbf{j=1,2,3}$; $\mathbf{i\neq j}$.
<u>Приклад 1.</u> $\mathbf{Пр_1(a_1,a_2,a_3)=a_1}$.
<u>Приклад 2.</u> $\mathbf{Пр_{2,3}(a_1,a_2,a_3))=(a_2,a_3)}$.

Прямий добуток множин

Прямим добутком множин **X** і **Y** називається множина, що позначається **X×Y** і складається з усіх тих і лише тих упорядкованих пар, перша компонента яких належить до множини **X**, а друга – до множини **Y**.

Це означає, що елементами упорядкованої множини є двоелементні вектори **(x,y)**. Формально це визначається таким чином:

$\mathbf{X\times Y=\{(x,y)|\ x\in X,\ y\in Y\}}$.

$\mathbf{X\times Y=\varnothing}$, якщо $\mathbf{X=\varnothing}$ або $\mathbf{Y=\varnothing}$, або $\mathbf{X=Y=\varnothing}$.

<u>Приклад.</u> Нехай $\mathbf{X=\{1,2\}}$, $\mathbf{Y=\{1,3,4\}}$. Тоді $\mathbf{X\times Y=\{(1,1),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,3),\ (2,4)\}}$. Слід зазначити, що $\mathbf{X\times Y\neq Y\times X}$.

Прямим добутком множин $\mathbf{A_1,A_2,\ldots,A_n}$ називається множина, що позначається $\mathbf{A_1\times A_2\times\ldots\times A_n}$, усіх векторів $\mathbf{(a_1,a_2,\ldots a_n)}$ довжини **n**, таких, що $\mathbf{a_1\in A_1,\ a_2\in A_2,\ldots,\ a_n\in A_n}$.

Нехай **A** – довільна множина. Назвемо **n**-м степенем множини **A**, що позначається як $\mathbf{A^n}$, прямий добуток **n** однакових множин, що дорівнюють **A**:

$$\mathbf{A^n=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{\text{n разів}}}$$

При цьому $\mathbf{A^1=A,\ A^0=\{\varnothing\}}$

Якщо **R** – множина дійсних чисел, то $\mathbf{R^2=R\times R}$ є дійсною площиною, а $\mathbf{R^3=R\times R\times R}$ – тривимірним дійсним простором.

<u>Теорема 1.</u> Нехай $A_1,A_2,\dots,A_n$ – кінцеві множини і $|A_1|=m_1$, $|A_2|=m_2,\dots$, $|A_n|=m_n$, де $m_1, m_2,\dots, m_n$ – число (потужність) елементів у множинах $A_1,A_2,\dots,A_n$. Тоді потужність множини $A_1\times A_2\times\dots\times A_n$ дорівнює добутку потужностей множин $A_1,A_2,\dots,A_n$:
$|A_1\times A_2\times\dots\times A_n|= m_1\, m_2\dots\, m_n$.

<u>Доведення.</u> Проведемо його методом математичної індукції (див. додаток 1). Для $n=1$ теорема тривіально вірна. Припустимо, що вона вірна для $n=k$, і доведемо її справедливість для $n=k+1$. За припущенням $|A_1\times A_2\times\dots\times A_k|= m_1\, m_2\dots\, m_k$. Візьмемо будь-який вектор $(a_1,a_2,\dots a_k)$ з $A_1\times A_2\times\dots\times A_k$ і припишемо справа елемент $a_{k+1}\in A_{k+1}$. Це можна зробити m_{k+1} різними способами; при цьому буде m_{k+1} різних векторів з множини $A_1\times A_2\times\dots\times A_{k+1}$. Таким чином, з усіх $m_1\, m_2\dots\, m_k$ векторів приписуванням справа елемента з A_{k+1} можна отримати $m_1\, m_2\dots\, m_k\, m_{k+1}$ векторів з множини $A_1\times A_2\times\dots\times A_{k+1}$. При цьому всі вони різні, і жодних інших векторів у множині $A_1\times A_2\times\dots\times A_{k+1}$ немає. Тому для $n=k+1$ теорема вірна і тому вірна для будь-яких n. Теорему доведено■

<u>Наслідок:</u> $|A^n|=|A|^n$.

Проекція множини

Застосовується лише для множин, елементами яких є кортежі однакової довжини.

Проекцією множини векторів **M** називається множина проекцій векторів з **M**.

Нехай $M=\{(1,2,3,4,5), (2,1,3,5,5), (3,3,3,3,3)\}$.

Тоді $Пр_2M=\{2,1,3\}$, $Пр_{2,4}M=\{(2,4),(1,5),(3,3)\}$.

Якщо $M=X\times Y$, то $Пр_1M=X$; $Пр_2M=Y$, якщо множина векторів $Q\subseteq X\times Y$, то $Пр_1Q\subseteq X$; $Пр_2Q\subseteq Y$.

Нехай **A** – кінцева множина, елементами якої є різні символи – літери, цифри, знаки операцій тощо. Такі множини називаються алфавітами. Елементи множини A^n називаються словами довжини **n** в алфавіті **A**.

Слова не розділяються ні дужками, ні комами. Елементи слів також не розділяються. Тому слово в алфавіті **A** – це просто кінцева послідовність символів алфавіту **A**.

Наприклад, десяткове ціле число – це слово в алфавіті цифр $\{0,1,\dots,9\}$.

Жодне людське дослідження не може назватись
істинною наукою, якщо воно не пройшло
через математичні доведення.
Леонардо да Вінчі

1.6. Відповідності і відображення

Будь-яка підмножина $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ добутку множин називається бінарною відповідністю з **A** в **B**. Множина **A** називається множиною відправлення (визначення), а множина **B** – множиною прибуття (значення) відповідності **P**.

Відповідності полягають у тому, що деяким елементам множини **A** поставлені у відповідність елементи множини **B**.

<u>Приклад 1.</u> Нехай **A**=$\{$**1,2,3,4,5**$\}$, **B**=$\{$**a,b,c,d,e,f**$\}$.

Тоді **P**=$\{$**(1,a)**, **(3,a)**, **(3,b)**, **(3,c)**, **(4,c)**, **(5,b)**, **(5,e)**$\}$ – відповідність **P**.

Існує багато способів задання відповідностей. Два найбільш поширених з них – у вигляді графіків (рис. 1) і стрілкове подання (рис. 2).

Множина всіх $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$, що відповідають елементу $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, називається образом **a** в **B** при відповідності **P**.

Множина всіх **a**, яким відповідає **b**, називається прообразом **b** в **A** при відповідності **P**.

Так, множина $\{$**a,b,c**$\}$ є образом **3** в **P**, множина $\{$**3,5**$\}$ є прообразом **b**.

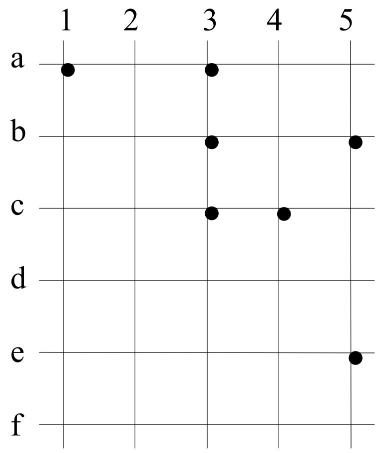


Рис.1. Графічне задання відповідностей

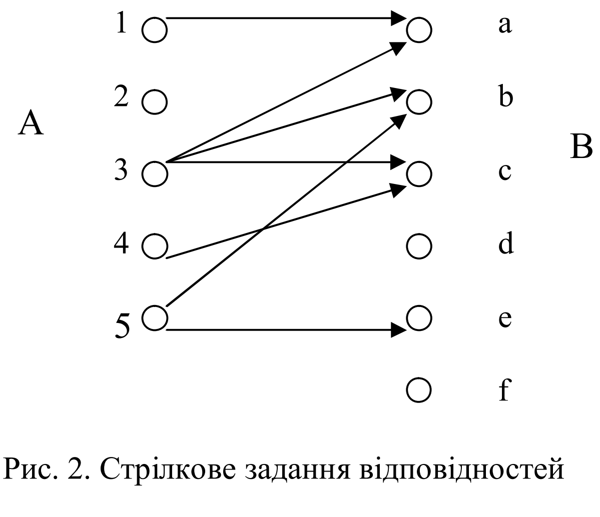


Рис. 2. Стрілкове задання відповідностей

Елементи множин **A** і **B**, що беруть участь у зіставленні, позначаються або як $\mathbf{Пр_1P}$ і $\mathbf{Пр_2P}$ – проекція множини визначення і проекція множини значень, або ж як область визначення і область значень відповідності.

Приклад 2. Нехай $\mathbf{A}=\{\mathbf{1,2}\}$, $\mathbf{B}=\{\mathbf{3,5}\}$, тобто

$\mathbf{A\times B}=\{\mathbf{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5)}\}$.

Наведемо деякі з можливих відповідностей:

$\mathbf{P_1}=\{\mathbf{(1,3)}\}$; $\mathbf{Пр_1P_1}=\{1\}$; $\mathbf{Пр_2P_1}=\{3\}$.

$\mathbf{P_2}=\{\mathbf{(1,3), (1,5)}\}$; $\mathbf{Пр_1P_2}=\{1\}$; $\mathbf{Пр_2P_2}=\{3,5\}=\mathbf{B}$.

$\mathbf{P_3}=\{\mathbf{(1,3), (2,3)}\}$; $\mathbf{Пр_1P_3}=\{1,2\}$; $\mathbf{Пр_2P_3}=\{3\}$.

Таким чином відповідність **P** входить до трійки множин **(A, B, P)**, в якій $\mathbf{P\subseteq A\times B}$.

Обернена відповідність

Для кожної відповідності **(A, B, P)**, $\mathbf{P\subseteq A\times B}$ існує обернена відповідність, яку можна одержати при розгляді даної відповідності у зворотному напрямку, тобто коли визначаються елементи $\mathbf{a\in A}$, з якими зіставляються елементи $\mathbf{b\in B}$. Обернена відповідність позначається $\mathbf{(B, A, P^{-1})}$, де $\mathbf{P^{-1}\subseteq B\times A}$. Оберненою відповідністю оберненої відповідності є пряма відповідність $\mathbf{(P^{-1})^{-1}=P}$.

Композиція відповідностей

Композицією відповідностей називається послідовне застосування двох відповідностей.

Композиція відповідностей – це операція з трьома множинами **X**, **Y**, **Z**, на яких визначені дві відповідності **P** і **Q**: **(X, Y, P)** і **(Y, Z, Q)**, де $\mathbf{P\subseteq X\times Y}$, $\mathbf{Q\subseteq Y\times Z}$.

При цьому область значень першої відповідності збігається з областю визначення другої відповідності: $\mathbf{Пр_2P=Пр_1Q}$.

Перша відповідність визначає для будь-якого $\mathbf{x\in Пр_1P}$ деякий, можливо і не один, елемент $\mathbf{y\in Y}$. Згідно з означенням операції композиції відповідностей тепер потрібно для знайденого $\mathbf{y\in Y}$ визначити $\mathbf{z\in Z}$, скориставшися другою відповідністю **Q**.

Отже, композиція відповідностей зіставляє з кожним елементом **x** з області визначення першої відповідності $\mathbf{Пр_1P}$ один або декілька елементів **z** з області значень другої відповідності $\mathbf{Пр_2Q}$.

Композицію відповідностей позначають через $\mathbf{P\circ Q}$. При цьому композиція відповідностей запишеться у вигляді $\mathbf{(X, Z, P\circ Q)}$, $\mathbf{P\circ Q\subseteq X\times Z}$.

Очевидно, що операцію композиції можна поширити і на кількість відповідностей більшу ніж два.

Відображення

Відображенням, або перетворенням множини **A** у множину **B**, називається відповідність, в якій кожному елементу множини **A** ставиться у відповідність не більш ніж один однозначно визначений елемент множини **B**.

Елемент $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$ називається образом елемента **a**, а елемент **a**, у свою чергу, називається прообразом елемента **b**.

Відображення однієї множини в іншу позначається малими літерами грецького алфавіту: $\boldsymbol{\varphi}$**:** $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, або

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{B}.$$

Образ елемента $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ позначається як **(a)φ**. Відображення однієї множини в іншу задається за допомогою графіків, стрілкових схем або таблиць, як у табл. 1.

Таблиця 1. Задання відображення множин у вигляді таблиці

a	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	**…**	$\mathbf{a_n}$
(a)φ	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_2}$	**…**	$\mathbf{b_n}$

Відповідно до означення відображення кожному елементу множини **B** може відповідати один або більше елементів множини **A**.

Але одному елементу множини **A** не може відповідати більш ніж один елемент множини **B**. Тому відображення може бути подане таблицею. У цьому полягає відмінність відображення від більш загального поняття – відповідності. Відповідність в загальному випадку не можна подати у вигляді таблиці, оскільки елементу **a** можуть відповідати декілька елементів **b**.

<u>**Приклад 3.**</u> Нехай **A=**{**3,2,6,7**}; **B=**{**28,12,4,9,11**}, **φ: A→ B** – це відображення, яке кожному числу з **A** ставить у відповідність найменше спільне кратне цього числа і числа **4**, яке входить до множини **B**. Отже маємо **(3)φ=12**, **(2)φ=4**, **(6)φ=12**, **(7)φ=28** (див. рис. 3).

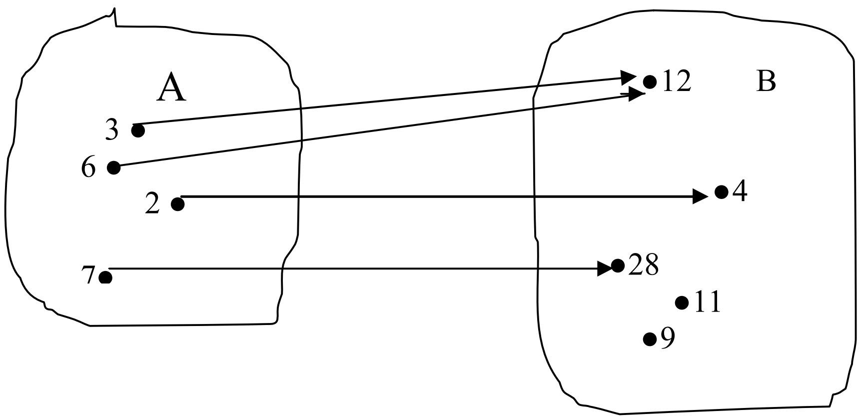


Рис. 3. Приклад відображення множин за допомогою стрілкової схеми

<u>Приклад 4.</u> Нехай $\mathbf{A}=\{$**г,а,и,л**$\}$, $\mathbf{B}=\{\mathbf{1,2,3,4,5,6,7}\}$, а $\boldsymbol{\varphi}$**:** $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ є відображення, за яким кожній літері з множини **А** ставиться у відповідність її порядковий номер у слові ”**логарифм**”.

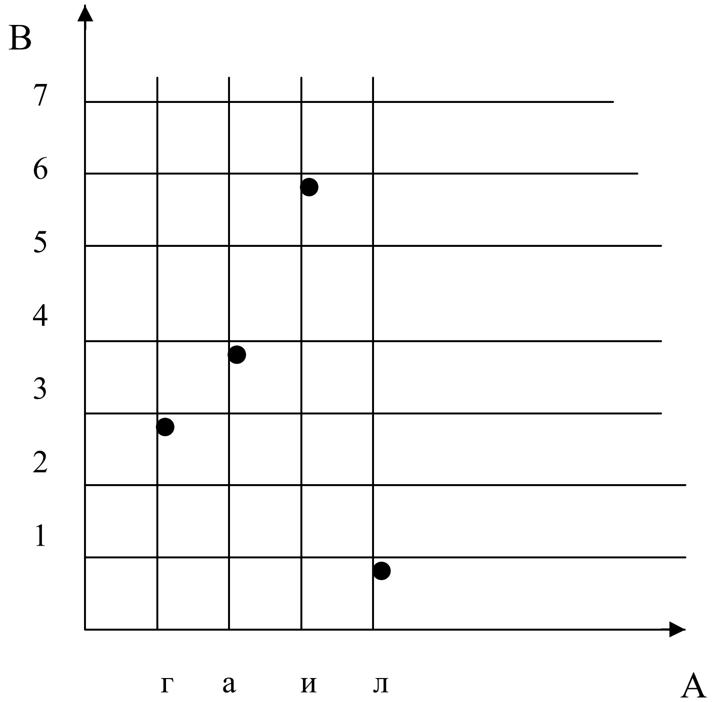


Рис. 4. Приклад графічного задання відповідностей

Графік цього відображення дається на рис. 4.

Користуючись тим, що кожне відображення множини **А** і **В** повністю описується своєю таблицею значень, підрахуємо, скільки існує різних відображень множини **А** у множину **В**.

Позначимо елементи множини **А** символами $\mathbf{a_1,a_2,\dots,a_n}$, а елементи множини **В**, в які відбувається відображення , - символами $\mathbf{b_1,b_2,\dots,b_m}$.

Причому останні не обов’язково різні. Верхній ряд таблиці 1 однаковий для всіх можливих відображень **А** у **В**, а нижній – змінюється. При цьому різних відображень **А** у **В** буде стільки, скількома різними способами можна заповнити другий ряд таблиці 1. До кожної клітинки другого ряду таблиці можна записати позначення якого завгодно елемента множини **В**, число яких дорівнює **m**. Таким чином, кожну з **n** клітинок нижнього ряду таблиці відображення можна заповнити **m** різними способами незалежно від способу заповнення інших клітинок. А це означає, що в таблиці відображення можна утворити всього $\mathbf{m\cdot m\cdot\ldots\cdot m=m^n}$ різних нижніх рядів. Отже, існує $\mathbf{m^n}$ різних відображень **А** у **В**.

Відображення $\boldsymbol{\varphi}$**:** $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ називається відображенням на всю множину **В**, або **сюр’єкцією**, якщо для кожного елемента $\mathbf{b}\in\mathbf{B}$ знайдеться такий елемент $\mathbf{a}\in\mathbf{A}$, що $\mathbf{(a)\varphi=b}$.

Якщо множини **А** і **В** скінченні та $\boldsymbol{\varphi}$**:** $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ є **сюр’єкцією**, то в нижньому ряду цієї таблиці відображення знаходяться всі елементи з **В**, хоч можливо і не один раз, а на кожній горизонтальній прямій графіка **сюр’єкції** обов’язково є позначення вершини сітки. На стрілковій схемі **сюр’єкції** в кожну точку, яка позначає елемент множини В, входить принаймні одна стрілка (можливо й більше).

Сюр’єкція скінченної множини **A** на скінченну множину **B** існує не завжди. Для цього необхідно, щоб виконувалась нерівність $|\mathbf{A}| \geq |\mathbf{B}|$.

Відображення $\boldsymbol{\varphi}$**:** $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ називається **ін’єкцією**, якщо різні елементи множини **A** переводяться цим відображенням у різні елементи множини **B**: для кожних $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2} \in \mathbf{A}$ і $\mathbf{a_1} \neq \mathbf{a_2}$ випливає, що $(\mathbf{a_1})\boldsymbol{\varphi} \neq (\mathbf{a_2})\boldsymbol{\varphi}$.

У нижньому ряду таблиці **ін’єктивного** відображення $\boldsymbol{\varphi}$**:** $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ кожний елемент множини **B** присутній лише один раз. Це означає, що при стрілковому зображенні **ін’єкції** в кожну точку, яка позначає елемент множини **B**, входить не більш ніж одна стрілка.

Якщо множини **A** і **B** скінченні і існує **ін’єкція A** у **B**, то очевидно, що має виконуватись нерівність $|\mathbf{A}| \leq |\mathbf{B}|$.

Якщо відображення множини **A** в множину **B** є водночас **ін’єктивним** і **сюр’єктивним**, то воно називається **взаємно однозначним** відображенням множини А на множину В, або **бієкцією** А на В.

При **бієкції** має виконуватися рівність $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$.

Підрахуємо, скільки існує різних бієкцій множини $\mathbf{A}=\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a_n}\}$ на множину $\mathbf{B}=\{\mathbf{b_1},\mathbf{b_2},\ldots,\mathbf{b_n}\}$.

Кожна **бієкція** $\boldsymbol{\varphi}$**:** $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ повністю описується своєю таблицею типу табл. 1, в якій кожному елементу **a** може бути відповідно поставлений у другому ряду такий елемент **b**, який не зустрінеться більше ні в якій іншій клітинці цього ряду.

Таким чином, верхній ряд таблиці 1 не змінюється, а в нижньому ряду можуть знаходитися довільно розміщені позначення елементів множини **B**, причому обов’язково різних. Отже, перше зліва місце нижнього ряду таблиці можна заповнити **n** різними способами. Якщо перше місце вже заповнене, то, незалежно від того, яким елементом воно заповнене, на друге місце можна поставити позначення будь-якого з решти **n-1** елементів множини **B**. Аналогічно третю клітинку можна заповнити **n-2** способами і т.д. Для передостаннього місця залишаються лише дві можливості його заповнення, а для останнього - лише одна. Оскільки кожна клітинка заповнюється незалежно від решти, то існує $\mathbf{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1=n!}$ різних способів одночасного заповнення клітинок. Отже, можна скласти **n!** різних таких таблиць, а це означає, що існує **n!** різних **бієкцій A** у **B**.

Математика – це мова природи.
Дж. Гіббс

1.7. Функції і перетворення

Відображення, що ставить кожному елементу **x** зі своєї області визначення **X** у відповідність єдиний елемент **y** з області значень **Y**, називається функцією **f(x)=y**.

Елемент **x** називається аргументом функції, **y**-значенням функції на **x**.

Якщо множина визначення **X** складається з єдиного елемента, то **f** називається функцією-**константою**.

Функції **f** і **g** рівні, якщо їх область визначення – одна й та сама множина **X**, і для будь-якого $x \in X$, $f(x)=g(x)$.

Таким чином, символ **f** використовується при означенні функції у двох розуміннях:

а) **f** є множиною, елементами якої є пари **(x,y)**, що беруть участь у відповідності;

б) **f(x)** є позначенням для $y \in У$, що відповідає даному $x \in X$.

Значення **y** у будь-якій з пар $(x,y) \in f$ називається функцією від даного **x** і записується у вигляді **y=f(x)**.

Формальне означення функції:

$f=\{(x,y) \in X \times Y \mid y=f(x)\}$.

Це означення дозволяє встановити спосіб задання функції:

1. Перерахуванням всіх пар **(x,y)** у вигляді таблиць.

2. Подання у вигляді формули, що містить перелік математичних операцій, які мають бути виконані над $x \in X$, щоб одержати **y**.

<u>Приклад 1</u>. Якщо **X=Y=R** і $f=\{(x,y) \in R^2 | y=x^2\}$, то $f(x)=x^2$.

Якщо у виразі $f : X \to Y$, $X=U \times V$, то будемо мати функцію від двох змінних **u** і **v**, що позначається через **f(u,v)**, де $u \in U$ і $v \in V$.

Формальне означення функції двох дійсних змінних :

$f=\{(u,v,y) \in U \times V \times Y,\ y=f(u,v)\}$.

Аналогічно дається означення функції від трьох і більшого числа змінних.

Якщо **f** і **g** – дві функції: $f : X \to Y$ і $g : Y \to Z$, то оберненими до них функціями будуть $f^{-1} : Y \to X$ і $g^{-1} : Z \to Y$.

Композиція функцій **f** і **g**, $f \circ g : X \to Z$, для кожного $x \in X$ визначає $z \in Z$ і позначається як $z=(f \circ g)x=g[f(x)]$.

Функція типу $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$ називається **n**-місною функцією. У цьому випадку функція має **n** аргументів і позначається $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=y$, де

$x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2, \ldots$, $x_n \in X_n$, $y \in Y$.

Додавання, віднімання, множення і ділення є двомісними функціями на **R**, тобто функціями типу $R^2 \to R$.

Функція отримана з $f_1,\ldots,f_n$ деякою підстановкою їх одне в одне і перейменуванням аргументів, називається **суперпозицією** $f_1,\ldots,f_n$.

Вираз, що описує цю суперпозицію і містить функціональні знаки і символи аргументів, називається **формулою**.

Більш загальним поняттям, ніж функція, є поняття **функціоналу**.

Функціонал установлює залежність між множиною чисел, з одного боку, і деякою множиною функцій – з іншого. Це значить, що **функціонал** установлює залежність числа від функції.

Прикладом функціонала може бути визначений інтеграл вигляду

$$\mathbf{I(f)}=\int_a^b f(x)dx \ .$$

Як бачимо, функціонал **I(f)** є число, що залежить від функції **f(x)**, яка вибирається з деякої заданої множини функцій.

Більш загальним поняттям є поняття **оператора**.

Оператор установлює відповідності між двома множинами функцій так, що кожній функції з однієї множини відповідає певна функція з іншої множини.

Так, якщо позначити через **Р** оператор диференціювання, то зв’язок між похідною $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$ і функцією **f(x)** може бути записаний у вигляді операторного співвідношення: $f'(x)=P[f(x)]$.

Відображення деякої множини **M=**$\{$**1,2,3,…,n**$\}$ на саму себе називається **перетворенням**.

Перетворення має такий табличний вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & i & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_i & \ldots & a_n \end{pmatrix}, \text{ де } \mathbf{a_i} \in \mathbf{M}.$$

<u>**Приклад 2**</u>. M=$\{$**1,2,3,4,5**$\}$. Для множини **M** можуть бути такі перетворення:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Деякі перетворення множини **M** мають спеціальну назву.

1. **Тотожне перетворення**

Перетворення, в якому всі елементи з **M** залишаються на місці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

2. Постійне перетворення

Перетворення, в якому кожному елементу з **M** ставиться у відповідність деякий фіксований елемент цієї множини:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a & a & a & a & a \end{pmatrix}, \text{ де } a \in \{\mathbf{1,2,3,\ldots,n}\}.$$

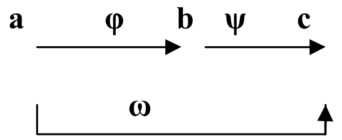
3. Підстановка

Це **бієкція** множини **M** на себе:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$, де $\mathbf{a_i \in M}$, $\mathbf{a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_n}$, **i=1,2,…,n**.

Нехай **M** – довільна множина; **φ** і **ψ** – деякі перетворення цієї множини.

Композицією $\boldsymbol{\varphi \circ \psi}$ перетворень **φ** і **ψ** називається таке перетворення **ω** множини **M**, яке кожний елемент $\mathbf{a \in M}$ перетворює в образ **(a)φ=b** і потім в **(b)ψ=c**: **(a)ω=((a)φ)ψ=c**



<u>**Приклад 3.**</u> Нехай $\boldsymbol{\varphi : x \to x+3}$ – перетворення множини дійсних чисел **R**, яке числу **x** ставить у відповідність число **x+3**, а $\boldsymbol{\psi : x \to x+2}$. Тоді перетворенням **ω** множини **R** буде композиція $\boldsymbol{\varphi \circ \psi}$, яка кожне число **x** переводить у число **x+5** (див. рис. 1).

Припустимо, що число x=3. Тоді композиція $\boldsymbol{\varphi \circ \psi}$ переведе це число в число 8.

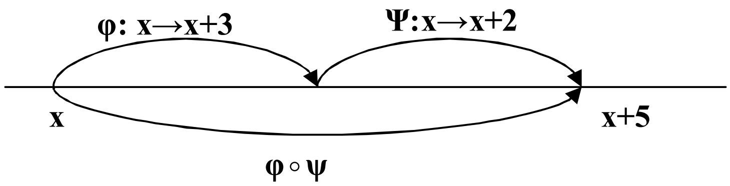


Рис. 1. Приклад перетворення чисел

В математиці сила невідомого незмірна.
Напалеон

1.8. Алгебраїчні операції та системи

Операцією на множині **M** називається відповідність, при якій з кожною парою елементів з **M** зіставлений певний елемент цієї ж множини. Означена в такий спосіб операція може бути множенням або додаванням і записують її у вигляді **c=ab** або **c=a+b**. Наприклад, дія додавання цілих чисел парі **(2,3)** ставить у відповідність число **5**. Ця операція є асоціативною.

Операція називається **асоціативною** для множення й додавання, якщо для будь-яких **a**, **b**, $\mathbf{c \in M}$ виконується співвідношення **(ab)c=a(bc)** або **(a+b)+c=a+(b+c)**.

Якщо операція довільна і парі **(a,b)** елементів з **M** вона ставить у відповідність елемент **c**, то коротко це записується так: $\mathbf{a \circ b = c}$. Елемент **c** називають **композицією**.

<u>Означення 1.</u> Множина **M** із заданою на ній дією $\circ$ називається **напівгрупою**, якщо:

а) для кожних **a, b** $\in$ **M** композиція **(a** $\circ$ **b)** належить до **M**;

б) для кожних елементів **a, b, c** $\in$ **M** виконується рівність

$(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\circ\mathbf{c}=\mathbf{a}\circ(\mathbf{b}\circ\mathbf{c})$, тобто дія $\circ$, задана на М, асоціативна;

в) існує такий елемент **e** $\in$ **M**, що для кожного **a** $\in$ **M** маємо $\mathbf{a}\circ\mathbf{e}=\mathbf{e}\circ\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

Елемент **e** називають нейтральним для дії $\circ$. Інколи така напівгрупа називається **моноїдом**, а напівгрупа визначається як така множина, в якій виконуються лише пункти а і б.

<u>Приклад 1.</u> Множина **Z** усіх цілих чисел для дії додавання – напівгрупа.

Дійсно, сума цілих чисел – знову ціле число. Дія додавання цілих чисел має асоціативну властивість.

Нейтральним елементом для дії додавання цілих чисел служить число 0, тому що для кожного **a** $\in$ **Z** маємо **a+0=0+a=a**.

Множина $\mathbf{Z}^+$ додатних цілих чисел із заданою на ній операцією $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}=\mathbf{a}^\mathbf{b}$ не є напівгрупою, оскільки ця операція не асоціативна, тобто для чисел із $\mathbf{Z}^+$ не завжди виконується рівність $(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\circ\mathbf{c}=\mathbf{a}\circ(\mathbf{b}\circ\mathbf{c})$.

Наприклад. $(\mathbf{2}\circ\mathbf{3})\circ\mathbf{2}=(\mathbf{2}^\mathbf{3})^\mathbf{2}\neq\mathbf{2}\circ(\mathbf{3}\circ\mathbf{2})=2^{(3^2)}$.

<u>Означення 2.</u> Множина М із заданою на ній операцією $\circ$ називається **групою**, якщо задовольняються вимоги означення півгрупи і, крім того, вимога, що для кожного елемента **a** $\in$ **M** існує такий елемент **b** $\in$ **M**, що $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}=\mathbf{b}\circ\mathbf{a}=\mathbf{e}$.

Якщо операція $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$ у групі є множення, то нейтральний елемент е називається одиницею групи, а елемент $\mathbf{b}=\mathbf{a}^{-1}$ називається елементом, оберненим до **a**.

Якщо операція, визначена в групі, називається додаванням, то елемент **e** називається нулем групи, а елемент $\mathbf{b}=\mathbf{a}^{-1}$ називають протилежним а і позначають **–a**. Елементи **0** і **a** задовольняють співвідношенням: **a+0=0+a=a**, **a+(-a)=(-a)+a=0**.

<u>Приклад 2.</u> Множина **Z** усіх цілих чисел для дії додавання – група.

У прикладі 1 були наведені докази, що **Z** – півгрупа.

Крім того, для кожного числа **a** $\in$ **Z** існує таке число **b** $\in$ **Z** (протилежне а), що **a+b=b+a=0**.

<u>Приклад 3.</u> Множина $\mathbf{R}^+$ додатних дійсних чисел для дії множення – група.

Добуток додатних чисел – знову додатне число; дія множення додатних чисел асоціативна; нейтральним числом є 1; для кожного числа $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^+$ існує обернене йому число $\mathbf{a}^{-1}$.

Звернемось до підстановок (див. тему 1.6).

Сукупність усіх підстановок на множині **M** позначимо символом **S(M)**.

Тоді можна показати:

1. Якщо підстановки $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{S(M)}$, то й їх композиція $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{S(M)}$.

2. Дія множення підстановок асоціативна.

3. Існує єдина підстановка $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{S(M)}$, така, що для кожної підстановки $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{S(M)}$, $\boldsymbol{\varepsilon} \circ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varphi}$.

4. Існує така підстановка $\boldsymbol{\varphi}^{-1} \in \mathbf{S(M)}$, що $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1} = \boldsymbol{\varphi}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varepsilon}$.

Отже, сукупність $\mathbf{S(M)}$ усіх підстановок на множині $\mathbf{M} = \{\mathbf{1,2,3,\ldots,n}\}$ для дії множення підстановок утворює групу. Кожна група є також і півгрупою, але не навпаки.

Для множин із заданими на них операціями перевіряти виконання властивостей групи буває інколи важко.

Якщо множина скінченна, то для такої перевірки можна скористатися, наприклад, таблицею множення групи.

Розглянемо її побудову на прикладі.

Нехай **G** – множина підстановок:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перемножуючи їх зліва направо, одержимо табл.. 1.

Таблиця 1. Таблиця множення підстановок

i / j	$\boldsymbol{\alpha}_1$	$\boldsymbol{\alpha}_2$	$\boldsymbol{\alpha}_3$
$\boldsymbol{\alpha}_1$	$\boldsymbol{\alpha}_1$	$\boldsymbol{\alpha}_2$	$\boldsymbol{\alpha}_3$
$\boldsymbol{\alpha}_2$	$\boldsymbol{\alpha}_2$	$\boldsymbol{\alpha}_3$	$\boldsymbol{\alpha}_1$
$\boldsymbol{\alpha}_3$	$\boldsymbol{\alpha}_3$	$\boldsymbol{\alpha}_1$	$\boldsymbol{\alpha}_2$

Наприклад:

$$\boldsymbol{\alpha}_2 \circ \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}_1$$

Оскільки всі клітинки таблиці заповнені лише символами $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, множина **G** замкнена для дії множення заданих підстановок і, отже, їх добуток відноситься до множини **G**.

Умови асоціативності дії множення елементів з **G** також виконуються. Перестановка $\boldsymbol{\alpha}_1$ є нейтральним елементом групи.

З таблиці видно, що кожний елемент $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ має обернений елемент: $\boldsymbol{\alpha}_1^{-1}$, $\boldsymbol{\alpha}_3^{-1}$, $\boldsymbol{\alpha}_2^{-1}$.

Таким чином, множина перестановок **G** є групою.

Дії додавання і множення чисел мають властивість комутативності. Але вимога комутативності не входить до означень напівгрупи і групи. Це пояснюється тим, що дія множення перетворень не комутативна, а історичне поняття групи виникло саме на основі вивчення властивостей дії множення підстановок на скінченних множинах.

Окремо розглядаються групи, для яких виконується вимога комутативності. Вони називаються **абелевими**.

Якщо між елементами двох груп **X** і **Y** установлена взаємо однозначна відповідність, при якій для будь-яких елементів **a**, $\mathbf{b} \in \mathbf{X}$ і відповідних їм елементів **a'**, $\mathbf{b'} \in \mathbf{Y}$ елементу $\mathbf{c=a \circ b}$, відповідатиме елемент $\mathbf{c'=a' \circ b'}$, то такі групи називаються **ізоморфними**.

Ізоморфні групи можуть відрізнятися одна від одної лише природою своїх елементів. Але всі властивості ізоморфних груп однакові.

Якщо на множині **X** визначені зразу дві алгебраїчні операції - додавання і множення, причому операція додавання комутативна (**a+b=b+a**), а операція множення зв'язана з операцією додавання дистрибутивними законами **a(b+c)=ab+ac** і **(b+c)a=ba+ca**, то така множина називається **кільцем**.

У кільці може не бути одиниці і обернених елементів.

Кільцями є множини всіх цілих, раціональних, дійсних і комплексних чисел відносно звичайних операцій додавання і множення.

Кільце, в якому для будь-якого елемента $\mathbf{a \neq 0}$ і будь-якого елемента **b** існує рівно один елемент **x**, так що **ax=b**, називається **полем**; елемент **x** називається часткою від ділення елемента **b** на елемент **a** і позначається **x=b/a**.

Полями є кільця раціональних, дійсних і комплексних чисел.

Математика – один з видів мистецтв.
Н. Вінер

1.9. Групи

Перейдемо до більш глибокого розкриття змісту поняття групи, тому що група є одним із найбільш важливих об’єктів дискретної математики та алгебри в цілому.

Звичайно **група** в загальній теорії визначається як деяка множина елементів **G** із заданою на ній двомісною (бінарною) операцією **f**, що задовольняє певним умовам. Ця операція інколи ще називається груповою операцією, або груповим законом. Операція **f** відображує будь-яку пару елементів **a**, **b** множини **G** в елемент із тієї самої множини. Отже, групова операція є не що інше, як функція, що перетворює будь-яку пару елементів множини **G** у деякий елемент тієї самої множини. При цьому обов’язково зазначається, який елемент перший, а який - другий. У конкретних ситуаціях групову операцію **f** можна представити знаком “+” або “ ·”, що позначає суму або добуток елементів **a** і **b**, а в більш загальних випадках - **композицією** “∘”.

Таким чином, групою називається пара **<G; f>**, яка складається з множини елементів **G** і двомісної операції **f** над ними, якщо ця операція задовольняє таким умовам:

1. Операція **f** асоціативна, тобто для будь-яких елементів **a**, **b** і **c** множини **G**

1. **f (f (a, b), c) = f (a, f (b, c)).**

2. Існує нейтральний (одиничний) елемент, тобто такий елемент **e** множини **G**, що для будь-якого елемента **a** із **G**

f (e, a) = f (a, e) = a.

3. Існує зворотний елемент, тобто для будь-якого елемента **a** множини **G** можна знайти такий свій елемент **b**, що

f(a, b) =f (b, a) = e.

Елементи множини **G** при виконанні зазначених умов називаються елементами групи.

Оскільки наведені умови завжди повинні виконуватися для будь-якої групи і кожна з них не виводиться з деяких інших умов і не замінюється ними, то ці умови виступають у вигляді аксіом. Для аксіом їх дійсність припускається завчасно. Тому вони не доводяться і в принципі не можуть бути доведеними, оскільки є первинними істинами. Завжди, коли будь-яка множина елементів називається групою, припускається, що для неї виконані наведені вище аксіоми. У протилежному випадку множина не може бути групою.

Теореми, які використовують тільки аксіоми групи, називаються **теоретико-груповими.** Вони цінні тим, що їх результати залишаються в силі для будь-яких окремих груп. Найбільш загальні теоретико-групові доведення можуть випливати тільки з аксіом групи. Це дозволяє запобігти повторенню доведень для окремих груп, в яких виконуються інші більш специфічні умови та обмеження, що конкретизують групові операції та елементи множини **G**. У загальній теорії груп звичайно уникають говорити про вид елемента і тип групових операцій. У випадку, коли є конкретна група з визначеними елементами і груповою операцією, висновок того чи іншого результату проводиться за допомогою загальної теорії груп, яка ще називається **абстрактною.**

Перейдемо тепер до груп із груповими операціями множення "**·**" і додавання "+". У першому випадку іноді говорять про **мультиплікативні** операції, а в другому - про **адитивні**. При цьому слід зазначити, що в історичному плані **мультиплікативні** операції є першими і на сьогодні найбільш поширеними. Розглянемо групу з цими операціями.

Нехай задана деяка множина **G**, на якій визначена групова операція множення, що умовно позначається "**·**", і відповідно задана деяка двомісна функція **f**, яка зіставляє будь-якій парі **a**, **b** елементів із **G** елемент із цієї самої множини, що називається добутком **a** і **b** і позначається **a·b** або **ab**. Для того, щоб множина **G** із заданою на ній операцією **f** була **групою**, необхідне і достатнє виконання таких аксіом:

1. Асоціативності $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

2. Існування одиничного елемента 1, такого, що для будь-якого **a**

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

3. Наявність для **a** свого зворотного елемента $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}$, такого, що $a \cdot b= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^{-1}=\mathbf{1}$ і $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}=\mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{a}=\mathbf{1}$.

Група називається **кінцевою**, якщо вона складається з кінцевої кількості елементів. У протилежному випадку вона називається **нескінченною**.

Кількість елементів кінцевої групи називається її **порядком**.

Аксіома асоціативності встановлює порядок перемноження трьох співмножників **a**, **b**, **c**, який може здійснюватись або справа наліво, або зліва направо, однак за раз заданим порядком. Звичайно співмножники, що стоять поряд, перемножуються в першу чергу. Потім здійснюється перемноження одержаного результату із співмножником, що залишився. При цьому потрібно дотримуватися встановленого порядку перемноження, порушення якого може привести до невірного результату, оскільки результати множення зліва направо і справа наліво можуть відрізнятися.

Доведемо, що дія аксіоми асоціативності поширюється також і на чотири співмножники. Для чотирьох співмножників дужки можна розставити такими п'ятьма способами:

a (b (c d)), a ((b c) d), (a b)(c d), (a (b c)) d, ((a b) c) d.

Знак множення "·" між співмножниками для простоти запису тут і в деяких інших випадках у подальшому опускається.

Оскільки положення дужок серед співмножників **a**, **b**, **c** і **b**, **c**, **d** в силу аксіоми асоціативності для трьох співмножників приводить до одного і того ж результату **a (b c) = (a b) c = abc**, **b (c d) = (b c) d = b c d**, то кількість способів розстановки дужок між чотирма співмножниками можна зменшити до трьох:

a (b c d), (a b)(c d), (a b c) d.

Доведемо, що при цьому

a (b c d) = (a b)(c d) = (a b c) d .

Замінимо у двох добутках **a(bcd)** і **(ab)(cd)** добуток **cd на q.** Тоді

a (bcd) = a (bq) і **(ab)(cd) = (ab) q**.

Відповідно до аксіоми асоціативності праві частини одержаних виразів будуть рівними. З цього випливає, що будуть рівними й ліві частини цих рівностей: **a (bcd) = (ab)(cd)**.

Тепер проведемо заміну **ab** на **p** у добутках **(ab)(cd)** і **(abc) d**. Відповідно одержимо, що

(a b)(c d) = p(c d) і **(a b c) d = (pc) d** .

Оскільки за аксіомою асоціативності **p (cd) = (pc) d,** то і **(ab)(cd) = (abc) d**.

Із того, що **a (b c d) = (a b) (c d)** і **(a b) (c d) = (a b c) d**, виходить, що **a (b c d) = (a b)(c d) = (a b c) d** і відповідно

a (b (c d)) = a ((b c) d) = (a b)(c d) = (a (b c)) d = ((a b) c) d, що і треба було довести.

Аналогічно можна довести дію аксіоми асоціативності при числі співмножників, що дорівнюють 5, 6, ..., n. Спробуйте самостійно провести доведення на основі методу математичної індукції для числа співмножників, що дорівнюють n.

Аксіома про наявність у групі одиничного елемента припускає, що для будь-якого елемента **a** групи **a** · 1 = 1 · **a = a**, але не стверджує, що цей елемент єдиний.

<u>Теорема 1.</u> Для елементів групи є тільки один одиничний елемент - 1.

<u>Доведення.</u> Припустимо, що для конкретного елемента a, крім одиничного елемента 1, для якого виконується рівність **a · 1 = 1 · a = a**, є ще один одиничний елемент 1', що задовольняє рівності **a · 1' = 1' · a =** a. Оскільки ліві

частини цих двох рівностей дорівнюють **a**, то вони також повинні бути рівними між собою: $a \cdot 1 = a \cdot 1'$ **і** $1 \cdot a = 1' \cdot a$.

Із цього виходить, що $1' = 1$, отже, для конкретного елемента a є тільки один одиничний елемент - 1.

Аналогічно для будь-якого іншого елемента **b**, підставивши його в умову аксіоми замість **a**, можна довести за наведеною вище схемою наявність у групі одного одиничного елемента - 1. Теорему доведено■

Умова існування зворотного елемента $\mathbf{a^{-1}}$ у групі по відношенню до конкретного елемента **a**, такого, що $\mathbf{a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1}$, постулюється однією із аксіом групи. Однак ця аксіома не вказує, що елемент $\mathbf{a^{-1}}$ єдиний.

__**Теорема 2.**__ Якщо для конкретного елемента **a** є елемент **a'**, для якого $\mathbf{a \cdot a' = a' \cdot a} = 1$, то такий елемент є тільки один $\mathbf{a' = a^{-1}}$.

<u>Доведення.</u> Із рівності $\mathbf{a \cdot a' = 1}$ виходить, що $\mathbf{a^{-1} (a \cdot a') = a^{-1} \cdot 1 = a^{-1}}$. З іншого боку, $\mathbf{a^{-1} (a \cdot a') = (a^{-1} \cdot a) a' = 1 \cdot a' = a'}$ і, оскільки за доведеним вище $\mathbf{a^{-1} \cdot (a \cdot a') = a^{-1}}$, **то** $\mathbf{a' = a^{-1}}$.

Із рівності $\mathbf{a' \cdot a = 1}$ виходить, що $\mathbf{(a' \cdot a) \cdot a^{-1} = 1 \cdot a^{-1} = a^{-1}}$. З іншого боку, оскільки $\mathbf{a \cdot a^{-1} = 1}$, то $\mathbf{(a' \cdot a) \cdot a^{-1} = a' \cdot (a \cdot a^{-1}) = a' \cdot 1 = a'}$, і відповідно $\mathbf{a' = a^{-1}}$.

Таким чином, для даного елемента **a** існує тільки один елемент $\mathbf{a' = a^{-1}}$, що задовольняє як рівності $\mathbf{a \cdot a' = 1}$, так і рівності $\mathbf{a' \cdot a = 1}$.
Теорему доведено■

__**Теорема 3.**__ $\mathbf{(a^{-1})^{-1} = a}$.

<u>Доведення.</u> Із рівності $\mathbf{a \cdot a' = a' \cdot a = 1}$, де $\mathbf{a' = a^{-1}}$, виходить, що для елемента **a** елемент **a'** виступає як зворотний, тобто $a = (a')^{-1}$. Підставивши замість **a'** його значення $\mathbf{a^{-1}}$, одержимо, що $\mathbf{a = (a^{-1})^{-1}}$. Теорему доведено■

__**Теорема 4.**__ Якщо дані рівності $\mathbf{x \cdot a = b}$ і $\mathbf{a \cdot x = b}$, то їх розв'язками відповідно будуть вирази $\mathbf{x = b \cdot a^{-1}}$ і $\mathbf{x = a^{-1} \cdot b}$ і ці розв'язки єдині.

<u>Доведення.</u> Із того, що $\mathbf{a \cdot a^{-1} = 1}$ і елемент $\mathbf{a^{-1}}$ єдиний, розв'язуванням рівності $\mathbf{x \cdot a = b}$ буде елемент $\mathbf{x = b \cdot a^{-1}}$. Дійсно, $\mathbf{x \cdot a = b \cdot a^{-1} \cdot a = b \cdot 1 = b}$. Це розв'язування єдине, оскільки якщо був би ще один розв'язок цієї рівності у вигляді елемента $\mathbf{x = c \cdot a^{-1}}$, то тоді $\mathbf{c \cdot a^{-1} \cdot a = c \cdot 1 = b}$. Отже, $\mathbf{c = b}$ і обидва розв'язки рівності $\mathbf{x \cdot a = b}$ є одним єдиним розв'язком.

Для рівності $\mathbf{a \cdot x = b}$ розв'язком буде елемент $\mathbf{x = a^{-1} \cdot b}$. Цей розв'язок також єдиний, оскільки для будь-якого елемента $\mathbf{x = a^{-1} \cdot c}$ повинна була б виконуватись рівність $\mathbf{a \cdot a^{-1} \cdot c = 1 \cdot c = b}$ і відповідно $\mathbf{c = b}$. У результаті обидва розв'язки є одним єдиним розв'язком. Теорему доведено■

__**Теорема 5.**__ Якщо $\mathbf{a \cdot b = a \cdot c}$ або $\mathbf{b \cdot a = c \cdot a}$, то $\mathbf{b = c}$.

<u>Доведення.</u> Запишемо першу умову теореми у вигляді рівності

$\mathbf{a \cdot b = x}$, де $\mathbf{x = a \cdot c}$. Тоді $\mathbf{b = a^{-1} \cdot x = a^{-1} \cdot a \cdot c = 1 \cdot c = c}$. Аналогічно запишемо другу умову у вигляді рівності $\mathbf{b \cdot a = y}$, де $\mathbf{y = c \cdot a}$. Тоді $\mathbf{b = y \cdot a^{-1} = c \cdot a \cdot a^{-1} = c \cdot 1 = c}$. І в першому, і в другому випадку одержана рівність $\mathbf{b = c}$. Теорему доведено■

__**Теорема 6.**__ $\mathbf{(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}}$.

<u>Доведення.</u> Очевидно, що $\mathbf{(a \cdot b)(a \cdot b)^{-1} = 1}$. З іншого боку,

$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{a}^{-1}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^{-1})\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{1}$. Отже, можна записати, що $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^{-1} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{a}^{-1})$ і, відповідно з теоремою 5, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^{-1} = \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{a}^{-1}$. Теорему доведено■

За допомогою метода математичної індукції, можна отримати таке узагальнення теореми 6: $(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n)^{-1} = \mathbf{a}_n^{-1} \ldots \mathbf{a}_1^{-1}$.

Доведення провести самостійно.

До цього часу були розглянуті умови існування груп з операціями "множення". Тепер розглянемо групи з операціями "додавання".

Групові аксіоми набудуть при цьому такого вигляду:

1. Умова асоціативності:

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

2. Наявність нейтрального елемента: $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

3. Існування протилежного елемента: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Прикладом групи, де зручніше користуватися адитивною мовою, є групи цілих чисел. Груповою операцією тут є звичайне складання, нейтральним елементом виступає нуль, а зворотним елементом - протилежне число.

Групову операцію часто вводять за допомогою поняття перетворення множини **G** у себе. Реалізація такого перетворення, наприклад ψ, здійснюється шляхом зіставлення за визначеним правилом кожному елементу **a** множини **G** єдиного елемента $(\mathbf{a})\,\psi = \mathbf{b}$ цієї множини, що називається образом при перетворенні ψ елемента **a**, який у свою чергу є прообразом елемента **b**.

Якщо задані два перетворення ψ і φ множини **G** у себе, то можна скласти нове перетворення $\omega = \psi \circ \varphi$, що називається **композицією**, яке одержується в результаті послідовного виконання перетворень ψ і φ одне за одним. Так, наприклад, для елементів **a** і **b** образами будуть відповідно перетворення $(\mathbf{a})\,\psi=\mathbf{b}$ і $(\mathbf{b})\,\varphi=\mathbf{c}$, а композицією перетворень є перетворення $\omega = \psi \circ \varphi=((\mathbf{a})\psi)\varphi=(\mathbf{b})\varphi=\mathbf{c}$. Такі композиції перетворень множини **G** в себе утворюють групові операції, які в сукупності з множиною елементів **G** створюють групу, що називається **групою перетворень**.

Оскільки в групі перетворень, як і в більшості інших, умова комутативності відсутня, то

$\psi \circ \varphi \neq \varphi \circ \psi$.

Сукупність G перетворень утворює групу, якщо виконуються такі умови:

1. Разом із будь-якими двома перетвореннями ψ і φ сукупність **G** містить їх композицію $\psi \circ \varphi$.

2. На композицію перетворень поширюється умова асоціативності, тобто якщо φ, ψ, $\mathbf{h}$ є перетвореннями, то $(\psi \circ \varphi) \circ \mathbf{h}=\psi \circ (\varphi \circ \mathbf{h})$.

3. Наявність для кожного елемента в **G** тотожного перетворення **e**, що є нейтральним (одиничним) перетворенням, для якого $\varphi \circ \mathbf{e}= \mathbf{e} \circ \varphi= \varphi$.

4. Разом із кожним перетворенням φ сукупність **G** містить і зворотне до нього перетворення φ^{-1}, композиція яких $\varphi \circ \varphi^{-1}= \mathbf{e}$.

Якщо множина **G** кінцева, то будь-яке взаємооднозначне перетворення її в себе зводиться до зміни порядку проходження її елементів. Такі перетворення називають **підстановками** (іноді **перестановками**).

Припустимо, що елементами множини **G** є числа 1, 2, ..., n. Тоді підстановку ψ_γ можна записати у вигляді:

$$\psi_\gamma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \Psi(1) & \Psi(2) & ... & \Psi(n) \end{pmatrix}$$

де ψ **(i)**, i = 1, 2, ..., n, - образ i-го числа при підстановці ψ_γ.

Оскільки ψ_γ - взаємооднозначне перетворення множини **G** в себе, то для $i \neq j$ $\psi(i) \neq \psi(j)$. Вище було наведено, що кількість різних підстановок, які є взаємооднозначними відображеннями (**бієкціями**) **n** елементів чисел в самих себе, дорівнює **n!** Тому $\gamma=0, 1, ..., n! - 1$.

Наприклад, якщо n = 3, то є 3! = 1·2·3 = 6 підстановок множини **G** із трьох елементів 1, 2, 3 в самих себе:

$$\Psi_0=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \Psi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Psi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Psi_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Psi_5=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звернемо увагу, що, наприклад, підстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

однакові, оскільки їх області визначення (елементи 1,2,3) рівні, а кожний елемент, що належить спільній області визначення, вони переводять в один і той самий елемент.

Властивість підстановок переводити одні й ті ж самі елементи з області визначення в загальному випадку в різні елементи області значення використовується при послідовному виконанні перетворень, що являє собою композицію (добуток) підстановок.

Припустимо, що необхідно перемножити підстановки ψ_1 і ψ_2. Тоді результуюча перестановка

$$\Psi_{12}=\psi_1 \circ \psi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\psi_3.$$

Тут використана властивість підстановок, яка дозволяє порушувати порядок розміщення елементів у підстановці, що полегшує розв'язування задачі їх множення.

Використовуючи наведене на прикладі правило перемноження підстановок, складемо їх таблицю множення (див. табл. 1).

Таблиця 1. Група підстановок

Підстановка		Перший співмножник					
		Ψ_0	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5
Другий співмножник	Ψ_0	Ψ_0	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5
	Ψ_1	Ψ_1	Ψ_0	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_2	Ψ_3
	Ψ_2	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_0	Ψ_1	Ψ_5	Ψ_4
	Ψ_3	Ψ_3	Ψ_2	Ψ_5	Ψ_4	Ψ_0	Ψ_1
	Ψ_4	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_1	Ψ_0	Ψ_3	Ψ_2
	Ψ_5	Ψ_5	Ψ_4	Ψ_3	Ψ_2	Ψ_1	Ψ_0

Звернемо увагу на те, що $\boldsymbol{\psi_0}$ - тотожне перетворення, яке є нейтральним (одиничним) елементом:

$\mathbf{e}=\boldsymbol{\psi}_0=\boldsymbol{\psi}_1^2=\boldsymbol{\psi}_2^2=\boldsymbol{\psi}_5^2$.

Із цього виходить $\boldsymbol{\psi}_1^{-1}=\boldsymbol{\psi}_1$, $\boldsymbol{\psi}_2^{-1}=\boldsymbol{\psi}_2$, $\boldsymbol{\psi}_5^{-1}=\boldsymbol{\psi}_5$. Також із того, що $\boldsymbol{\psi_3\psi_4} = \boldsymbol{\psi_4\psi_3}=\mathbf{e}$, виходить, що $\boldsymbol{\psi}_3 = \boldsymbol{\psi}_4^{-1}$ і $\boldsymbol{\psi}_4= \boldsymbol{\psi}_3^{-1}$. Відповідно із $\boldsymbol{\psi}_0= \mathbf{e}$ випливає, що $\boldsymbol{\psi}_0= \boldsymbol{\psi}_0^{-1}$.

Необхідно при перемноженні підстановок дотримуватися порядку їх перемноження, наприклад, спочатку береться підстановка на першому зверху рядку (перший співмножник) і потім помножується на необхідну підстановку з першого зліва стовпця (другий співмножник), а результат записується на перехрещенні цих рядка і стовпця.

При зворотному порядку перемноження буде одержана інша таблиця множення перестановок. Спробуйте скласти її самостійно.

На закінчення наведемо без доведення важливу теорему, відому як теорему Келі (Caley - англійський математик, 1821-1895).

Усяка кінцева група ізоморфна до деякої групи підстановок.

Це значить, що для будь-якої групи із кінцевою кількістю елементів можна знайти групу підстановок, яка не буде відрізнятися від неї за своїми властивостями. Отже, вивчення властивостей груп підстановок є одночасно вивченням найбільш загальних властивостей абстрактних груп.

Існує вражаюча можливість оволодіти предметом
математично, не зрозумівши суті справи.
А. Ейнштейн

1.10. Приклади груп

Нижче будуть наведені деякі приклади груп, що дозволить читачам у подальшому самостійно знаходити нові групи.

Приклад 1. Число 0 утворює групу за множенням і додаванням.

Дійсно, для операції множення $0 \cdot 0 = 0$, тобто операція множення не виводить результат множення з множини **G** = {0}. Асоціативність операції множення для даного випадку також залишається в силі $0 \cdot (0 \cdot 0) = (0 \cdot 0) \cdot 0$. Одиничним (нейтральним) і зворотним елементом до 0 у множині **G** також є 0.

Для операції додавання $0 + 0 = 0$ і, виходить, результат додавання залишається в рамках множини **G**. Операція додавання для кількох нулів асоціативна: $0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0 = = 0$. Нейтральним елементом для операції додавання з 0 у множині **G** також буде 0. Нарешті, зворотним елементом до 0 у заданій множині **G** також буде 0.

Звернемо також увагу на те, що операції множення 0 на 0 і додавання 0 з 0 не тільки асоціативні, але й комутативні. Тому одержана група є **абелевою**.

Приклад 2. Число 1 утворює групу за множенням.

У цьому випадку множина **G** = {1}. Операція множення $1 \cdot 1=1$ залишається в рамках множини **G**. Операція множення асоціативна і комутативна, оскільки $1 \cdot (1 \cdot 1) = (1 \cdot 1) \cdot 1$ і $1 \cdot (1) = (1) \cdot 1$. Одиничним і зворотним елементами для 1 є 1. Оскільки множення не тільки асоціативне, але й комутативне, то дана група **абелева**.

Однак 1, на відміну від 0, не має властивості групи для операції додавання, оскільки $1 + 1 = 2$ і відповідно 1 не є одиничним елементом для 1 і тим більше 1 в даному випадку не є оберненим елементом до себе.

Тому можна вважати, що число 0 має більш глибокі групоутворюючі властивості, ніж 1.

Приклад 3. Числа +1 і -1 утворюють групу за операцією множення.

Оскільки $(+1) \cdot (-1) = -1$, $(+1) \cdot (+1) = +1$, $(-1) \cdot (-1) = +1$, $(-1) \cdot (+1) = -1$, то результати множення є елементами множини **G**= {+1, -1}, яка утворює групу. Асоціативність наведених операцій очевидна.

Існує одиничний елемент +1, множення на який елементів -1 та +1 справа і зліва не змінює їх значення: $(+1) \cdot (-1) = -1$, $(-1) \cdot (+1) = -1$; $(+1) \cdot (+1) = +1$.

Існують зворотні елементи +1 і -1 для елементів відповідно +1 і -1, помноженя на які утворює одиничний елемент: $(+1) \cdot (+1) = +1$,$(-1) \cdot (-1) = +1$.

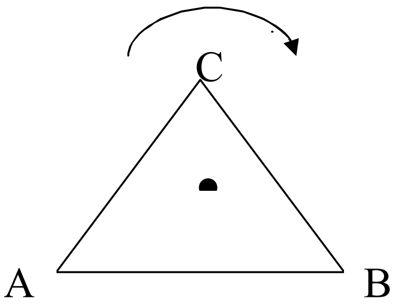
Приклад 4. Додавання векторів утворює групу за операцією додавання.

Склавши будь-які два вектори, одержимо вектор. Отже, операція додавання не виводить результуючий елемент за межу множини векторів **G**.

Операція асоціативності для векторів виконується за їх визначенням.

Одиничним елементом є нульовий вектор, а елементом, зворотним даному вектору, - протилежний вектор (їх сума утворює нульовий вектор).

Приклад 5. Повороти правильного трикутника навколо його центру в одному напрямку утворюють групу (див. рис. 1).



.

Рис.1. Повороти правильного трикутника

Визначимо поворот як такий, що збігається, якщо він відрізняється від початкового положення трикутника на ціле число повних обертів (один повний оберт дорівнює оберту на **360°)**. Один такий поворот будемо називати **нульовим** і позначимо як a_0.

Будемо вважати послідовно проведені в одному напрямку два повороти **помноженими**.

Повороти будемо проводити, окрім нульових, також на 120° і 240°. Позначимо їх відповідно як $\mathbf{a_1}$ і $\mathbf{a_2}$.

Очевидно, що можуть бути одержані такі результати множення поворотів між собою у вигляді їх добутків:

$\mathbf{a_0 \cdot a_0 = a_0}$, $\mathbf{a_0 \cdot a_1 = a_1 \cdot a_0 = a_1}$, $\mathbf{a_0 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_0 = a_2}$, $\mathbf{a_1 \cdot a_1 = a_2}$, $\mathbf{a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1 = a_0}$, $\mathbf{a_2 \cdot a_2 = a_1}$.

Ці результати можна звести в таблицю 1.

Таблиця 1. Добутки поворотів правильного трикутника

Повороти	a_0	a_1	a_2
a_0	a_0	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2	a_0
a_2	a_2	a_0	a_1

Добуток двох елементів у цій таблиці знаходимо на перетині рядка, поміченого першим елементом, і стовпця, поміченого другим елементом.

Індекси, одержані в табл. 1, можна створити за правилами складання цифр трійкової системи числення (див. табл. 2).

Таблиця 2. Складання трійкових цифр

Цифри	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Із таблиці 2 виходить, що всі результати помноження поворотів належать до початкової групи поворотів **G** = $\{a_0, a_1, a_2\}$.

Ці повороти також задовольняють асоціативному і комутативному закону.

Серед поворотів є також нульовий поворот a_0, який є нейтральним елементом для поворотів a_0, a_1 і a_2.

Нарешті, кожний із трьох поворотів має зворотний, що дає в добутку з початковим нейтральний a_0.

Зворотний елемент для $a_0 = a_0^{-1}$ тому, що $a_0 \cdot a_0 = a_0$.

Оскільки $a_1 \cdot a_2 = a_0$, то $a_1 = a_2^{-1}$ і $a_2 = a_1^{-1}$.

Отже, добутки поворотів правильного трикутника задовольняють усім аксіомам групи. Тому множина поворотів правильного трикутника в одному напрямку з операціями їх множення між собою є групою.

Отримані результати можна узагальнити на алгебру із чотирьох літер, призначену для перемноження поворотів квадрата. У цьому випадку будемо мати чотири повороти: нульовий поворот, повороти на 90°, на 180° і на 270°. Ці повороти позначимо відповідно через a_0, a_1, a_2, a_3. Якщо під добутком поворотів розуміти знову послідовне здійснення поворотів в одному напрямку, то одержимо таблицю множення, аналогічну наведеній вище (див. табл. 3).

Таблиця 3. Добутки поворотів квадрата

Повороти	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	a_3	a_0
a_2	a_2	a_3	a_0	a_1
a_3	a_3	a_0	a_1	a_2

Відповідно індекси літер табл. **3** отримуються за правилами складання в четиричній системі числення.

Можна показати за аналогією з попередніми добутками, що операція множення літер задовольняє асоціативному і комутативному закону.

Серед літер є також нейтральна a_0, множення на яку будь-яких інших літер, як справа, так і зліва, не змінює їх значень, і, нарешті, для кожної літери є зворотна, результат множення на яку дорівнює a_0.

Аналогічно можна розглядати повороти правильного п'яти-, шести- і взагалі **n**-кутника та побудувати відповідні таблиці множення.

На практиці операція множення поворотів дозволяє формально визначити положення n-кутника після декількох поворотів.

Так, наприклад, для правильного трикутника добуток поворотів

$$\mathbf{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_1 = a_0 \cdot (a_1 \cdot a_2) \cdot (a_1 \cdot a_1) \cdot a_2 \cdot (a_1 \cdot a_1) = (a_0 \cdot a_0) \cdot (a_1 \cdot a_1) \cdot (a_2 \cdot a_2) = (a_0 \cdot a_2) \cdot a_1 = a_2 \cdot a_1 = a_0.}$$

Це означає, що після всіх поворотів правильний трикутник буде знаходитись у початковому стані.

Математика - це наука про множини.
Імре Ружа

Частина 2. Логічні функції

2.1.Числення висловлювань

В алгебрі логіки, або численні висловлювань, об'єктом дослідження є висловлення.

<u>Означення 1.</u> Будь-яке твердження, що може бути істинним або хибним, називається **висловленням.**

Істинним висловленням приписується значення 1, хибним - 0.

З одного або кількох висловлень, що приймаються за прості, можна скласти складні висловлення.

Окремі висловлення позначатимемо великими літерами латинського алфавіту **A, B, C**…

<u>Приклад 1.</u> Простими висловленнями будуть: **А = "Вісім - парне число"**; **В = "Вісім ділиться на два"**; **С = "Вісім ділиться на три"**; **Д = "Київ - *столиця* України"**. З них висловлення **А**, **В** і **Д** - істинні, а висловлення **С** - хибне. Це записується як **А = 1**, **В = 1, С = 0**, **Д = 1**.

<u>Приклад 2.</u> Складним висловленням буде висловлення: **"Якщо вісім - парне число, то вісім ділиться на два"**. Це висловлення істинне, тобто дорівнює 1.

Для об'єднання простих висловлень у складні застосовують **логічні операції**.

Розглянемо основні логічні операції над висловленнями.

1. Операція **"Константа нуль"**. Передає висловлення, яке завжди є хибним. Позначається **"F = 0"**.

2. Операція **"Константа одиниця"**. Передає висловлення, яке завжди є істинним. Позначається **"F = 1"**.

3.Логічною операцією **"НЕ"** називається висловлення **F = Ā** *,* яке є істинним тоді і лише тоді, коли **А** хибне, і хибне, коли **А** є істинним. Читається ***"*Не А*"*** або **"Невірно, що А"**.

4. Логічною операцією **"І" (кон'юнкцією, добутком, логічним множенням)** називається висловлення **F=A/\B (A·B, AB, A&B)**, яке є істинним тоді і лише тоді, коли обидва прості висловлення істинні, і хибним, коли хоча б одне просте висловлення хибне. Читається **"А і В"**.

5. Логічною операцією **"АБО" (диз'юнкцією, сумою, логічним додаванням)** називається складне висловлення **F = A v B (A + B, A або B)***,* яке є хибним тоді і лише тоді, коли обидва прості висловлення хибні, і істинним, коли хоча б одне висловлення істинне. Читається **"А або В"**.

6. Логічною операцією **"Якщо - то" (імплікацією)** називається складне висловлювання **F = A ⟶ B (F = B ⟶ A),** яке є хибним тоді і лише тоді, коли **А(В)** істинне, а **В(А)** - хибне. Читається **"Якщо А, то В" ("Якщо В, то А")**.

7. Логічною операцією **"Заборона по В" (заперечення імплікації А ⟶ В*)*** називається складне висловлення F = **AΔB** = $\overline{A \to B}$ *,* яке є істинним тоді і лише тоді, коли **А** істинне, а **В** хибне. Читається **"Невірно, що якщо А, то В"**.

8. Логічною операцією ***"*Заборона по А" (заперечення імплікації В ⟶ А)** називається складне висловлення **F = BΔA =** $\overline{B \to A}$, яке є істинним тоді і лише тоді, коли **В** істинне, а **А** хибне. Читається **"Невірно, що якщо В, то А"**.

9. Логічною операцією **"Рівнозначність" (еквівалентність)** називається складне висловлення **F=A~B (A ≡ B)**, яке є істинним тоді і лише тоді, коли обидва прості висловлення **А** і **В** істинні або хибні одночасно. Читається **"А рівнозначне В"**.

10. Логічною операцією **"Нерівнозначність" (сума за модулем два)** називається складне висловлення **F = A ⊕ B (A ≠ B)**,

яке є істинним тоді і лише тоді, коли одне висловлення є істинним, а друге - хибним. Читається **"A нерівнозначне до B"** або **"Сума за модулем 2"**.

11. Логічною операцією **"Стрілка Пірса" (функція Вебба, операція Пірса)** називається складне висловлення **F = A↓B** $= \overline{A \vee B}$, яке є істинним тоді і лише тоді, коли обидва прості висловлення **A** і **B** хибні одночасно. Читається **"Ні A, ні B"**.

12. Логічною операцією **"Операція Шефера" (Штрих Шефера)** називається складне висловлення **F = A|B =** $\overline{A \wedge B}$, яке є хибним тоді і лише тоді, коли обидва прості висловлення **A** і **B** є істинні одночасно. Читається **"Невірно, що A і B"**.

13. Логічною операцією **"Змінна A"** називається висловлення **F=A**, яке дорівнює 0 тоді і лише тоді, коли **A** дорівнює 0, і 1, коли **A** дорівнює 1. Читається **"Висловлення залежить лише від A"**.

В алгебрі логіки існують логічні **закони**, логічні **суперечності** і **твердження***,* що логічно виконуються.

<u>Означення 2</u>. Складне висловлення, яке є **істинним** при всіх можливих комбінаціях значень простих висловлень, називається **логічним законом**.

<u>Означення 3</u>. Складне висловлення, яке є ***хибним*** при всіх можливих комбінаціях значень простих висловлень, називається **логічною суперечністю**.

<u>Означення 4</u>. Складне висловлення, яке є істинним для одних значень простих висловлень і хибним для решти, називається **твердженням**, що **логічно виконується**.

Наведемо основні закони алгебри логіки (див. табл. 1).

Таблиця 1. Основні закони алгебри логіки

Назва закону	Логічний запис
1.Тотожності	A = A
2.Суперечності	$\overline{A\overline{A}} = 1$
3. Виключеного третього	A + Ā=1
4.Ідемпотентності	AA=A; A+A=A
5.Комутативний	AB=BA; A+B=B+A
6.Асоціативний	(AB)C = A(BC);

	(A+B)+C =A+(B+C)
7.Дистрибутивний	A(B+C) = AB+AC; A+BC = (A+B)(A+C)
8. Поглинання	A(B+A)=A; A+AB=A
9.Подвійності (теорема де Моргана)	$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$; $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$
10.Подвійного заперечення	$A = \overline{\overline{A}}$
11.Властивість одиниці	A·1 = A; A + 1 = 1
12.Властивість нуля	A·0 = 0; A + 0=A

Математика - це жінка, а логіка - її одяг.
М. Клайн

2.2. Поняття логічної функції

<u>Означення 1.</u> Функція **F** від **n** змінних (аргументів) $\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n}$, яка так само, як її аргументи, може набирати лише два значення - 0 і 1, називається **логічною (двійковою, булевою, переключальною)**.

<u>Означення 2.</u> Сукупність $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}$ значень **n** змінних $\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n}$ називається **набором** і позначається $\mathbf{a_1\ a_2\ ...\ a_n}$, де $\mathbf{a_i} \in \{0,1\}$, **i = 1, 2, ..., n**.

<u>Теорема 1.</u> Кількість наборів для аргументів $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2, ..., x_n}$ **логічної функції** $\mathbf{N=2^n}$.

<u>Доведення.</u> Оскільки за означенням логічної функції кожна змінна $\mathbf{x_i}$, i = 1, 2, ..., n, може набирати значення 0 і 1, то кількість наборів, що містять **j** одиниць, **n - j** нулів, дорівнює кількості сполучень **j** з **n** - C_n^j. Оскільки **j** може набути значення **0, 1, ..., n**, то кількість усіх можливих наборів дорівнюватиме N=$\sum_{j=0}^{n} C_n^j$, яке, як відомо, дорівнює 2^n. Теорему доведено■

Внаслідок того, що кількість аргументів скінченна, то і кількість можливих наборів обмежена, і відповідно ці набори і значення логічної функції можуть бути задані таблицею.

Для певності і простоти розмістимо набори у двійковому коді в спеціальній таблиці в порядку зростання від 0 до 2^n - 1. Зліва вкажемо десяткові еквіваленти двійкових наборів (див. табл. 1).

Від десяткового запису номера набору при такому кодуванні легко перейти до його двійкового запису, перетворюючи десяткове число у двійковий код.

Таблиця 1. Набори значень двійкових аргументів

№ набору	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0

1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Кожна логічна функція **F** приймає число значень, що дорівнює 0 або 1, яке відповідає числу наборів $N = 2^n$. Виходячи з цього, має місце така теорема.

Теорема 2. Кількість різних логічних функцій від n аргументів M = 2^N.

Доведення. Дійсно, оскільки на кожному наборі **i = 0, 1, ..., N - 1**, логічна функція **F** дорівнює 0 або 1, то кількість функцій, що приймають 1 на **γ** наборах і 0 на решті **N - γ** наборах, дорівнює кількості сполучень **γ** з числа можливих наборів **N** - C_N^γ

Оскільки **γ= 0, 1, ..., N** , то кількість усіх можливих функцій

$M = \sum_{\gamma=0}^{N} C_N^\gamma = 2^N$. Теорему доведено■

Розмістимо логічні функції у двійковому коді в таблиці в порядку їх зростання, задавши при цьому десяткові номери, що відповідають їх двійковим значенням. Такі таблиці називаються **таблицями істинності**.

Існує чотири різні логічні функції одного аргумента **A** (табл. 2).

Функція $\mathbf{F_0}$ тотожно дорівнює **0**. Її називають **"Константа нуль"**.

Функція $\mathbf{F_1}$ повторює значення аргумента **і** тому тотожно дорівнює змінній. Її називають **"Змінна А"**.

Таблиця 2. Таблиця істинності логічних функцій одного аргумента

Номер набору	A	F_0	F_1	F_2	F_3
0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1

Функція $\mathbf{F_2}$ набирає значення, протилежні до значень аргумента. Її називають **"Інверсія А"**, або **"Заперечення А"**. Позначається $\bar{\mathbf{A}}$.

Функція $\mathbf{F_3}$ тотожно дорівнює 1. Її називають **"Константа одиниці"**.

Згідно з теоремою 2 існує $M = 2^N = 2^{2^n} = 16$ різних логічних функцій двох аргументів **A** і **B** , кожна з яких визначена на $\mathbf{N = 2^2}$ наборах змінних (див. табл. 3).

Таблиця 3. Таблиця істинності логічних функцій двох аргументів

№ на-бору	Змінна		Функція F															
	A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
3	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Ці функції мають спеціальні назви, що відповідають логічним операціям, які вони реалізують (див. тему 2.1):

$\mathbf{F_0 = 0}$ **-** константа нуль;
$\mathbf{F_1 = A \wedge B}$ **-** логічне множення (кон'юнкція, добуток);
$\mathbf{F_2 = A \Delta B}$ **-** заборона по В;
$\mathbf{F_3 = A}$ **-** змінна А;
$\mathbf{F_4 = B \Delta A}$ - заборона по А;
$\mathbf{F_5 = B}$ **-** змінна В;
$\mathbf{F_6 = A \oplus B}$ - сума за модулем 2 (логічна нерівнозначність);
$\mathbf{F_7 = A \vee B}$ **-** логічне додавання (диз'юнкція);
$\mathbf{F_8 = A \downarrow B}$ **-** операція Пірса (стрілка Пірса);
$\mathbf{F_9 = A \sim B}$ **-** логічна рівнозначність;
$\mathbf{F_{10}} = \overline{B}$ **-** інверсія В;
$\mathbf{F_{11} = B \rightarrow A}$ **-** імплікація від В до А;
$\mathbf{F_{12} = \bar{A}}$ **-** інверсія А ;
$\mathbf{F_{13} = A \rightarrow B}$ **-** імплікація від А до В;
$\mathbf{F_{14} = A|B}$ **-** операція Шеффера (штрих Шеффера);
$\mathbf{F_{15}} = 1$ **-** константа одиниця.

Між логічними функціями і множинами є тісний зв'язок.

Логічні функції визначають операції над двома видами множин - **універсальним і пустим**. Тому всі правила і закони теорії множин мають місце і для логічних функцій з урахуванням того, що таких множин тільки дві. З цієї точки зору теорія логічних функцій є окремим випадком теорії множин. Коли ми говоримо, що функція логічного додавання **F** від двох змінних $\mathbf{F = x_1 \vee} \boldsymbol{x_2}$ при рівності цих змінних одиниці дорівнює також одиниці, то розуміємо, що здійснюється об'єднання двох ідентичних універсальних множин в одну. За законами теорії множин результатом буде ця ж сама універсальна множина. Якщо ж ми об'єднуємо дві пусті множини, то результуюча множина також буде пустою. Аналогічно можна пояснити і результати інших операцій логічних функцій.

Математика - це лише один з видів прикладної логіки.
М.Г. Чернишевський

2.3. Перетворення логічних функцій

Розглянуті вище 16 логічних функцій для двох змінних носять назву елементарних. Це функції, на основі яких будується алгебра логіки та її численні застосування в науці й техніці. Серед цих функцій виділимо *базисні.* За допомогою цих функцій можна одержати будь-які інші логічні функції. У той же час базисні функції не можуть бути одержані з більш простих. До них належать:

1. Константа нуль.
2. Константа одиниця.
3. Змінна.
4. Інверсія.
5. Диз'юнкція.
6. Кон'юнкція.

Означення 1. Логічна функція називається **інверсною** по відношенню до іншої, якщо вона може бути отримана з останньої способом інверсії всіх її значень.

Кожна з 16 функцій F_i, $i=0,1,\ldots,15$ має також інверсну функцію.

Так, наприклад, функція F_0 має інверсну функцію F_{10} а F_3 - інверсну функцію F_{12}.

Впровадимо ряд важливих формул для елементарних функцій.

Доведення правильності формули легко отримати за допомогою безпосередньої перевірки в таблицях істинності за збіжністю значень, що утворюють праву і ліву сторони співвідношень, які доводяться (див. табл. 1, 2, 3, 4).

Таблиця 1. $A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$ **- правило де Моргана**

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1

Таблиця 2. $A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$ **- правило де Моргана**

A	B	$A \vee B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Таблиця 3. $A \to B = \overline{A} \vee B$

A	B	$A \to B$	$\overline{A}$	B	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Таблиця 4. $A \sim B = (\overline{A} \vee B)(A \vee \overline{B})$

A	B	$A \sim B$	$\overline{A}$	B	$\overline{A} \vee B$	A	$\overline{B}$	$A \vee \overline{B}$	$(A \vee \overline{B}) \wedge$ $\wedge (\overline{A} \vee B)$
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1

Аналогічно доводяться і, наприклад, такі співвідношення:

1. $A = \overline{\overline{A}}$.
2. A~B=AB$\vee \overline{A}\overline{B}$.
3. AΔB=$\overline{\overline{A} \vee B} = A \wedge \overline{B}$.
4. BΔA =$\overline{\overline{B} \vee A} = B \wedge \overline{A}$.
5. $A \oplus B = \overline{A \sim B} = \overline{(\overline{A} \vee B)(A \vee \overline{B})} = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$.
6. $A \downarrow B = \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.
7. $A \mid B = \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$.
8. $B \to A = \overline{B} \vee A$.

У разі, коли одним з аргументів є константа 1 або 0, справедливі наступні співвідношення, подані в табл. 5.

Таблиця 5. Співвідношення для аргументів
х та 0 або х та 1

	Співвідношення	Співвідношення
1.	$x \vee 1 = 1$	$x \vee 0 = x$
2.	$x \wedge 1 = x$	$x \wedge 0 = 0$
3.	$x \sim 1 = x$	$x \sim 0 = \overline{x}$
4.	$x \oplus 1 = \overline{x}$	$x \oplus 0 = x$
5.	$x \to 1 = 1$	$x \to 0 = \overline{x}$
6.	$1 \to x = x$	$0 \to x = 1$
7.	$x \mid 1 = \overline{x}$	$x \mid 0 = 1$
8	$x \downarrow 1 = 0$	$x \downarrow 0 = \overline{x}$

У випадках, коли два аргументи $x_1 = x_2 = x$, а також коли $x_1 = x$ і $x_2 = \overline{x}$, маємо для цих аргументів співвідношення, подані в табл. 6.

Наведені елементарні функції дозволяють будувати нові, у тому числі й більш складні, функції від довільної скінченної кількості аргументів шляхом підстановки до функцій інших функцій замість аргументів. При цьому для запису функцій використовуються дужки.

Передбачається, що спочатку виконуються операції всередині дужок, після них - операції під знаком заперечення, потім кон'юнкція, а далі диз'юнкція і всі інші операції в порядку запису зліва направо, наприклад, імплікація та її заперечення.

Таблиця 6. Співвідношення для аргументів

$x_1=x_2=x$ та $x_1 = x$ і $x_2 = \bar{x}$

	Співвідношення	Співвідношення
1.	$x \vee x = x$	$x \vee \bar{x} = 1$
2.	$xx = x$	$x\bar{x} = 0$
3.	$x \sim x = 1$	$x \sim \bar{x} = 0$
4.	$x \oplus x = 0$	$x \oplus \bar{x} = 1$
5.	$x \to x = 1$	$x \to \bar{x} = \bar{x}$ $\bar{x} \to x = x$
6.	$x \mid x = \bar{x}$	$x \mid \bar{x} = 1$
7	$x \downarrow x = \bar{x}$	$x \downarrow \bar{x} = 0$

<u>**Означення 2**.</u> Функція $\mathbf{F = F(F_1, F_2, ..., F_n)}$, яка отримана із функцій $\mathbf{F_1, F_2, ..., F_n}$ шляхом їх підстановки замість аргументів $\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n}$ функції $\mathbf{F(x_1, x_2, ..., x_n)}$, називається суперпозицією функцій $\mathbf{F_1, F_2, ..., F_n}$.

<u>**Приклад 1.**</u> Нехай дана функція $\mathbf{F = F(x_1, x_2, x_3, x_4)} = ((x_1 \vee x_2) \wedge x_3) \to x_4)$ і функції $\mathbf{A} = (\bar{x}_1 \sim x_3)$; $\mathbf{B = x_1 \downarrow x_2}$; $\mathbf{C = x_1 \oplus x_2}$; $\mathbf{D = x_3}$.

Потрібно отримати суперпозицію функцій **A**, **B**, **C**, **D**, **F (A, B, C, D)**, а з неї функцію $\mathbf{F(x_1, x_2, x_3)}$.

<u>Розв'язування.</u> Підставимо у функцію $\mathbf{F = F(x_1, x_2, x_3, x_4)}$ замість аргументів $\mathbf{x_1, x_2, x_3, x_4}$ функції **A, B, C, D** і отримаємо їх суперпозицію $\mathbf{F(A, B, C, D) = ((A \vee B) \wedge C) \to D}$. Далі замість функцій **A, B, C, D** запишемо їх значення:

$\mathbf{F=((A \vee B) \wedge C) \to D=F(x_1, x_2, x_3)}=\{[(\bar{x}_1 \sim x_3) \vee (x_1 \downarrow x_2)] \wedge (x_1 \oplus x_2)\} \to x_3$

Використовуючи таблиці елементарних логічних функцій для $\sim$, $\vee$, $\downarrow$, $\oplus$, $\to$, отримаємо в табл. 7 усі значення функції $\mathbf{F(x_1, x_2, x_3)}$:

Таблиця 7. Задання функції $\mathbf{F(x_1, x_2, x_3)}$

Номер набору	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1 \sim x_3$	$x_1 \downarrow x_2$	[ ]
0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	0	0
3	0	1	1	1	1	0	1
4	1	0	0	0	1	0	1
5	1	0	1	0	0	0	0

6	1	1	0	0	1	0	1
7	1	1	1	0	0	0	0

Номер набору	x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2$	{ }	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1
2	0	1	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1	0	0
5	1	0	1	1	0	1	1
6	1	1	0	0	0	0	1
7	1	1	1	0	0	1	1

Таким чином, функція $\mathbf{F(x_1,x_2,x_3)} = \overline{x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3}}$, яка одержана шляхом підстановки до функції $\mathbf{F(x_г, x_2, x_3, x_4)}$ функцій $\mathbf{A(x_1, x_3)}$, $\mathbf{B(x_1, x_2)}$, $\mathbf{C(x_1, x_2)}$, $\mathbf{D(x_3)}$ замість аргументів $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_4}$, дорівнює 0 на наборі 4 і 1 на решті наборів.

Означення 3. Логічні операції над аргументами $\mathbf{x_1}$ $\mathbf{x_2,..., x_n}$ логічних функцій $\mathbf{F = F\ (x_1, x_2, ..., x_n)}$, що містять у собі операції заперечення, диз'юнкції і кон'юнкції, називаються **булевими**, а логічні рівності, що отримуються в результаті, разом з булевими операціями називаються **булевою** алгеброю (табл. 8).

Назва дана на честь англійського математика XIX століття Джорджа Буля, що заклав основи булевої алгебри.

Таблиця 8. Основні формули булевої алгебри для диз'юнкції, кон'юнкції та інверсії

	Формула для диз'ю-нкції	Формула для кон'ю-нкції	Формула для інверсії
1	$0 \vee 0=0$	$0 \wedge 0=0$	$\overline{0}=1$
2	$1 \vee 0=1$	$1 \wedge 0=0$	$\overline{1}=0$

3	$1 \vee 1=1$	$1 \wedge 1=1$	$\overline{\overline{x}}=x$
4	$0 \vee x=x$	$0 \wedge x=0$	
5	$1 \vee x=1$	$1 \wedge x=x$	
6	$x \vee x=x$	$x \wedge x=x$	
7	$x \vee \overline{x}=1$	$x \wedge \overline{x}=0$	
8	$x \vee y=y \vee x$	$x \wedge y=y \wedge x$	
9	$x \vee (y \vee z)= =(x \vee y) \vee z$	$x \wedge (y \wedge z)= =(x \wedge y) \wedge z$	

Змінні $\mathbf{x_1}$**,** $\mathbf{x_2}$**, ...,** $\mathbf{x_n}$ у булевій алгебрі вважаються довільними логічними функціями, тобто для них справджується принцип **суперпозиції**. Це означає, що будь-який вираз булевої алгебри являє собою логічну функцію і може бути позначений однією літерою, яка є аргументом у іншому виразі.

Спеціальні формули:

1. Операція поглинання $x \vee xy = x$ і $x (x \vee y) = x$.
2. Операція склеювання $xy \vee x\overline{y} = x$ і $(x \vee y)(x \vee \overline{y}) = x$.
3. Операція дії з дужками $xy \vee xz = x(y \vee z)$.
4. Формули де Моргана: $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$; $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$.
5. $x_1F(x_1\, x_2,\ldots, x_n) = x_1F(1, x_2 ,..., x_n)$.
6. $x_1 \vee F(x_1, x_2 ,..., x_n) = x_1 \vee F(0, x_2,...,x_n)$.
7. $\overline{x}_1F(x_1, x_2 ,..., x_n) = \overline{x}_1F(0, x_2 ,..., x_n)$.
8. $\overline{x}_1 \vee F(x_1, x_2 ,..., x_n) = \overline{x}_1 \vee F(1, x_2 ,..., x_n)$.
9. $\overline{F(x_1, x_2, \ldots, x_n, V, \bullet)} = F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \bullet, V)$.

Доведення спеціальних формул 1-9 провести самостійно.

Формула 9 означає, що коли функція **F** складена так, що
змінні зв'язані тільки операціями диз'юнкції і кон'юнкції,
то, замінивши всюди у виразі для **F** знак диз'юнкції на знак кон'юнкції і навпаки, а також взявши заперечення з кожної із змінних, одержимо заперечення даної функції **F**.

Формули 8 і 9 табл. 8 являють собою **комутативний** і **асоціативний** закони, а формула 3 зі спеціальних формул - **розподільний** (**дистрибутивний**) закон. Тому у виразах, які мають операції диз'юнкції і кон'юнкції, можна розкривати дужки, виносити спільний множник, переставляти місцями члени за правилами звичайної алгебри, вважати формально диз'юнкцію операцією додавання, а кон'юнкцію - операцією множення.

Формули могутні, але сліпі.
Ф. Клейн

2.4. Диз'юнктивні нормальні форми

Логічні функції можуть бути подані в різних формах. Найбільш поширеними формами є нормальні диз'юнктивні і кон'юнктивні форми подання функцій. У даній лекції розглянемо диз'юнктивні форми.

Означення 1. Логічний добуток кількох змінних, взятих із запереченням або без нього, називається **елементарним добутком**, або **кон'юнкцією**.

Приклад 1. Елементарним добутком є вирази $x_1\bar{x}_2$, $x_1\bar{x}_2x_3$, $\bar{x}z$, xyz , а вирази $\overline{xy}$, та $xy \vee x\bar{z}$ ними не є, оскільки в першому виразі член $\overline{xy}$ має спільне заперечення, а в другому є знак диз'юнкції.

Означення 2. Логічна функція, що подається диз'юнкцією елементарних добутків (кон'юнкцій), називається **диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ).**

Теорема 1. Елементарний добуток дорівнює одиниці на одному наборі, коли змінним із запереченням присвоєний нуль, а змінним без заперечення - одиниця.

Доведення. У випадку, коли в елементарному добутку змінні із запереченням $\bar{x}$ приймають значення нуля, а змінні без заперечення x - одиниці, то, оскільки $\bar{0}$ = 1 і $1 \wedge x = x$, добуток усіх змінних дорівнюватиме одиниці.

Тепер припустимо, що в заданому елементарному добутку хоча б одній змінній із запереченням $\bar{x}$ присвоєна одиниця з будь-якого набору. Тоді ця змінна з запереченням в силу $\bar{1}=0$ набере значення, що дорівнює нулю. Поява хоча б одного нуля в логічному добутку змінних із запереченням і без, згідно з властивістю $0 \wedge x = 0$, приведе до нульового значення всього добутку.

Припустимо тепер, що хоча б одна змінна без заперечення x прийняла нульове значення. Тоді, згідно з властивістю добутку $0 \wedge x = 0$, логічний добуток змінної, що прийняла нульове значення, з рештою змінних незалежно від їх значень дорівнюватиме нулю.

Таким чином, елементарний добуток дорівнює одиниці лише в єдиному випадку, коли всім змінним з запереченням присвоєно нуль, а всім змінним без заперечення - одиниця. Теорему доведено■

Приклад 2. Набір значень змінних $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, на якому елементарний добуток $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{x_1x_2x_3}$ дорівнює одиниці, буде **011**, оскільки $\boldsymbol{\varphi}=\bar{0} \wedge 1 \wedge 1 = 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$. Цей набір є єдиний. Будь-який інший набір перетворює добуток φ в нуль. Наприклад, якщо змінні $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ наберуть відповідно значення **0**, **0**, **1**, то $\boldsymbol{\varphi}=\bar{0} \wedge 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 \wedge 1 = 0$.

Теорема 2. Для кожного набору значень змінних є один і лише один їх елементарний добуток, що дорівнює одиниці.

Доведення. Зафіксуємо довільний набір значень і побудуємо елементарний добуток, який приймає на цьому наборі значення, що дорівнює одиниці. Це значить, що в цьому добутку кожному нулю набору відповідатиме одна змінна із запереченням, а одиниці - змінна без заперечення. Будь-який інший добуток тих самих змінних відрізнятиметься наявністю заперечення хоча б однієї змінної. Це означає, що або $\mathbf{x_i}$ переходить в $\bar{x}_i$, або $\bar{x}_i$ перетворюється в $\mathbf{x_i}$. У результаті елементарний добуток стане дорівнювати нулю. Теорему доведено■

Означення 3. Логічна функція **n** змінних, що приймає значення, рівне одиниці, лише на одному їх наборі, називається **конституентою одиниці**.

Теорема 3. Елементарний добуток усіх n змінних, що входять до функції F, є конституентою одиниці.

Доведення. Оскільки згідно з теоремою 1 елементарний добуток довільного числа змінних приймає одиничне значення лише на одному наборі цих змінних, то й добуток усіх **n** змінних дорівнює одиниці лише на одному наборі їх значень. Така функція, як це випливає з означення 3, є конституентою одиниці. Теорему доведено■

Теорема 4. Число конституент одиниці n змінних дорівнює 2^n .

Доведення. Доведення випливає з того, що число наборів для **n** змінних дорівнює $\mathbf{2^n}$, а кожному набору, згідно з теоремою 2, відповідає одна і лише одна конституента одиниці. Теорему доведено■

Відповідно до теореми 1 для того, щоб представити конституенту одиниці від **n** змінних, що дорівнює 1 на **m**-му наборі, слід подати число **m** у вигляді **n**-розрядного двійкового числа і в кон'юнкції (добутку) всіх змінних узяти із запереченням лише ті змінні, яким у двійковому числі відповідають нулі.

Приклад 3. Записати конституенту одиниці 17-го набору.

Розв'язання. Подамо число 17 у двійковому вигляді: $17_{(10)}=10001_{(2)}$. Запишемо кон'юнкцію п'яти змінних: $x_1x_2x_3x_4x_5$. Візьмемо із запереченням ті змінні, яким у двійковому числі відповідають нулі: $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5$. Одержаний результат є конституентою одиниці 17-го набору.

Означення 4. Диз'юнкція конституент одиниці, яка дорівнює одиниці на тих самих наборах, що й задана функція, називається досконалою диз'юнктивною нормальною формою **(ДДНФ)** логічної функції.

Теорема 5. Будь-яка логічна функція F, крім константи нуля, єдиним способом може бути поданою в ДДНФ.

Доведення. Дійсно, будь-яка логічна функція **F**, крім константи нуля, характеризується тим, що на $\mathbf{k(1\le k\le 2^n)}$ наборах вона дорівнює одиниці, а на решті - нулю. Конституента одиниці дорівнює одиниці лише на одному-єдиному наборі, а на решті - набуває нульового значення. Тому, якщо всі конституенти одиниці $\mathbf{K_i}$, **i = 1, 2, ..., k**, які дорівнюють одиниці на тих самих наборах, що й логічна функція, об'єднати знаком диз'юнкції, то відповідно до правила $1\vee x=1$ функція **F** буде дорівнювати одиниці на тих самих наборах, що й конституенти одиниці, і нулю, якщо жодна з конституент одиниці $\mathbf{K_i}$ не буде дорівнювати одиниці, що можливо лише при наявності наборів значень змінних, які не належать жодній з цих конституент. Це означає, що будь-яка функція **F** може бути представлена за допомогою диз'юнкції конституент одиниці. Таке подання єдине, оскільки в протилежному випадку мають бути присутні дві або більше різних конституент одиниці, рівних одиниці на одному і тому ж наборі змінних, що виключено за теоремою 1.

Константа нуля на всіх наборах змінних дорівнює нулю. Тому її не можна подати за допомогою конституент одиниці, тобто у **ДДНФ**. Теорему доведено■

Виходячи з доведеної теореми 5, розглянемо задачу подання логічних функцій у ДДНФ.

Для її розв'язання потрібно скласти диз'юнкцію конституент одиниці, які дорівнюють одиниці на тих самих наборах, що й задана функція, за таким алгоритмом:

1. Виписати за числом одиниць у логічній функції добутки всіх аргументів від першого до n-го і з'єднати їх знаком диз'юнкції.

2. Записати під кожним аргументом його значення у відповідному до даного добутку наборі, що дорівнює 1 або 0, і над аргументами, що дорівнюють нулю, поставити знаки заперечення.

Даний алгоритм носить назву запису логічної функції за одиницями.

<u>Приклад 4.</u> Подати у **ДДНФ** логічну функцію п'яти аргументів **F =F ($x_{1:}$, x_2, x_3, x_4, x_5)**, що дорівнює одиниці на наборах з номерами 5, 14, 16, 31 і нулю - на решті наборів.

Розв'яжемо цю задачу за наведеним вище алгоритмом:

1. Випишемо чотири добутки аргументів і з'єднаємо їх знаками диз'юнкції:

$x_{1:}, x_2, x_3, x_4, x_5 \vee x_{1:}, x_2, x_3, x_4, x_5 \vee x_{1:}, x_2, x_3, x_4, x_5 \vee x_{1:}, x_2, x_3, x_4, x_5.$

2. Під кожним добутком поставимо набори значень змінних, поданих у двійковому виді числа 5, 14, 16, 31, і розставимо заперечення над змінними, що дорівнюють нулю. Тоді

$$F = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_5 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4\bar{x}_5 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \vee x_1x_2x_3x_4x_5.$$

0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1

ДДНФ є найбільш загальною формою подання логічних функцій в диз'юнктивній нормальній формі і тому містить найбільш можливе число літер.

Число літер, що входять до **ДНФ** логічної функції, дорівнює або більше числа змінних, які містяться в цій функції, оскільки одна й та сама змінна може входити до функції кілька разів. Наприклад, ДНФ функції $F = xy \vee x\bar{y}z \vee yz$ містить три змінні x, y, z і сім літер внаслідок того, що **x** входить до функції двічі, **y** - тричі (один раз із запереченням) і **z** - двічі.

На практиці і відповідно в теорії постає проблема скорочення числа літер у ДДНФ.

<u>Означення 6.</u> Якщо деяка логічна функція **φ** (в окремому випадку елементарний добуток) дорівнює нулю на тих наборах, на яких дорівнює нулю інша функція **F**, то функція **φ** називається **імплікантою** функції **F**. При цьому функція **φ** може дорівнювати нулю на тих наборах, на яких **F** = 1, але не навпаки.

У разі, коли функція **φ** є імплікантою функції **F**, то кажуть, що функція **φ** входить до функції **F**. Умова входження записусться як $\varphi \subset F$.

Застосування терміна імпліканта пов'язане з логічною функцією $F_{13} = A \rightarrow B$, що називається імплікантою. Вираз $\varphi \rightarrow F$ дорівнює одиниці лише тоді, коли $\varphi \subset F$,тобто на наборах, де значення для **φ** і **F** відповідно мають вигляд: 0-0, 0-1, 1-1. Якщо ж $\varphi \not\subset F$, то на одному з наборів функція **φ** має прийняти одиничне значення, а функція **F** - нульове. В цьому разі вираз $\varphi \rightarrow F=0$.

<u>**Приклад 5.**</u> Нехай у таблиці 1 дані функції: $F=F(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi=\varphi(x_1,x_2,x_3)$, $Z=Z(x_1,x_2,x_3)$. Яка з функцій **φ** і **Z**, є імплікантою функції **F**?

Таблиця 1. Функції трьох змінних для прикладу 5

Номер набору	X_1	X_2	X_3	F	φ	Z
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0
3	0	1	1	1	1	0
4	1	0	0	0	0	1
5	1	0	1	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	1	1

<u>**Відповідь.**</u> Імплікантою є функція **φ**, оскільки вона дорівнює нулю на тих наборах, де рівною нулю є функція **F**. Функція **Z** не є імплікантою функції **F**, оскільки на наборі 4 функція **Z** = 1, а функція **F** = 0.

<u>**Теорема 6.**</u> **Будь-яка конституента одиниці, що входить до ДДНФ логічної функції F, є її імплікантою.**

<u>Доведення.</u> Дійсно, згідно з теоремою 1 конституента одиниці дорівнює одиниці лише на одному наборі змінних. А оскільки ДДНФ логічної функції **F** відповідно до теореми 5 складається з диз'юнкції конституент одиниці, то одне одиничне значення будь-якої конституенти одиниці, що входить до ДДНФ, збігається з одним з одиничних значень логічної функції **F**. Тому, згідно з означенням імпліканти, конституента одиниці, що входить до ДДНФ логічної функції **F** є її імплікантою. Теорему доведено■

<u>**Теорема 7.**</u> **Константа нуля є імплікантою будь-якої логічної функції.**

Доведення. Дійсно, константа нуля за означенням дорівнює нулю на всіх її можливих наборах, і тому обов'язково дорівнює нулю на всіх тих наборах, на яких функція **F** дорівнює нулю. Теорему доведено■

Очевидно також, що кожна логічна функція є імплікантою самої себе.

Теорема 8, Будь-яка логічна функція є імплікантою константи одиниці.

Доведення. Константа одиниці не дорівнює нулю на жодному наборі. Це означає, що в будь-якій логічній функції, на яких наборах не стояли б у неї одиниці, буде відповідність її одиничних значень до одиничних значень константи одиниці і ніде не буде набору, для якого логічна функція буде дорівнювати одиниці, а константа одиниці в цей час стане дорівнювати нулю. Теорему доведено■

Означення 7. Дві логічні функції $\boldsymbol{\varphi_1}$ і $\boldsymbol{\varphi_2}$ називаються **зрівнюваними**, якщо для них виконуються умови: $\boldsymbol{\varphi_1 \subset \varphi_2}$ і $\boldsymbol{\varphi_2 \subset \varphi_1}$.

Означення 8. Елементарний добуток, одержаний шляхом виключення з початкового добутку однієї або кількох змінних, називається власною частиною останнього.

Приклад 6. Нехай дано елементарний добуток $x\bar{y}z$. Тоді його власними частинами будуть добутки: $x\bar{y}, \bar{y}z, xz, x, \bar{y}, z$.

Означення 9. Елементарні добутки, які входять до даної функції в **ДДНФ**, але ніяка їх власна частина самостійно, як добуток не входить, називаються **простими імплікантами**.

Приклад 7. Припустимо, що добуток $\boldsymbol{\varphi}=x_1x_2x_3\bar{x}_4$ і $x_2\bar{x}_4$ входять до деякої логічної функції **F=F(x₁,x₂,x₃,x₄)**, а змінні x_2 і $\bar{x}_4$ самостійно не входять, як добутки. Тоді добуток $x_2\bar{x}_4$ буде простою імплікантою функції F, оскільки $x_2\bar{x}_4 \subset \boldsymbol{\varphi} \subset \mathbf{F}$, а $x_2 \not\subset \mathbf{F}$ і $\bar{x}_4 \not\subset$ F. Разом з тим добуток φ не буде простою імплікантою, оскільки $x_2\bar{x}_4 \subset \varphi$. Прикладом такої функції буде F= $x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4x_5$.

Якщо будь-який добуток входить до даної функції, то при включенні до нього будь-яких змінних новий добуток також буде входити до цієї функції, оскільки він дає нуль чи одиницю разом з початковим добутком.

Означення 10. Диз'юнкція простих імплікант називається **скороченою ДНФ**.

Теорема 9. Будь-яку логічну функцію F можна подати у вигляді скороченої ДНФ.

Доведення. Оскільки прості імпліканти входять самостійно до функції **F**, то вони повинні дорівнювати нулю на тих самих наборах, що і функція **F**. Якщо це не так і проста імпліканта дорівнює одиниці там, де функція **F** має дорівнювати нулю, то на підставі рівності $1 \vee$ x=1 функція **F** дорівнюватиме 1, що недопустимо.

Для кожного набору, де функція **F** дорівнює 1, має знайтись хоча б одна проста імпліканта, що дорівнює 1, інакше функція **F** у цьому випадку не буде дорівнювати 1. В гіршому разі такою імплікантою виступає конституента одиниці.

Серед імплікант у функції **F** можуть знайтись прості імпліканти **u**, які є власною частиною імплікант **y**. У цьому випадку **y=uv**. На підставі рівностей **uv+u=u(v+1)=u** і відповідно **y+u=u** відбудеться поглинання імпліканти **y** її власною частиною **u**, яка є простою імплікантою.

Це означає, що функція **F** буде після всіх можливих поглинань урешті-решт складатися з одних простих імплікант. Теорему доведено■

З метою подання логічної функції **F** у вигляді скороченої **ДНФ** розглянемо операції повного і неповного склеювання, а також поглинання і розгортання в **ДНФ**.

Операція повного склеювання визначається співвідношенням $xy \vee x\bar{y} = x$. Це випливає з того, що $xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x \wedge 1 = x$.

Склеювання добутків xy і $x\bar{y}$ відбувається в даному разі по змінній **y**.

Операція неповного склеювання має вигляд $xy \vee x\bar{y} = x \vee xy \vee x\bar{y}$

Це можливо тому, що логічне додавання змінної **x** з виразом $xy \vee x\bar{y}$ ніяк не впливає на останній. Він залишається незмінним, скільки б разів змінна **x** до нього не додавалась.

Операція поглинання визначається з рівностей $x \vee xy = x$

і $x \vee x\bar{y} = x$.

У цьому разі **x** поглинає весь вираз. Це випливає з того, що $x \vee xy = x(1 \vee y) = x$.

Відповідно $x \vee x\bar{y} = x(1 \vee \bar{y}) = x$.

Оскільки далеко не завжди вихідна логічна функція подається у **ДДНФ**, то розглянемо операцію її розгортання. Вона перетворює будь-яку просту імпліканту в диз'юнкцію конституент одиниці.

Нехай, наприклад, $x\bar{y}$ є проста імпліканта логічної функції чотирьох аргументів: x, y, z, u. Тоді, застосовуючи двічі операцію розгортання, одержимо

$$x\bar{y} = x\bar{y}(z \vee \bar{z}) = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} = x\bar{y}z(u \vee \bar{u}) \vee x\bar{y}\bar{z}(u \vee \bar{u}) = x\bar{y}zu \vee x\bar{y}z\bar{u} \vee x\bar{y}\bar{z}u \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{u}.$$

При розгортанні різні імпліканти можуть утворювати одну й ту саму конституенту одиниці. У цьому разі на основі тотожності x $\vee$ x = x треба залишити одну конституенту одиниці. Внаслідок цього одержимо ДДНФ вихідної логічної функції.

Від часів греків говорити "математика" -значить говорити "доведення".

Н. Бурбакі

2.5. Мінімізація логічних функцій в ДДНФ

Метод мінімізації логічних функцій, що розглядається в даній лекції, базується на теоремі Квайна.

<u>Теорема Квайна для ДДНФ.</u> Якщо в ДДНФ логічної функції F здійснити всі операції неповного склеювання, а потім усі операції поглинання, то буде одержана скорочена ДНФ цієї функції, тобто диз'юнкція всіх її простих імплікант.

<u>Доведення.</u> Нехай, наприклад, після здійснення всіх операцій неповного склеювання, а потім поглинання, ДНФ буде містити член **q**, який не є простою імплікантою. Тоді до цієї функції, крім члена **q**, самостійно входить якась його частина **p**, яка є простою імплікантою. Це означає, що функція **F** буде містити імпліканту **q** і просту імпліканту **p** у вигляді їх диз'юнкції $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$. Але $\mathbf{q}=\mathbf{q_1 p}$. Тоді член **q** згідно з рівністю $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}=\mathbf{p} \vee \mathbf{q_1 p}=\mathbf{p}$ поглинатиметься простою імплікантою **p**, і відповідно скорочена **ДНФ** буде містити тільки цю імпліканту. Відповідно **ДНФ** складатиметься лише з простих імплікант, об'єднаних операціями диз'юнкції. Теорему доведено■

Особливістю метода мінімізації за Квайном є те, що його робота починається після подання в ДДНФ логічної функції, яка мінімізується. Тому якщо функція задана в довільній ДНФ, то її спочатку слід перетворити у ДДНФ шляхом її розгортання. Потім необхідно виконати такі кроки:

1. У **ДДНФ** $\mathbf{F=F(x_1, x_2,..., x_n)}$ здійснюються всі операції неповного склеювання конституент одиниці.

Неповне склеювання викликано тим, що кожна конституента одиниці водночас може склеюватися з кількома іншими. Тоді її після першого склеювання не поглинають, а використовують для інших, у порядку черги, операцій склеювання. Це і є операція неповного склеювання.

У результаті одержують імпліканти, що мають по **n-1** змінних. При цьому можливе також отримання і простих імплікант.

2. Відбувається поглинання імплікантами всіх конституент одиниці, які беруть участь у неповному склеюванні.

Конституенти одиниці, що беруть участь в операціях неповного склеювання, обов'язково поглинаються, оскільки вони містять у своєму складі імпліканти, які мають після першого склеювання по **n-1** літер і містяться у функції **F**.

Конституенти одиниці, які не були задіяні в операціях склеювання, не можуть поглинатися, оскільки вони являють собою прості імпліканти з **n** змінними.

3. Здійснюються операції неповного склеювання і поглинання імплікант з **n -1** змінною, одержаних на першому кроці склеювання, за аналогією з пунктами 1 та 2.

Ця процедура повторюється доти, поки операції неповного склеювання залишаються можливими. Отримана в результаті **ДНФ** буде скороченою **ДНФ**.

<u>Приклад 1</u>. Знайти скорочену ДНФ логічної функції
$\mathbf{F=F(x, y, z)} = xy \vee \bar{x}z \vee \bar{y}\bar{z}$.
<u>Розв'язування</u>

1. Застосовуючи операцію розгортання, одержимо **ДДНФ** функції **F = F(x, y, z):**

F = F(x, y, z) =

$xy(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}z(y \vee \bar{y}) \vee \bar{y}\bar{z}(x \vee \bar{x}) = xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

2. Здійснимо в **ДДНФ** функції **F= F(x, y, z)** всі можливі операції склеювання конституент одиниці. Для цього пронумеруємо всі конституенти одиниці функції:

F=F(x,y,z)= $\overset{1}{xyz} \vee \overset{2}{xy\bar{z}} \vee \overset{3}{\bar{x}yz} \vee \overset{4}{\bar{x}\bar{y}z} \vee \overset{5}{x\bar{y}\bar{z}} \vee \overset{6}{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}$

і виконаємо всі операції неповного склеювання членів функції, починаючи з першого, з рештою.

3. Результати склеювання запишемо до таблиці 1, у якій перший стовпчик подає номери конституент, другий показує результат склеювання, третій - змінні, за якими відбулося склеювання.

Таблиця 1. Склеювання конституент одиниці в прикладі 1

Номер склеюваних конституент	Імпліканта	Склеювана змінна
1. 1-2	xy	z
2. 1-3	yz	x
3. 2-5	x$\bar{z}$	y
4. 3-4	$\bar{x}$z	y
5. 4-6	$\bar{x}\bar{y}$	z
6. 5-6	$\bar{y}\bar{z}$	x

Очевидно, що подальше склеювання неможливе, і наведені в табл. 1 імпліканти будуть простими.

Після поглинання цими імплікантами відповідних їм конституент одиниці одержимо скорочену **ДНФ**:

F = F(x,y,z)= $xy \vee yz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z}$.

Даний вираз містить шість простих імплікант, які представляють усі можливі прості імпліканти. Серед них знаходяться і добутки, що входять до початкової функції **F**: $xy, \bar{x}z, \bar{y}\bar{z}$. Тому імпліканти $yz, x\bar{z}, \bar{x}\bar{y}$ можна вважати зайвими. Даний розв'язок лише підтвердив, що добутки вихідної функції **F** є простими імплікантами.

Таким чином, ми бачимо, що скорочена ДНФ - це далеко не завжди мінімальна ДНФ, оскільки вона хоч і містить прості імпліканти, проте серед них можуть бути і надлишкові.

<u>**Означення 1**</u>. Диз'юнкція простих імплікант, жодна з яких не є зайвою, називається **тупиковою ДНФ** логічної функції.

Тупикових функцій у загальному випадку може бути декілька. Кожна з цих функцій може містити кількість літер, відмінну від їх кількості для решти функцій.

Тоді виникає завдання пошуку такої тупикової логічної функції, яка б мала мінімальну кількість літер. Така функція називається мінімальною ДНФ.

Деякі логічні функції можуть мати кілька мінімальних ДНФ, що містять однакову кількість літер. У цьому випадку вибирається мінімальна ДНФ, яка більш придатна порівняно з рештою для технічної реалізації в цифровому пристрої або керуючій програмі.

З метою визначення мінімальної ДНФ використовуються імплікантні матриці.

У табл. 2 наведена імплікантна матриця для розглянутої вище в прикладі логічної функції. У табл. 2 по вертикальних входах записуються конституенти одиниці, які входять в задану функцію, а по горизонтальних - прості імпліканти цієї функції, одержані зі скороченої ДНФ. Якщо імпліканта є власною частиною деякої конституенти одиниці, то клітинка імплікантної матриці, що відповідає цій імпліканті і конституенти одиниці, відмічається хрестиком. Щоб одержати мінімальну ДНФ заданої функції, достатньо знайти мінімальну кількість імплікант, які разом накриють хрестиками всі стовпці імплікантної матриці.

У табл. 2 кожний стовпець відмічений двома хрестиками. Тому зі скороченої ДНФ функції, що розглядається, можна виключити будь-яку імпліканту. Мінімальна кількість імплікант, що накривають хрестиками всі стовпці, дорівнює 3: **xy** накриває перший і другий, $\bar{x}z$ - третій і четвертий, $\bar{y}\bar{z}$ - п'ятий і шостий стовпці таблиці. Можна накрити й інакше: yz накриває перший і третій, x$\bar{z}$ - другий і п'ятий, $\bar{x}\bar{y}$ - четвертий і шостий стовпці.

Отже, дана логічна функція має дві тупикові ДНФ з однаковим мінімальним числом (6) літер:

1. F=xy$\vee \bar{x}z \vee \bar{y}\bar{z}$.
2. F = yz$\vee x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}$.

Крім мінімальних форм, функція, що розглядається, як це випливає з табл. 2, має ряд тупикових ДНФ, в яких число букв буде більше, ніж у мінімальних. Наприклад, тупиковою буде така ДНФ:

3. F=xy$\vee yz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}$.

Таблиця 2. Імплікантна матриця для прикладу 1

Проста	Конституента

імпліканта	1	2	3	4	5	6
	xyz	xy$\bar{z}$	$\bar{x}$yz	$\bar{x}\bar{y}$z	x$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
1 xy	X	X				
2 yz	X		X			
3 x$\bar{z}$		X			X	
4 $\bar{x}z$			X	X		
5 $\bar{x}\bar{y}$				X		X
6 $\bar{y}\bar{z}$					X	X

Виходячи з наведеного прикладу, дамо решту кроків, необхідних для мінімізації логічних функцій.

4. За отриманою скороченою ДНФ будується імплікантна матриця.

5. В імплікантній матриці знаходяться набори простих імплікант, які накривають всі конституенти одиниці логічної функції, яка представлена у ДНФ і мінімізується.

6. Серед цих наборів знаходять один або кілька таких, які в сумі містять мінімальну кількість букв.

7. Об'єднують прості імпліканти цих наборів знаками диз'юнкції і одержують одну або декілька мінімальних ДНФ.

<u>Приклад 2.</u> Знайти мінімальну ДНФ логічної функції F = F(x_1, x_2, x_3, x_4) , яка дорівнює одиниці на наборах з номерами 1, 3, 5, 7, 14, 15 і дорівнює нулю на решті наборів. Подамо функцію F в ДДНФ:

F = F(x_1, x_2, x_3, x_4)=

1 2 3 4 5

6

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3x_4.$$

Здійснимо операції неповного склеювання в такому порядку:

1. Виконаємо всі можливі неповні склеювання першого члена, потім другого, третього і т.д.

2. Проведемо всі можливі операції поглинання конституент одиниці і результат подамо у табл. 3.

Таблиця 3. Перше склеювання конституент 1 в прикладі 2

Номер склеюваної конституенти "1"		Імпліканта	Склеювана змінна
1.	1-2	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$	x_3
2.	1-3	$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$	x_2
3.	2-4	$\bar{x}_1x_3x_4$	x_2
4.	3-4	$\bar{x}_1x_2x_4$	x_3
5.	4-6	$x_2x_3x_4$	x_1
6.	5-6	$x_1x_2x_3$	x_4

З табл. 3 видно, що всі конституенти одиниці поглинаються імплікантами, отриманими після склеювання. В результаті буде одержана така функція:

$$F(x)=F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underset{1}{\bar{x}_1\bar{x}_2x_4} \vee \underset{2}{\bar{x}_1\bar{x}_3x_4} \vee \underset{3}{\bar{x}_1x_3x_4} \vee \underset{4}{\bar{x}_1x_2x_4} \vee \underset{5}{x_2x_3x_4} \vee \underset{6}{x_1x_2x_3}$$

3. Для отриманої функції F у табл. 4 знову проведемо всі можливі операції неповного склеювання і поглинання.

Таблиця 4. Друге склеювання конституент 1 у прикладі 2

Номер склеюваної конституенти "1"	Імпліканта	Склеювана змінна
1. 1-4	$\bar{x}_1x_4$	x_2
2. 2-3	$\bar{x}_1x_4$	x_3

Таким чином, одержимо, що

$F=F(x_1, x_2, x_3, x_4)=\bar{x}_1x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3$.

До цього виразу операції неповного склеювання і поглинання застосувати не можна, і тому він є скороченою ДНФ заданої логічної функції.

Таблиця 5. Імплікантна матриця

Проста імпліканта	Конституента одиниці					
	1	2	3	4	5	6
	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3\bar{x}_4$	$x_1x_2x_3x_4$
1. $\bar{x}_1x_4$	X	X	X	X		
2. $x_2x_3x_4$				X		X
3. $x_1x_2x_3$					X	X

Побудуємо імплікантну матрицю для одержаної функції F (див. табл. 5).

З табл. 5 випливає, що до мінімальної форми обов'язково має увійти імпліканта $\bar{x}_1x_4$ оскільки лише вона накриває хрестиками перший, другий і третій стовпці імплікантної матриці. Крім того, обов'язково має бути вибрана імпліканта $x_1x_2x_3$ оскільки вона накриває п'ятий і шостий стовпці. При виборі цих двох імплікант усі стовпці табл. 5 залишаються перекритими, і тому імпліканта $x_2x_3x_4$ є зайвою. У даному випадку логічна функція має єдину ДНФ, що містить п'ять літер:

$F = F(x_1,x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1x_4 \vee x_1x_2x_3$.

Можна бути першорядним математиком і не вміти рахувати. Можна рахувати досконало і не мати ані найменшого уявлення про математику.
Новаліс

2.6. Кон'юнктивні нормальні форми

Означення 1. Логічна сума кількох різних змінних, узятих із запереченням або без нього, називається елементарною **сумою**, або **диз'юнкцією**.

Означення 2. Логічна функція, що подається кон'юнкцією елементарних сум (диз'юнкцій), називається **кон'юнктивною нормальною формою (КНФ).**

Приклад 1. Елементарними сумами будуть вирази: $x_1 \vee \bar{x}_2, x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3, x \vee y \vee z$, а вирази $\overline{x \vee y}$ і $(x \vee y)(x \vee \bar{z})$ ними не є, оскільки в першому виразі член $\overline{x \vee y}$ має загальне заперечення, а в другому є знак кон'юнкції.

Теорема 1. Елементарна сума дорівнює нулю в єдиному випадку, коли змінним із запереченням присвоєна одиниця, а змінним без заперечення - нуль.

Доведення теорем тут і далі не даються, оскільки вони аналогічні доведенням відповідних теорем у пункті **1.4**.

Приклад 2. Набір значень змінних x_1, x_2, x_3, на якому елементарна сума $\varphi=\bar{x}_1 + x_2 + x_3$ дорівнює нулю, буде 100, оскільки $\varphi=\bar{1} \vee 0 \vee 0 = 0 \vee 0 \vee 0 = 0$.

Теорема 2. Для кожного набору значень змінних існує одна і лише одна їх елементарна сума, що дорівнює нулю.

Означення 3. Логічна функція **n** змінних, що приймає значення, яке дорівнює нулю лише на одному їх наборі, називається **конституентою нуля.**

Теорема 3. Елементарна сума всіх n змінних, що входять до функції F, є конституентою нуля.

Теорема 4. Число конституент нуля n змінних дорівнює 2^n.

Згідно з теоремою 1, щоб подати конституенту нуля від **n** змінних, що дорівнює 0 на m-му наборі, потрібно подати число **m** у вигляді **n**-розрядного двійкового числа і в диз'юнкції всіх змінних узяти із запереченням тільки ті змінні, яким у двійковому числі відповідають одиниці.

Приклад 3. Записати конституенту нуля 17-го набору.

Розв'язування. Подамо десяткове число 17 у двійковому вигляді: $17_{(10)}=10001_{(2)}$. Запишемо диз'юнкцію 5 змінних: $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5$. Візьмемо із запереченням ті змінні, яким у двійковому коді відповідають одиниці: $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5$. Одержаний результат є конституентою нуля 17-го набору.

Означення 4. Кон'юнкція конституент нуля, що дорівнює нулю на тих самих наборах, що й задана функція, називається **досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) логічної функції.**

Теорема 5. Будь-яка логічна функція, окрім константи одиниці, єдиним чином може бути представлена в ДКНФ.

Виходячи з теореми 5, розглянемо алгоритм подання логічних функцій у ДКНФ.

З цією метою треба скласти добуток тих конституент нуля, які дорівнюють нулю на тих самих наборах, що й задана функція, за таким алгоритмом:

а) виписати за числом нулів у логічній функції диз'юнкції (суми) всіх аргументів від першого до **n**-го й з'єднати їх знаками кон'юнкції;

б) записати під кожним аргументом його значення у відповідному до даної суми наборі, яке дорівнює 1 або 0, і над аргументами, що дорівнюють одиниці, поставити знаки заперечення.

Даний алгоритм має назву запису логічної функції за нулями.

<u>Приклад 4.</u> Подати у ДКНФ логічну функцію п'яти аргументів $F=F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, що дорівнює нулю на наборах з номерами 5, 14, 16, 31 і одиниці - на решті наборів.

Розв'яжемо цю задачу за наведеним вище алгоритмом:

1. Випишемо чотири суми аргументів і з'єднаємо їх знаками кон'юнкції:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\wedge(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\wedge(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\wedge(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$$

2. Під кожною сумою поставимо подані у двійковому вигляді числа 5, 14, 16, 31 і розставимо заперечення над змінними, які відповідають одиниці. Тоді

$$F=(x_1+x_2+\bar{x}_3+x_4+\bar{x}_5)\wedge(x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4+x_5)\wedge$$

0 0 1 0 1 0 1 1 1 0

$$\wedge(\bar{x}_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\wedge(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4+\bar{x}_5)$$

1 0 0 0 0 1 1 1 1 1

ДКНФ є найбільш загальною формою подання логічної функції в кон'юнктивній формі і тому містить найбільше можливе число літер. Розглянемо питання зменшення їх кількості.

<u>Означення 5.</u> Якщо деяка логічна функція **φ** (в окремому випадку - елементарна сума) дорівнює **одиниці** на всіх тих наборах, на яких дорівнює **одиниці** інша функція **F**, то функція **φ** називається **імпліцентою** функції **F**. Кажуть, що функція **φ** входить до функції **F**. При цьому функція **φ** може дорівнювати одиниці, взагалі кажучи, і на тих наборах, на яких **F=0**, але не навпаки - не може дорівнювати нулю на наборах, де функція **F** дорівнює одиниці.

<u>Приклад 5.</u> Нехай у табл. 1 дані функції:

$F=F(x_1, x_2, x_3)$, $\varphi=\varphi(x_1, x_2, x_3)$, $Z=Z(x_1, x_2, x_3)$.

Яка з функцій φ і z є імпліцентою функції F.

<u>Відповідь.</u> Ані функція φ, ані функція z не є імпліцентами функції F, оскільки перша дорівнює нулю на наборах 2 і 6, а друга - на наборах 0, 2, 3 і 6. На цих наборах функція F дорівнює одиниці, що суперечить означенню імпліценти.

Таблиця 1. Функції трьох змінних для прикладу 5

№	x_1	x_2	x_3	F	φ	Z
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0
3	0	1	1	1	1	0
4	1	0	0	0	0	1
5	1	0	1	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	1	1

Теорема 6. Будь-яка конституента нуля, що входить до ДКНФ логічної функції F, є її імпліцентою.

Теорема 7. Константа одиниці є імпліцентою будь-якої логічної функції.

Теорема 8. Будь-яка логічна функція є імпліцентою константи нуля.

Означення 6. Елементарна сума, одержана виключенням з вихідної суми однієї або кількох змінних, називається власною частиною останньої.

Приклад 6. Нехай дана елементарна сума $x+\bar{y}+z$. Тоді її власними частинами будуть суми:

$x+\bar{y};\ \bar{y}+z;\ x+z;\ x;\ \bar{y};\ z$.

Означення 7. Елементарні суми, які самі входять до даної функції, але жодна їх власна частина, як елементарна сума, не входить, називаються простими імпліцентами.

Приклад 7. Припустимо, що сума $\varphi = x_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_4$ і її частина $x_2+\bar{x}_4$ входять як самостійні члени у функцію $F = F(x_1, x_2, x_3, x_4)$, а змінні x_2 і $\bar{x}_4$ не входять. Тоді сума $x_2+\bar{x}_4$ буде простою імпліцентою функції F, оскільки $(x_2+\bar{x}_4)\subset\varphi\subset F$, а $x_2\not\subset F$ і $\bar{x}_4\not\subset F$. В той же час сума φ не буде простою імпліцентою, оскільки $(x_2+\bar{x}_4)\subset F$.

Якщо будь-які елементарні суми входять до даної функції, то при додаванні до них будь-яких змінних нова сума також буде входити до цієї функції, оскільки вона перетворюється в одиницю разом з початковою сумою.

Означення 8. Кон'юнкція простих імпліцент називається **скороченою КНФ**.

Теорема 9. Будь-яку логічну функцію F можна подати у вигляді скороченої КНФ.

З метою подання логічної функції F у вигляді скороченої КНФ розглянемо операції повного і неповного склеювання, а також поглинання і розгортання в КНФ.

Операція повного склеювання визначається співвідношенням $(x+y)(x+\overline{y})=x$. Це випливає з того, що

$$(x+y)(x+\overline{y})=x+x\overline{y}+xy+y\overline{y}=x+x(\overline{y}+y)=x.$$

Склеювання сум x + y і x + $\overline{y}$ відбувається в даному випадку за змінною y.

Операція неповного склеювання має вигляд

$$(x+y)(x+\overline{y})=x(x+y)(x+\overline{y}).$$

Операція поглинання визначається з рівностей

x(x + y) = x і x(x + $\overline{y}$) = x. У цьому випадку x поглинає весь вираз. Це випливає з того, що x(x + y) = x + xy = x(1 + y) = x .

Відповідно

x(x + $\overline{y}$) = x + x$\overline{y}$ = x(1 + $\overline{y}$) = x.

Операція розгортання перетворює будь-яку просту імпліценту в диз'юнкцію конституент нуля.

Нехай, наприклад, x + $\overline{y}$ - проста імпліцента логічної функції чотирьох аргументів: x, y, z, u. Тоді, застосовуючи двічі операцію розгортання, дістанемо:

x + $\overline{y}$ = (x + $\overline{y}$) + z$\overline{z}$ = (x + $\overline{y}$ + z)(x + $\overline{y}$ + $\overline{z}$) =

= ((x + $\overline{y}$ + z) + u$\overline{u}$)((x + $\overline{y}$ + $\overline{z}$) + u$\overline{u}$) =

=(x + $\overline{y}$ + z + u)(x + $\overline{y}$ + z + $\overline{u}$)(x + $\overline{y}$ + $\overline{z}$ + u)(x + $\overline{y}$ + $\overline{z}$ + $\overline{u}$) .

При розгортанні різні імпліценти можуть утворювати одну й ту саму конституенту нуля. У цьому разі на основі тотожності xx = x треба залишити одну конституенту нуля. У результаті отримаємо ДКНФ початкової логічної функції.

Через логіку доводять,
через інтуїцію винаходять.
А. Пуанкаре

2.7. Мінімізація логічних функцій в ДКНФ

<u>Теорема Квайна для КНФ.</u> Якщо в ДКНФ логічної функції F провести всі операції неповного склеювання, а потім всі операції поглинання, то вийде скорочена КНФ цієї функції, тобто кон'юнкція всіх її простих імпліцент.

За теоремою Квайна для мінімізації логічної функції **F**, поданої в **КНФ**, її спочатку треба перетворити в **ДКНФ**, а потім

виконати такі кроки:

1. **В ДКНФ $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$** здійснити всі операції неповного склеювання, а потім поглинання конституент нуля.

2. Здійснити всі операції неповного склеювання і поглинання імпліцент з **(n - 1)-**ю змінними, отриманих на першому кроці склеювання, потім - імпліцент з **(n- 2)-**а змінними і т.д., доки процедура можлива.

3. По одержаній скороченій **КНФ** побудувати імпліцентну матрицю.

4. В імпліцентній матриці відшукати набори простих імпліцент, які накривають усі конституенти нуля логічної функції, яка подана в **ДКНФ** і мінімізується.

5. Серед цих наборів знайти такі, які в сумі містять мінімальне число літер.

6. Одержати мінімальні **КНФ**, об'єднавши прості імпліценти знаками кон'юнкції. Серед них вибрати одну найбільш ефективну для реалізації.

<u>Приклад.</u> Знайти мінімальну **КНФ** логічної функції, що дорівнює нулю на наборах з номерами 0, 1, 2, 3, 7, 9, 12, 13, 15 і одиниці - на решті.

1.Знайдемо ДКНФ:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4)=(x_1 \vee x_2 \overset{1}{\vee} x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \overset{2}{\vee} x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \overset{3}{\vee} \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge$$

$$\wedge (x_1 \vee x_2 \overset{4}{\vee} \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \overset{5}{\vee} \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \overset{6}{\vee} x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \overset{7}{\vee} x_3 \vee x_4) \wedge$$

$$\wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \overset{8}{\vee} x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \overset{9}{\vee} \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4).$$

2.Виконаємо всі можливі операції неповного склеювання і поглинання:

$1-2 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$	x_4	$4-5 = x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$	x_2
$1-3 = x_1 \vee x_2 \vee x_4$	x_3	$5-9 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$	x_1
$2-4 = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4$	x_3	$6-8 = \bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$	x_2
$2-6 = x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$	x_1	$7-8 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$	x_4
$3-4 = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$	x_4	$8-9 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4$	x_3

У результаті дістанемо:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \overset{1}{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overset{2}{x_2} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overset{3}{x_2} \vee \bar{x}_4) \wedge (x_2 \vee \overset{4}{x_3} \vee \bar{x}_4) \wedge$$

$$\wedge (x_1 \vee \overset{5}{x_2} \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \overset{6}{\bar{x}_3} \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \overset{7}{\bar{x}_3} \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \overset{8}{x_3} \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \overset{9}{\bar{x}_2} \vee x_3) \wedge$$

$$\wedge (\bar{x}_1 \vee \overset{10}{\bar{x}_2} \vee \bar{x}_4).$$

В одержаному виразі знову виконаємо всі операції неповного склеювання і поглинання

$1\text{-}5 = x_1 \vee x_2$ $\qquad$ x_3

$2\text{-}3 = x_1 \vee x_2$ $\qquad$ x_4.

У кінцевому підсумку дістанемо:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \overset{1}{\vee} x_2) \wedge (x_2 \vee \overset{2}{x_3} \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \overset{3}{\bar{x}_3} \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \overset{4}{\bar{x}_3} \vee \bar{x}_4) \wedge$$

$$\wedge (\bar{x}_1 \vee \overset{5}{x_3} \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \overset{6}{\bar{x}_2} \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \overset{7}{\bar{x}_2} \vee \bar{x}_4).$$

До останнього виразу операції неповного склеювання і поглинання застосувати не можна, і тому він є скороченою КНФ.

3. Побудуємо імпліцентну матрицю (див. табл. 1).

Таблиця 1. Імпліцентна матриця

Проста імпліцента	Конституента нуля		
	1 $x_1+x_2+x_3+x_4$	2 $x_1+x_2+x_3+\bar{x}_4$	3 $x_1+x_2+\bar{x}_3+x_4$
1. x_1+x_2	X	X	X
2. $x_2+x_3+\bar{x}_4$		X	
3. $x_1+\bar{x}_3+\bar{x}_4$			
4. $\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4$			
5. $\bar{x}_1+x_3+\bar{x}_4$			
6. $\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3$			
7. $\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_4$			

Продовження таблиці 1

Проста імпліцента	Конституента нуля		
	4 $x_1+x_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4$	5 $x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4$	6 $\bar{x}_1+x_2+x_3+\bar{x}_4$
1. x_1+x_2	X		
2. $x_2+x_3+\bar{x}_4$			X
3. $x_1+\bar{x}_3+\bar{x}_4$	X	X	
4. $\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4$		X	
5. $\bar{x}_1+x_3+\bar{x}_4$			X
6. $\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3$			
7. $\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_4$			

Продовження таблиці 1

Проста імпліцента	Конституента нуля		
	7 $\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3+x_4$	8 $\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3+\bar{x}_4$	9 $\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4$
1. x_1+x_2			
2. $x_2+x_3+\bar{x}_4$			
3. $x_1+\bar{x}_3+\bar{x}_4$			
4. $\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4$			X

5. $\bar{x}_1 + x_3 + \bar{x}_4$		X	
6. $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$	X	X	
7. $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4$		X	X

До мінімальної форми слід включити імпліценти $x_1 \overset{1}{\vee} x_2$ і $\bar{x}_1 \vee \overset{6}{\bar{x}_2} \vee x_3$.

Внаслідок вибору цих імпліцент опиняються перекритими стовпці з номерами 1, 2, 3, 4, 7, 8. Стовпці 5, 6, і 9 можна перекрити двома способами:

імпліцентами $(\bar{x}_2 \vee \overset{4}{\bar{x}_3} \vee \bar{x}_4)$ і $(x_2 \vee \overset{2}{x_3} \vee \bar{x}_4)$ або $(\bar{x}_2 \vee \overset{4}{\bar{x}_3} \vee \bar{x}_4)$ і $(\bar{x}_1 \vee \overset{5}{x_3} \vee \bar{x}_4)$.

Таким чином, задана функція має дві мінімальні форми з однаковим числом літер:

1. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$.
2. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$.

Слід зазначити, що кількості літер в мінімальних КНФ і ДНФ логічної функції різні. Тому при розв'язуванні задач мінімізації логічних функцій потрібно знайти як диз'юнктивні, так і кон'юнктивні мінімальні нормальні форми і вибрати серед них форму з найменшою кількістю літер.

Кращий спосіб вивчити будь-що -
це відкрити самому.
Д. Пойа

2.8. Одержання мінімальних КНФ за допомогою диз'юнктивних форм

Логічні функції, подані у ДНФ, після мінімізації можна перетворити в КНФ, використовуючи доведені нижче властивості логічних функцій.

Припустимо, що дана логічна функція $\mathbf{F = F(x_1, x_2, ..., x_n)}$, яка приймає на наборах $\mathbf{j_1, j_2, \ldots, j_m}$ значення одиниці, а на наборах $\mathbf{i_1, i_2, \ldots, i_p}$, де $\mathbf{p=2^n-m}$ - значення нуля. Тоді має місце така теорема.

Теорема 1. Диз'юнкція всіх конституент одиниці $\mathbf{K_{i1} \vee K_{i2} \vee \ldots \vee K_{ip}}$, що не входять до ДДНФ логічної функції F, є запереченням цієї функції:

$\mathbf{K_{i1} \vee K_{i2} \vee \ldots \vee K_{ip}} = \bar{F}$

Доведення. Сума всіх конституент 1 для **n** змінних створює функцію константу 1:

$\mathbf{K_0 \vee K_1 \vee \ldots \vee K_{2^n-1} = 1}$,

тобто функцію, яка дорівнює 1 на всіх наборах значень змінних.

Серед цих конституент виділимо конституенти $\mathbf{K_{j1}, K_{j2}, \ldots, K_{jm}}$, що утворюють функцію $\mathbf{F = K_{j1} \vee K_{j2} \vee \ldots \vee K_{im}}$. Тоді має місце співвідношення

$\mathbf{F \vee K_{i1} \vee K_{i2} \vee \ldots \vee K_{ip} = 1}$

З тотожності $x \vee \bar{x} = 1$ випливає, що і $F \vee \bar{F} = 1$ і відповідно $\bar{F} = \mathbf{K_{i1} \vee K_{i2} \vee \ldots \vee K_{ip}}$. Теорему доведено■

<u>Теорема 2.</u> КНФ логічної функції *Р*, одержана з мінімальної ДНФ функції *Р* після її перетворення за допомогою формул де Моргана, також буде мінімальною.

<u>Доведення.</u> Правило де Моргана не змінює кількість літер у логічному виразі, що виходить після перетворення, порівняно з початковим, який перетворюється. Тому якщо мінімальна ДНФ функції $\overline{F}$ містить **k** літер, то й одержана після перетворення за правилом де Моргана **КНФ** логічної функції **F** буде містити те ж саме число літер **k**. Це число є мінімальним. Якщо це не так і існує інша **КНФ** логічної функції **F** з меншим числом літер, то, перетворивши її з **КНФ** у **ДНФ** за правилами де Моргана, одержимо **ДНФ** функції $\overline{F}$ з меншим числом літер, ніж це було визначено раніше у вихідній мінімальній. Внаслідок цього приходимо до суперечності. Теорему доведено■

Виходячи з доведених теорем 1 і 2, запишемо алгоритм одержання мінімальної **КНФ** логічної функції **F** на основі мінімізації функції $\overline{F}$ у **ДНФ**.

1. Записують диз'юнкцію всіх конституент одиниці, які не входять до **ДДНФ** функції F, тобто знаходять $\overline{F}$.

2. Знаходять мінімальну **ДНФ** за відомим алгоритмом для функції $\overline{F}$.

3. Беруть заперечення від функції $\overline{F}$ і перетворюють її за правилами де Моргана в **КНФ**. Одержана **КНФ** буде мінімальною **КНФ** функції **F**.

<u>Приклад 1</u>. Знайти мінімальну КНФ логічної функції F=F(A, B, C) = $A\overline{C} \vee \overline{A}\overline{B}C$.

<u>Розв'язування.</u>

1. Знайдемо ДДНФ функції F: F = $AB\overline{C} \vee A\overline{B}\overline{C} \vee \overline{A}\overline{B}C$.

2. Одержимо ДДНФ функції $\overline{F}$: $\overline{F} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}BC \vee A\overline{B}C \vee ABC$.

3. Знайдемо скорочену ДНФ функції $\overline{F}$, виконавши всі операції неповного склеювання і поглинання:

$\overline{F} = \overline{A}\overline{C} \vee \overline{A}B \vee BC \vee AC$.

4. Складемо імплікантну матрицю для функції $\overline{F}$ (див. табл. 1).

Таблиця 1. Імплікантна матриця для прикладу 1

Імпліканта	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}C$	ABC
1 $\overline{A}\overline{C}$	X	X			
2 $\overline{A}B$		X	X		
3 BC			X		X
4 AC				X	X

5. Знайдемо мінімальні форми функції $\overline{F}$ у ДНФ:

$\overline{F} = \overline{A}\overline{C} \vee BC \vee AC$;

$\overline{F} = \overline{A}\overline{C} \vee \overline{A}B \vee AC$.

6. Взявши заперечення від обох частин останніх рівностей і застосовуючи формули де Моргана, одержимо дві мінімальні кон'юнктивні нормальні форми:

$F = (A \vee C)(\overline{B} \vee \overline{C})(\overline{A} \vee \overline{C})$;

$F = (A \vee C)(A \vee \overline{B})(\overline{A} \vee \overline{C})$.

Якщо Ви бажаєте навчитися плавати, то сміливо входьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!

Д. Пойа

2.9. Мінімізація логічних функцій за допомогою таблиць Вейча

Існують універсальні методи мінімізації логічних функцій, наприклад, метод Квайна, який придатний для будь-якого числа змінних **n**. Він зручний для реалізації на універсальній ЕЦОМ в алгоритмічній формі. У той самий час на практиці при проектуванні цифрових автоматів часто ставиться завдання мінімізації функцій вручну для невеликого числа змінних. З цією метою були розроблені методи мінімізації логічних функцій у наочній формі у вигляді спеціальних таблиць, що називаються картами, діаграмами або таблицями.

Розглянемо один з них для мінімізації логічних функцій $\mathbf{f= f\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)}$, що містять не більше п'яти змінних $\mathbf{n \leq 5}$, - метод таблиць Вейча. Мінімізація в цьому випадку здійснюється для функції, записаної в аналітичній формі, -ДДНФ або ДКНФ.

Таблиця Вейча являє собою розкреслений прямокутник, що вміщує $\mathbf{2^n}$ клітинок, до яких заносяться одиниці при мінімізації логічних функцій, які задані у ДДНФ, або нулі у випадку мінімізації логічних функцій, поданих у ДКНФ. Якщо функція записана в ДНФ або КНФ, то її слід попередньо перетворити (розгорнути) у ДДНФ або ДКНФ.

Щоб задати логічну функцію $\mathbf{f=f\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)}$, яка задана в ДДНФ, у вигляді таблиці Вейча, слід записати одиниці до клітинок, що відповідають наборам, на яких функція **f** дорівнює одиниці, а решту клітинок залишити порожніми.

З цією метою спочатку треба виконати розмітку таблиці. Для цього необхідно розмістити змінні $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{i = 1,2,...,n}$, і їх заперечення $\overline{x_i}$ по сторонах прямокутника - згори, знизу, зліва, справа, причому так, щоб змінна без заперечення і ця сама змінна із запереченням порізно накривали $\mathbf{2^{n-1}}$ клітинок кожна, а разом -$\mathbf{2^n}$, що можливо в тому випадку, коли змінна x_i і її заперечення $\overline{x_i}$ знаходяться лише на одному боці таблиці. Кожна змінна зі своїм запереченням розміщується з боків таблиці так, щоб $\mathbf{2^{n-2}}$ клітинок, $\mathbf{5 \geq n \geq 2}$, з їх загального числа $\mathbf{2^{n-1}}$, що накриваються кожною змінною або її запереченням, перетинались з $\mathbf{2^{n-2}}$ клітинками кожної з решти **n - 1** змінних або їх заперечень. Такий перетин між двома змінними відбудеться автоматично, якщо одна з них і її заперечення будуть, наприклад, розміщені зверху стовпців таблиці, а друга зі своїм запереченням - знизу, зліва або справа таблиці (див. табл. 1).

Аналогічно три змінні і їх заперечення мають перетинатися в $\mathbf{2^{n-3}}$, $\mathbf{5 \geq n \geq 3}$ клітинках; чотири - в $\mathbf{2^{n-4}}$, $5 \geq n \geq 4$; п'ять - в $\mathbf{2^{n-5}= 1}$, $\mathbf{n = 5}$.

Перетини клітинок **n** змінних і їх заперечень, що складаються з однієї клітинки, відповідають логічному добутку **n** змінних - конституенті одиниці. Кількість конституент одиниці дорівнює кількості клітинок у таблиці - $\mathbf{2^n}$. Тому будь-яку функцію від $\mathbf{n \leq 5}$ змінних, подану у ДДНФ, можна подати в таблиці Вейча з $\mathbf{2^n}$ клітинками.

Важливою властивістю цих конституент є те, що ті з них, які належать до сусідніх клітинок і до клітинок, що знаходяться на краях рядків і стовпців таблиці, відрізняються знаком заперечення лише в одній із змінних. Це дозволяє здійснювати мінімізацію функції безпосередньо за таблицею в наочній формі. Для цього в клітинках таблиці, що відповідають конституентам одиниці логічної функції, яка мінімізується, проставляються одиниці. Якщо вони стоять у сусідніх двох клітинках, наприклад, таких, що відповідають добуткам **xyz** і $\mathbf{x}\bar{y}\mathbf{z}$ табл. 1, то внаслідок того, що вони відрізняються знаком заперечення лише в одній змінній (у даному випадку **y**), відбувається склеювання за цією змінною. Результат склеювання для цього випадку $\mathbf{xyz + x}\bar{y}\mathbf{z} =$ $\mathbf{xz(y +} \bar{y}\mathbf{) = xz}$. Дві змінні **x** і **z** у цьому випадку накривають разом дві клітинки.

Якщо одиниці стоять у чотирьох сусідніх клітинках, тоді двічі відбувається склеювання за стовпцями або рядками, а потім нові добутки двох змінних склеюються ще раз. У результаті буде одержана одна змінна, яка накриє всі чотири сусідні клітинки.

Таблиця 1. Розміщення добутків змінних та їх заперечень у клітинках таблиці Вейча

	x		$\bar{x}$	
y	$xy\bar{z}$	xyz	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$
$\bar{y}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
	$\bar{z}$	z		$\bar{z}$

Якщо в таблиці Вейча з **n**= 4 містяться 16 клітинок, то процедура об'єднання клітинок відбувається аналогічно, як і в таблиці з 8 клітинками, з тією відмінністю, що три змінні разом накривають дві клітинки, дві - чотири, а одна - вісім. Для таблиці з 5 змінними і відповідно 32 клітинками чотири змінні сумісно накривають дві клітинки, три - чотири, чотири - вісім і одна - шістнадцять.

Проілюструємо викладений матеріал за допомогою прикладів.

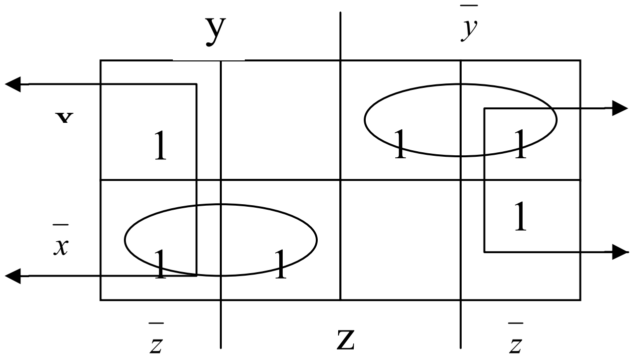
<u>Приклад 1.</u> Знайти мінімальну ДНФ функції

$$f(x,y,z) = xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

<u>Розв'язок.</u> У табл. 2 чотири одиниці, що знаходяться у двох клітинках першого і останнього стовпців, накриваються змінною $\bar{z}$, а одиниці, які за-

лишились, об'єднуються по дві в нижньому і верхньому рядках таблиці і накриваються двома змінними.

Таблиця 2. Об'єднання одиниць для прикладу 1



У результаті одержимо, що

$f(x, y, z) = \overline{z} + x\overline{y} + \overline{x}y$.

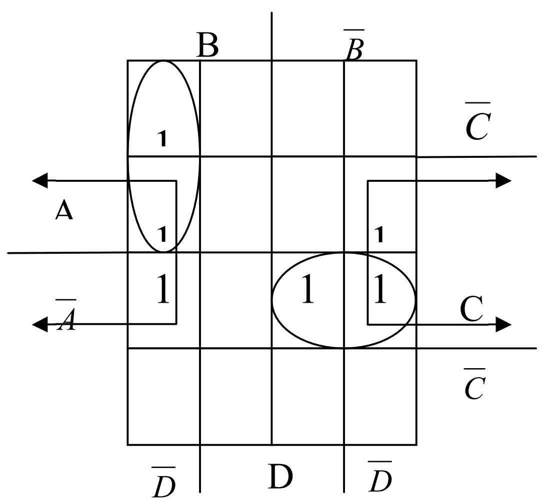
<u>Приклад 2.</u> Знайти мінімальну ДНФ функції

$f(A, B, C, D) = AB\overline{C}\overline{D} + ABC\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}$.

Розв'язок, наведений у табл. 3, яка показує спосіб найбільш раціонального об'єднання одиниць. При цьому мінімальна диз'юнктивна нормальна форма функції f матиме такий вигляд:

$f(A, B, C, D) = C\overline{D} + AB\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C$.

Таблиця 3. Об'єднання одиниць для прикладу 2



Для мінімізації логічної функції f=**f(x_1,x_2,…,x_n)**, поданої в ДКНФ, складається також таблиця Вейча, але її заповнюють не одиницями, а нулями. Вони ставляться в клітинки, що відповідають логічним сумам, на яких функція **f** дорівнює нулю, - конституентам нуля. У всьому іншому процедура мінімізації проходить аналогічно для логічних функцій, поданих у ДНФ.

<u>Приклад 3.</u> Знайти мінімальну КНФ функції

$$f(A,B,C)=(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C).$$

Для одержання мінімальної кон'юнктивної нормальної форми слід об'єднати нулі логічної функції. Два обведених суцільною лінією нулі (див. табл. 4) склеюються за змінною **C** і накриваються логічною сумою A + $\overline{B}$, а останній нуль -конституентою $\overline{A}$ + B + C .

Таблиця 4. Об'єднання нулів для прикладу 3

	B	B	$\overline{B}$	$\overline{B}$
A			0	0
$\overline{A}$		0		
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$

Тому мінімальна кон'юнктивна нормальна форма заданої функції матиме вигляд

$$f(A,B,C)=(A+\overline{B})(\overline{A}+B+C).$$

<u>Приклад 4.</u> Знайти мінімальну **ДНФ** для функції **f(A, B, C)**, яка задана в прикладі 3. Для цього подамо її в **<u>ДДНФ</u>**:

$$f(A,B,C)=AB\overline{C}+ABC+A\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C.$$

Розв'язок цієї задачі наведений у таблицях 5 і 6 у двох варіантах.

Таблиця 5. Об'єднання одиниць для прикладу 4 (перший варіант)

	B	B	$\overline{B}$	$\overline{B}$
A	1	1	1	
$\overline{A}$			1	1
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$

Таблиця 6. Об'єднання одиниць для прикладу 4 (другий варіант)

	B	B	$\overline{B}$	$\overline{B}$
A	1	1	1	
$\overline{A}$			1	1
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$

Таблицям 5 і 6 відповідають дві мінімальні ДНФ функції

$f(A,B,C) = AB + AC + \overline{A}\,\overline{B}$ і $f(A,B,C) = AB + \overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}$.

Звернемо увагу на те, що мінімальна КНФ містить менше літер, ніж мінімальні ДНФ.

У ряді випадків зручно об'єднувати в одній таблиці Вейча мінімізацію в ДНФ і мінімізацію в КНФ, наприклад, на основі табл. 5. Тоді при мінімізації в КНФ нулі записуються до тих клітинок табл. 5, які знаходяться на перетині інверсних значень змінних конституент нуля (див. табл. 7). Це виходить з правила де Моргана, відповідно до якого

$$A + \overline{B} + C = \overline{\overline{A}B\overline{C}},\ A + \overline{B} + \overline{C} = \overline{\overline{A}BC},\ \overline{A} + B + C = \overline{A\overline{B}\,\overline{C}}.$$

Таблиця 7. Об'єднана мінімізація за нулями та одиницями

	B	B	$\overline{B}$	$\overline{B}$
A	1	1	1	0
$\overline{A}$	0	0	1	1
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$

Відповідно до результуючої мінімальної функції записуються інверсні значення змінних, що накривають нулі:

$f(A,B,C) = (A + \overline{B})(\overline{A} + B + C)$.

Вона має такий самий вигляд, як і для табл. 4.

Доведемо приведені правила на основі пункта **2.8**.

Дійсно, $\overline{f}(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C}$

і відповідно

$$f(A,B,C) = \overline{\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C}} = \overline{\overline{A}B\overline{C}} \cdot \overline{\overline{A}BC} \cdot \overline{A\overline{B}\overline{C}} = (A + \overline{B} + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + C)$$

Після мінімізації $\overline{f}(A,B,C) = \overline{A}B + A\overline{B}\overline{C}$, і відповідно

$$f(A,B,C) = \overline{\overline{A}B + A\overline{B}\overline{C}} = \overline{\overline{A}B} \cdot \overline{A\overline{B}\overline{C}} = (A + \overline{B})(\overline{A} + B + C).$$

Спалити - не значить довести.

Д. Бруно

2.10. Мінімізація неповністю визначених логічних функцій

У цифрових автоматах досить часто є заборонені слова, які ніколи не надходять на вхід цифрового автомата. Внаслідок цього їх можна довільно позначити або нулем, або одиницею.

У разі, якщо алфавіт літер цих слів складається з 0 та 1, то ми одержимо логічну функцію

<u>Означення 1.</u> Логічна функція **f**, яка визначена на всіх наборах змінних, називається **повністю** визначеною.

<u>Означення 2.</u> Логічна функція **f**, яка визначена не на всіх наборах змінних, називається **неповністю** або **частково** визначеною.

Припустимо, що є неповністю визначена логічна функція **f**, яка не визначена на $\mathbf{p} < \mathbf{2^n}$ наборах змінних $\mathbf{z_1, z_2, ..., z_n}$. Тоді її можна доповнити $\mathbf{2^p}$ способами до повністю визначеної логічної функції

$\boldsymbol{\varphi = \varphi(z_1, z_2, ..., z_n)}$.

<u>Означення 3.</u> Логічна функція $\boldsymbol{\varphi = \varphi(z_1, z_2, ..., z_n)}$, значення якої збігаються зі значеннями функції $\mathbf{f = f(z_1, z_2, ..., z_n)}$ на всіх наборах, на яких остання визначена, називається **еквівалентною** функції **f**.

Серед усіх $\mathbf{2^P}$ функцій $\boldsymbol{\varphi}$, еквівалентних **f**, є, очевидно, одна або кілька таких, що містять мінімальну кількість літер.

Розглянемо їх пошук на прикладі.

<u>Приклад 1.</u> Знайти мінімальну диз'юнктивну нормальну форму логічної функції

$$f = f(A,B,C,D) = \overline{A}B\overline{C}\overline{D} \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} \vee AB\overline{C}\overline{D}.$$

При цьому задано, що функція не визначена на 4 наборах: 0110, 1011, 0011 і 0010. Цим наборам відповідають конституенти 1: $\overline{A}BC\overline{D}$, $A\overline{B}CD$, $\overline{A}\overline{B}CD$ і $\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$, які в силу невизначеності функції **f** на цих 4 наборах можуть дорівнювати на них як 1, так і 0.

Наведемо в табл. 1 діаграму Вейча для цієї функції.

Порожніми **p = 4** клітинками позначаються добутки змінних, які можуть набирати значення як 1, так і 0. У цих клітинках можуть бути подані одиниці і нулі $\mathbf{2^P = 2^4 = 16}$ способами.

Таблиця 1. Задання неповністю визначеної функції

	B	B	$\overline{B}$	$\overline{B}$	
A	1	0	0	0	$\overline{C}$
A	0	0		0	C
$\overline{A}$		0			C
$\overline{A}$	1	0	0	1	$\overline{C}$
	$\overline{D}$	D	D	$\overline{D}$	

Виберемо такий розподіл одиниць і нулів, який мінімізує функцію **f** (див. табл. 2).

Таблиця 2. Задання доповненої функції

	B	B	$\overline{B}$	$\overline{B}$	
A	1	0	0	0	$\overline{C}$
A	0	0	0	0	C
$\overline{A}$	1	0	0	1	C
$\overline{A}$	1	0	0	1	$\overline{C}$
	$\overline{D}$	D	D	$\overline{D}$	

Результуюча функція матиме вигляд

$f(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{D} \vee B\overline{C}\overline{D}$.

Доповнимо тепер порожні клітинки нулями.

Таблиця 3. Задання доповненої функції за допомогою нулів

	B	B	$\overline{B}$	$\overline{B}$	
A	1	0	0	0	$\overline{C}$
A	0	0	0	0	C
$\overline{A}$	0	0	0	0	C
$\overline{A}$	1	0	0	1	$\overline{C}$
	$\overline{D}$	D	D	$\overline{D}$	

У результаті мінімальна кон'юнктивна нормальна форма функції **f** матиме такий вигляд:

$$f = f(A,B,C,D) = \overline{C}\overline{D}(\overline{A} \vee B).$$

Як випливає з вищенаведеного, неповністю визначені функції дають можливість додатково зменшити кількість літер при мінімізації логічних функцій, а отже, дозволяють синтезувати більш економічні цифрові автомати. Тому для синтезу цифрових автоматів слід там, де можна, використовувати частково визначені функції.

Фрази треба скорочувати до розмірів думки.
Із заповіту Прокруста

Частина3. Додатки

Додаток1.Завдання для контрольних робіт

1. Множини

1.1 Провести тотожні перетворення рівностей відповідно до заданого варіанту в табл. 1.1 з метою зменшення в них кількості літер до мінімума.

2. Виразити символічно (використовуючи знаки операцій перетину, об'єднання і доповнення) множини, заштриховані на діаграмах Ейлера-Вена, відповідно до табл. 1.2. Номери вашого набору діаграм Ейлера задані в табл. 1.3.

3. Накреслити діаграму Ейлера для чотирьох множин A, B, C, D, які утворюють множину F, і позначити штриховкою її область (див. табл. 1.4).

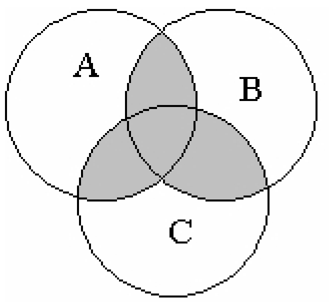
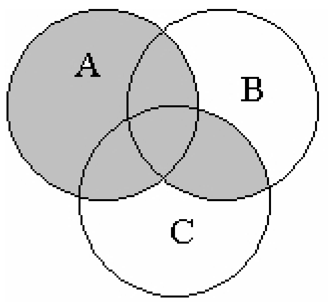
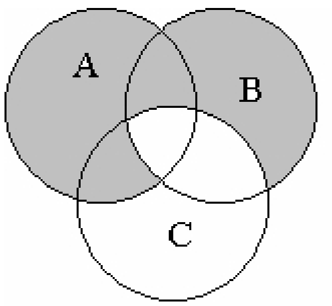
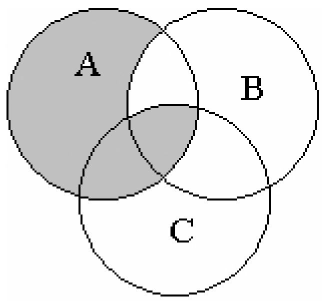
Таблиця 1.1.

Варіант	Рівності
1	F= $\overline{A\cup\overline{B}}\cup\overline{C\cup\overline{D}}\cup\overline{\overline{A}\cap B\cap C\cap\overline{D}}$
2	F= $(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(A\cap C\cap\overline{A})$
3	F= $(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap D)$
4	F= $(\overline{A\cup B})\cap(C\cup\overline{D})\cap\overline{A\cup B\cup\overline{C}}$
5	F= $(\overline{A\cup\overline{B}}\cap C)\cup((A\cup\overline{B})\cap C)\cup D$
6	F= $(((B\cup\overline{C})\cap D)\cap((\overline{B}\cap C)\cup\overline{D}))\cup(A\cap C)$
7	F= $(A\cap B\cap C)\cup(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\cup C})\cup(\overline{C\cup\overline{D}})$
8	F= $(\overline{A\cup\overline{B}})\cap(C\cup\overline{D})\cap\overline{A\cup\overline{B}\cup\overline{C}}$
9	F= $((A\cup\overline{B}\cup\overline{C})\cap(B\cup C\cup\overline{D}))\cap((\overline{A}\cap B\cap C)\cup(\overline{B}\cap\overline{C}\cap D))$
10	F= $(\overline{A}\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap\overline{D})$
11	F= $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup\overline{D}$
12	F= $(\overline{A\cap\overline{B}})\cap(A\cap\overline{C}\cap D)\cap(\overline{A}\cup C\cup\overline{D})$
13	F= $(B\cup C\cup\overline{D})\cap(\overline{B}\cup C\cup\overline{D})\cap(B\cup C\cup D)\cap(A\cup C)$
14	F= $(D\cap C\cap\overline{A})\cup(\overline{D}\cap C\cap\overline{A})\cup(\overline{D}\cap\overline{C}\cap\overline{A})\cup(\overline{B\cup A})$
15	F= $(\overline{A}\cup C)\cap(\overline{A}\cup C\cup D)\cap(C\cup\overline{D})\cap(\overline{C}\cup\overline{D})\cap(\overline{\overline{B}\cup\overline{D}})$
16	F= $\overline{A\cap C\cap\overline{D}}\cup\overline{A\cap C}\cup D\cup A\cup B$
17	F= $C\cap\overline{D}\cap B\cap(\overline{\overline{A}\cup B\cup\overline{C}})\cap(C\cap D)\cap(\overline{A}\cup B)$
18	F= $(D\cup B\cup\overline{C})\cap(D\cup B\cup\overline{C}\cup\overline{A})\cap(B\cup C\cup A)\cap(\overline{\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{A}\cap D})$
19	F= $(D\cup C\cup\overline{A})\cap(\overline{D}\cup C\cup\overline{A})\cap(\overline{D}\cup\overline{C}\cup\overline{A})\cap(\overline{B\cap A})$
20	F= $(D\cap C\cap B\cap\overline{A})\cup(\overline{D}\cap B)\cup(\overline{C}\cap B)\cup(B\cap A)$

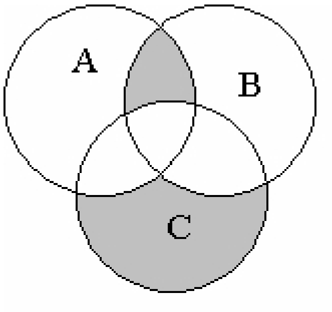
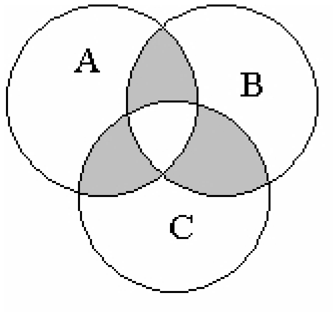
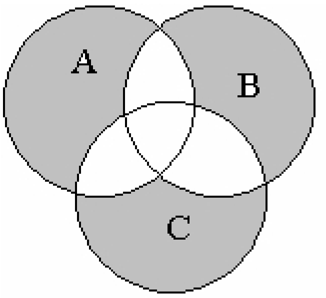
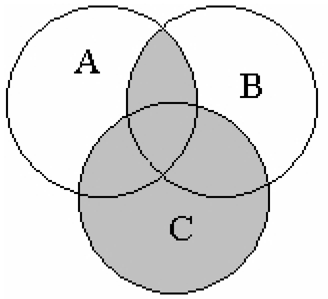
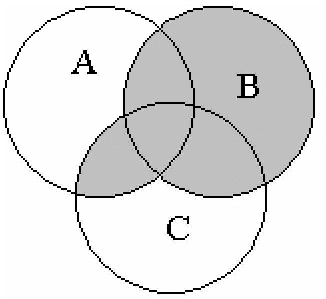
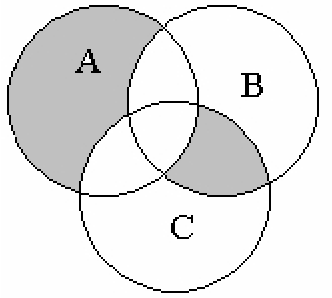
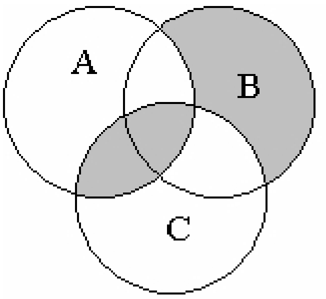
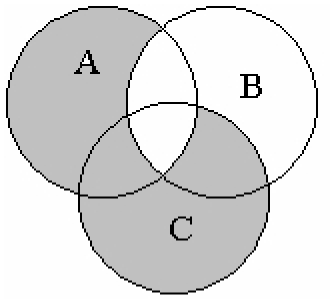
Продовження таблиці 1.1.

Варіант	Рівності
21	$F=(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}})\cup(\overline{C}\cap D)\cup\overline{\overline{A}\cap\overline{B}\cap C}$
22	$F=\overline{\overline{A}\cap B}\cap\overline{C}((\overline{A}\cap B)\cup C)\cap\overline{D}$
23	$F=(\overline{B}\cap C)\cup\overline{D}\cup((B\cup\overline{C})\cap D)\cup(A\cup\overline{C})$
24	$F=(\overline{D}\cap C\cap B\cap A)\cup(D\cap B)\cup(\overline{C}\cap B)\cup(B\cap\overline{A})$
25	$F=(A\cup B\cup C)\cap(\overline{A\cap\overline{B}\cap\overline{C}})\cap\overline{\overline{C}\cap D}$
26	$F=(D\cup\overline{C}\cup A)\cap(D\cup\overline{C}\cup\overline{A})\cap(\overline{D}\cup\overline{C}\cup\overline{A})\cap(\overline{D}\cup\overline{C}\cup A)\cap\overline{B}$
27	$F=(\overline{B}\cup C\cup A)\cap(\overline{B}\cup\overline{C}\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup\overline{C}\cup A)\cap(\overline{B}\cup C\cup\overline{A})\cap D$
28	$F=(A\cup C\cup\overline{D})\cap(\overline{A}\cup\overline{C}\cup\overline{D})\cap(\overline{A}\cup C\cup\overline{D})\cap(A\cup\overline{C}\cup\overline{D})\cap B$
29	$F=\overline{A\cup\overline{B}}\cap\overline{C\cup\overline{D}\cup\overline{A}}\cap\overline{\overline{A}\cap B}$
30	$F=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup\overline{D}$

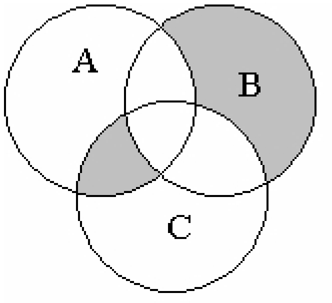
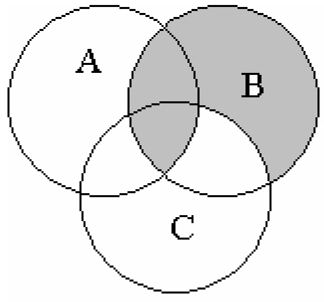
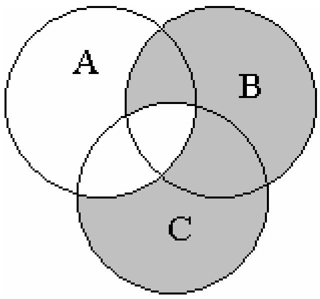
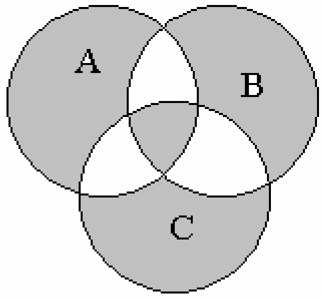
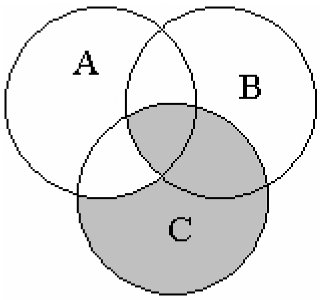
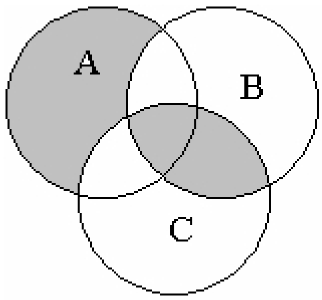
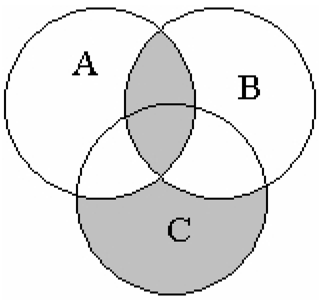
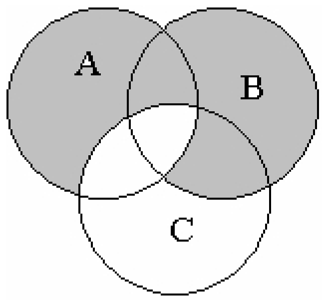
Таблиця 1.2.

Варіант	Діаграми Ейлера	Варіант	Діаграми Ейлера
1		2	
3		4	

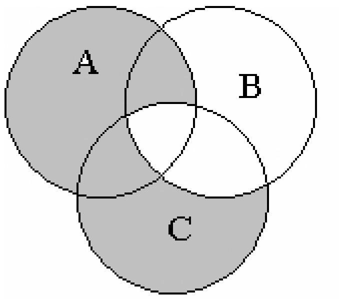
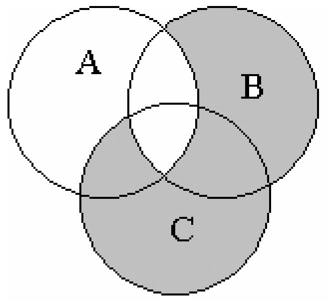
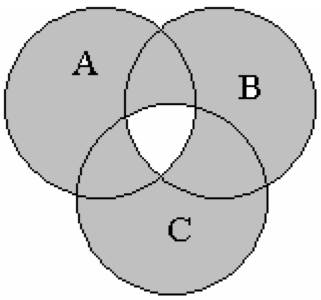
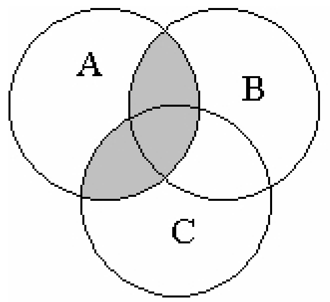
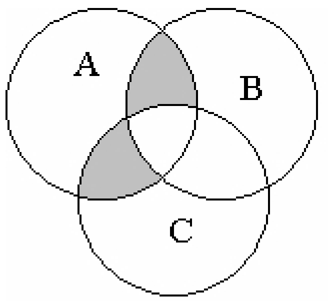
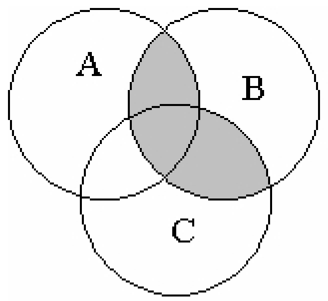
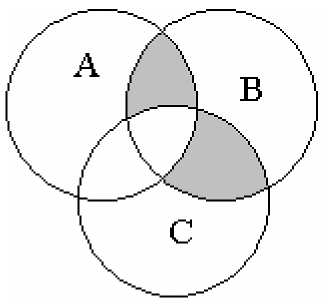
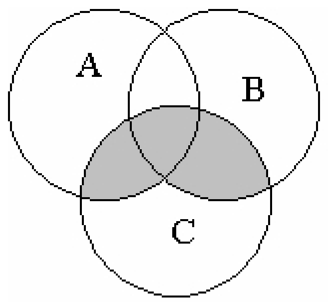
Продовження таблиці 1.2.

Варіант	Діаграми Ейлера	Варіант	Діаграми Ейлера
5		6	
7		8	
9		10	
11		12	

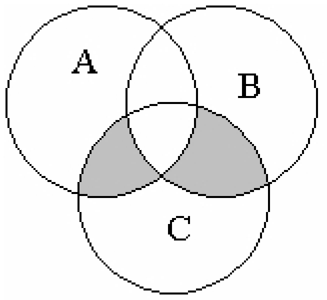
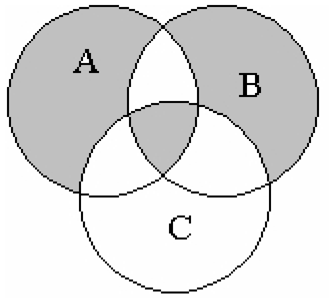
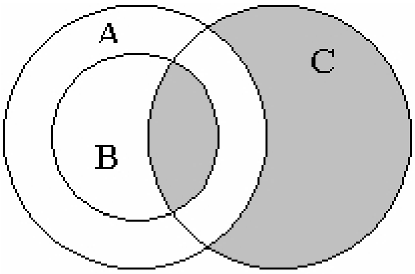
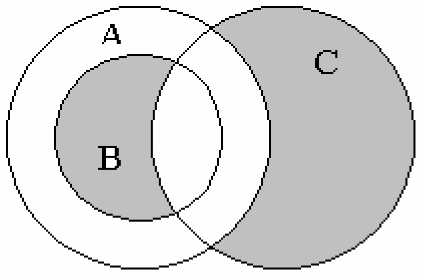
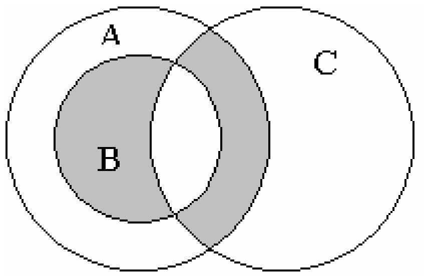
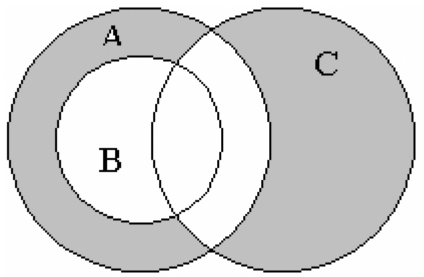
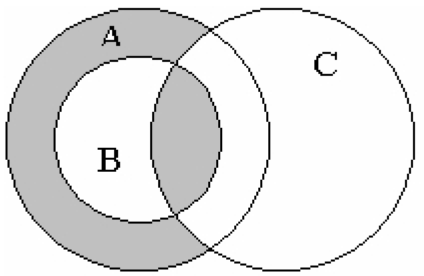
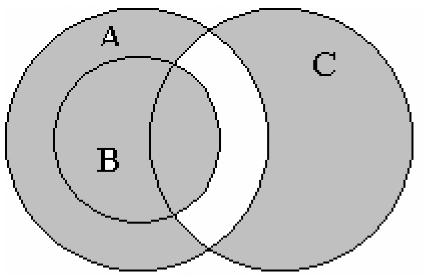
Продовження таблиці 1.2.

Варіант	Діаграми Ейлера	Варіант	Діаграми Ейлера
13		14	
15		16	
17		18	
19		20	

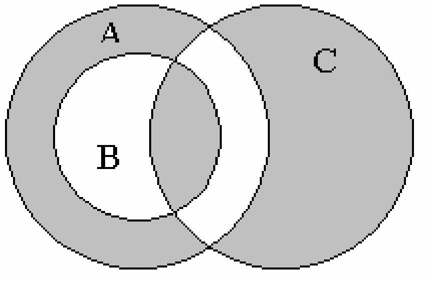
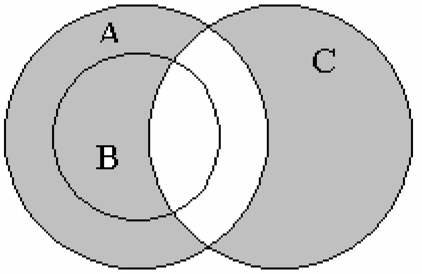
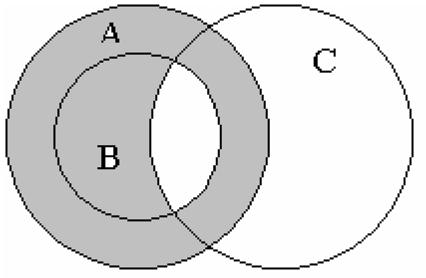
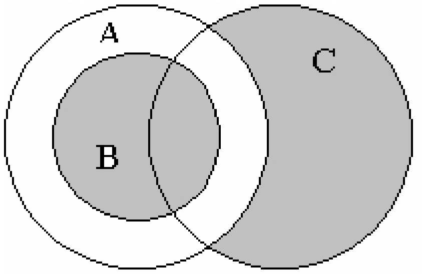
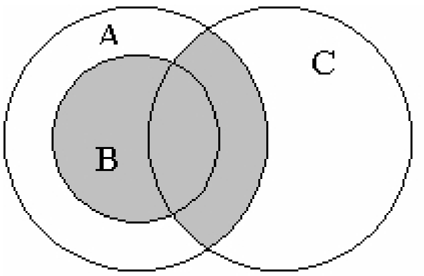
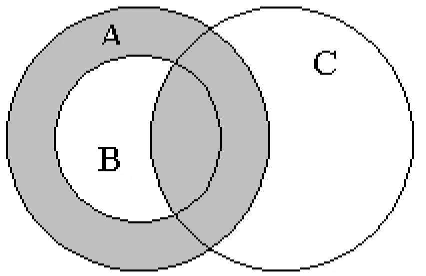
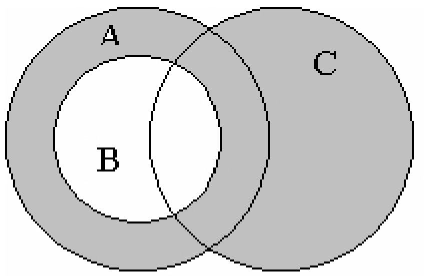
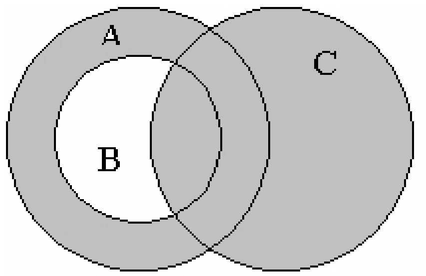
Продовження таблиці 1.2.

Варіант	Діаграми Ейлера	Варіант	Діаграми Ейлера
21		22	
23		24	
25		26	
27		28	

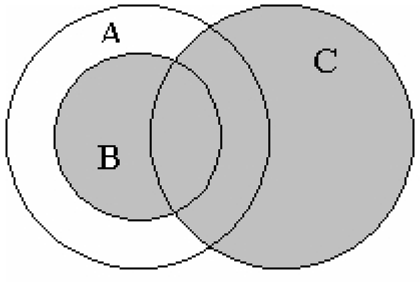
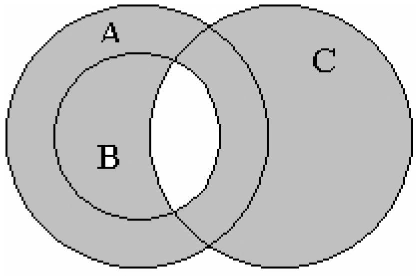
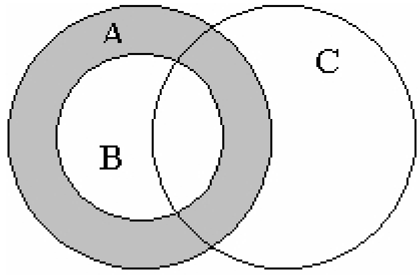
Продовження таблиці 1.2.

Варіант	Діаграми Ейлера	Варіант	Діаграми Ейлера
29		30	
31		32	
33		34	
35		36	

Продовження таблиці 1.2.

Варіант	Діаграми Ейлера	Варіант	Діаграми Ейлера
37		38	
39		40	
41		42	
43		44	

Продовження таблиці 1.2.

Варіант	Діаграми Ейлера	Варіант	Діаграми Ейлера
45		46	
47			

Таблиця 1.3.

Варіант	Номери діаграм Ейлера	Варіант	Номери діаграм Ейлера	Варіант	Номери діаграм Ейлера
1	1, 12, 23, 34	11	11, 22, 33, 44	21	7, 21, 31, 36
2	2, 13, 24, 35	12	12, 7, 22, 45	22	8, 22, 32, 37
3	3, 14, 25, 36	13	13, 8, 23, 46	23	9, 12, 33,38
4	4, 15, 26, 37	14	14, 9, 24, 47	24	10, 13, 34, 39
5	5, 16, 27, 38	15	15, 1, 25, 30	25	1, 10, 20, 40
6	6, 17, 28, 39	16	16, 2, 26, 31	26	2, 11, 21, 41
7	7, 18, 29, 39	17	3, 17, 27, 32	27	3, 12, 22, 42
8	8, 19, 30, 41	18	4, 18, 28, 33	28	4, 13, 46, 43
9	9, 20, 31, 42	19	5, 19, 29, 34	29	5, 14, 47, 44
10	10, 21, 32, 43	20	6, 20, 30, 35	30	6, 15, 23, 45

Таблиця 1.4.

Варіант	Множина F утворена множинами A, B, C, D
1	F= $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap B\cap C\cap D)$
2	F= $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)$
3	F= $(\overline{A}\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})$
4	F= $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)$
5	F= $(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)$
6	F= $(\overline{A}\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})$
7	F= $(\overline{A}\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})$
8	F= $(A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})$
9	F= $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)$
10	F= $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D})$
11	F= $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})$
12	F= $(\overline{A}\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})$
13	F= $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})$
14	F= $(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)$
15	F= $(\overline{A}\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})$
16	F= $(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(A\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})$
17	F= $(A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(A\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D})$
18	F= $(A\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap D)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)$
19	F= $(\overline{A}\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap D)$
20	F= $(\overline{A}\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap D)$
21	F= $(A\cap B\cap\overline{C}\cap D)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})$
22	F= $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})$
23	F= $(A\cap B\cap\overline{C}\cap D)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})$
24	F= $(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap D)\cup(\overline{A}\cap B\cap C\cap\overline{D})$
25	F= $(A\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)$
26	F= $(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap D)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})$
27	F= $(\overline{A}\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(\overline{A}\cap B\cap C\cap D)$
28	F= $(\overline{A}\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})$
29	F= $(A\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap D)$
30	F= $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap D)$

2. ЛОГІКА

1. Для функції, яка наведена в колонці 1 таблиці варіантів 2.1, задані номери наборів, на яких вона дорівнює одиниці. Необхідно мінімізувати цю функцію двома методами – Квайна і карт Вейча. Мінімізацію провести в ДНФ і КНФ. Результати порівняти.

2. Мінімізувати в ДНФ і КНФ за допомогою карт Вейча неповністю означену функцію, наведену в колонці 2 таблиці варіантів 2.1, оптимально її доповнивши.

3. Провести логічні перетворення функції f, яка задана в колонці 3 таблиці варіантів 2.1 в аналітичній формі. Одержати ДДНФ або ДКНФ цієї функції. Провести її мінімізацію методом Квайна.

4. Провести логічні перетворення функції f у табличному вигляді і записати її в ДДНФ і ДКНФ та порівняти з результатом, одержаним у пункті 3. Провести її мінімізацію методом карт Вейча і порівняти мінімальну функцію з такою ж функцією в пункті 3.

Таблиця 2.1

Варіант	1	2	3
1	3, 6, 7, 9, 10, 11, 15	111*00**01111010	$f=(A\sim B)\vee C\to A$
2	2, 3, 5, 7, 11, 14, 15	1011*1000110**01	$f=A\sim B\vee C\to B$
3	0, 1, 4, 10, 11, 12, 15	11000111*00011*0	$f=A\sim B\to C\vee A$
4	2, 3, 6, 8, 9, 13, 14	*101*011*0001001	$f=(A\sim B)\to C\vee B$
5	2, 3, 5, 7, 10, 11, 15	00100011**010011	$f=A\sim (B\mid C)\to B$
6	0, 3, 5, 7, 10, 14, 15	11*1000111*00011	$f=(A\to B)\wedge C\sim A$
7	0, 2, 5, 8, 13, 14, 15	*0111**001*0011*	$f=(A\sim B)\mid C\vee A$
8	0, 3, 5, 7, 8, 11, 12	0*01101100011**0	$f=(A\to B)\to C\vee A$
9	1, 2, 3, 7, 11, 12, 15	1*0001101111000*	$f=(A\to B)\sim C\mid B$
10	0, 1, 2, 3, 6, 8, 15	10011010111**000	$f=A\sim B\wedge C\mid A$
11	2, 3, 5, 6, 10, 12, 13	*101000001110*11	$f=A\to B\sim C\vee \overline{A}$
12	0, 1, 3, 5, 6, 7, 11	0110111*10000111	$f=(\overline{A}\sim B)\wedge(A\sim \overline{C})$
13	1, 2, 3, 4, 6, 7, 11	11100110100011**	$f=(C\vee \overline{A})\to(A\sim B)$
14	0, 2, 3, 5, 6, 7, 11	**100011*0001101	$f=A\sim B\to C\vee \overline{A}$
15	1, 2, 3, 4, 6, 7, 15	10*1011*01110011	$f=A\sim C\vee B\mid A$
16	0, 2, 3, 5, 6, 7, 15	010**10011110011	$f=A\sim C\mid B\to A$
17	2, 3, 4, 7, 8, 9, 12	0010**01*1011011	$f=A\sim (C\mid B\vee \overline{C})$
18	1, 4, 5, 9, 10, 11, 13	00110110000111**	$f=(A\mid B)\mid(A\mid C)$
19	0, 3, 6, 7, 8, 10, 12	1000110011001**0	$f=(A\to B)\sim C\wedge \overline{B}$
20	6, 9, 10, 11, 12, 14, 15	*1100110*111000*	$f=C\vee \overline{A}\to B\sim C$
21	7, 8, 10, 11, 13, 14, 15	000011011**00*10	$f=A\to B\sim (C\mid A)$
22	2, 7, 9, 10, 11, 14, 15	001110001*011*01	$f=(A\sim B)\wedge C\to \overline{B}$
23	3, 6, 10, 11, 13, 14, 15	001*0101110*1100	$f=(A\sim B)\vee \overline{A}\to C$
24	0, 1, 2, 3, 4, 7, 8	01*100110001110*	$f=A\to B\wedge C\sim A$
25	1, 3, 6, 7, 10, 11, 15	10111001**000110	$f=A\to B\mid (C\to A)$

Продовження таблиці 2.1

Варіант	1	2	3
26	1, 2, 3, 5, 8, 9, 11	1110001100**1010	f=$(A \sim B) \wedge (\overline{A} \to C)$
27	0, 1, 3, 9, 10, 11, 15	1000100011110**0	f=$(A \sim B) \sim C \vee \overline{A}$
28	3, 4, 5, 7, 10, 13, 15	01011*100011*011	f=$C \vee B \sim A \vee \overline{B}$
29	4, 5, 6, 11, 12, 13, 15	10110*100110011*	f=$A \to B \sim C \wedge \overline{B}$
30	1, 5, 6, 7, 11, 13, 15	111000**1100011*	f=$B \to C \sim A \vee \overline{B}$

Додаток 2. Основні запитання для самоперевірки

I. Вступ

1. Означення дискретної математики і областей її використання.
2. Дискретні сигнали та їх класифікація.

Частина 1. Множини

II. Основні означення

1. Основні означення теорії множин.
2. Поняття пустої множини. Булеан множини.

III. Дії над множинами

1. Операції над множинами. Приклади.
2. Об'єднання і перетин множин. Приклади.
3. Різниці та доповнення множин. Приклади. Симетрична різниця. Приклади.
4. Розбиття множин. Приклади.
5. Поняття універсальної множини.

IV. Алгебра множин

1. Поняття про алгебру множин. Основні тотожності алгебри множин. Доведення. Приклади.
2. Комутативний, асоціативний, дистрибутивний закони.
3. Закони ідемпотентності, поглинання, де Моргана.
4. Принцип двоїстості для алгебри множин. Приклади.
5. Доведення тотожностей алгебри множин за допомогою діаграм Ейлера. Приклади.
6. Узагальнення операцій над множинами.

V. Вектори і прямий добуток

1. Означення кортежа, вектора. Проекції вектора на координатні площини та осі координат. Приклади.
2. Прямий добуток множин. Проекція множин. Приклади.

VI. Відповідності і відображення

1. Відповідність. Образ і прообраз. Зворотна відповідність. Композиція відповідностей. Приклади.

2. Відображення. Форми подання відображення: таблична, графічна, стрілкова. Приклади.

3. Відображення у вигляді сюр'єкції, ін'єкції, та бієкції. Приклади.

VII. Функції і перетворення

1. Функція, суперпозиція функцій, формула, функціонал, зворотна функція, композиція функцій. Приклади.

2. Перетворення множин. Тотожне перетворення. Постійне перетворення. Підстановка. Приклади.

VIII. Алгебраїчні операції та системи

1. Поняття алгебраїчної операції. Приклади.

2. Поняття напівтрупи, нейтрального елемента. Приклади.

3. Поняття групи, зворотного, нульового та одиничного елемента групи. Приклади.

4. Ізоморфні групи.

5. Кільця, поля. Приклади.

IX. Групи

1. Абстрактна група. Мультиплікативні та адитивні операції. Кінцеві та нескінченні групи.

2. Аксіоми групи.

3. Теореми про зворотний і одиничний елементи груп.

4. Групи перетворень.

5. Групи підстановок.

6. Теорема Келі.

X. Приклади груп

1. Групи “0” і “1”.

2. Група “+1 і -1”.

3. Група векторів.

4. Група поворотів правильного трикутника.

Частина 2. Логіка

XI. Числення висловлювань

1. Поняття про алгебру логіки і обчислення висловлень.

2. Істинне і хибне висловлення. Просте і складне висловлення . Приклади.

3. Основні логічні операції: константа нуля, константа одиниці, “НЕ”, “І”, “АБО”.

4. Логічні операції: “імплікація”, “заборона”, “рівнозначність”, “нерівнозначність”. Приклади.

5. Логічні операції “Шеффера”, “Пірса”, “Змінна”. Приклади.

6. Поняття про логічний закон, логічне протиріччя і твердження, яке логічно виконується. Приклади.

7. Основні закони алгебри логіки. Приклади.

XII. Поняття логічної функції

1. Поняття набору логічної функції. Таблиця істинності. Число наборів від **n** аргументів функції. Доведення.

2. Поняття про логічну функцію та її аргументи. Кількість функцій від **n** аргументів. Доведення.
3. Логічні функції двох аргументів. Визначити їх кількість і дати назву. Привести таблицю істинності.

XIII. Перетворення логічних функцій

1. Доведення логічних тверджень і законів за допомогою таблиць істинності. Приклади.
2. Привести доведення за допомогою таблиць істинності правила де Моргана, імплікації, рівнозначності.
3. Привести і довести співвідношення між двома аргументами x_1, x_2, один із яких постійно набирає значення 1 або 0.
4. Привести і довести співвідношення між двома аргументами x_1, x_2, коли $x_1=x_2=x$ і $x_1=x$, а $x_2=\bar{x}$.
5. Поняття про булеву алгебру. Привести основні співвідношення в булевій алгебрі для операцій диз'юнкції та кон'юнкції.
6. Спеціальні формули булевої алгебри. Довести на прикладах.

XIV. Диз'юнктивні нормальні форми

1. Поняття про диз'юнктивну нормальну форму (ДНФ). Елементарний добуток. Конституента одиниці. Основні теореми для конституенти одиниці і її наслідки.
2. Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ). Алгоритм одержання конституенти одиниці та ДДНФ. Приклад.
3. Поняття імпліканти і простої імпліканти. Приклади.
4. Поняття скороченої ДНФ. Приклад.
5. Операції повного і неповного склеювання в ДНФ, операція поглинання і розгорнення. Приклади.

XV. Мінімізація логічних функцій в ДДНФ

1. Теорема Квайна для ДДНФ. Доведення.
2. Алгоритм мінімізації ДДНФ за Квайном. Приклад.
3. Імплікантні матриці для одержання мінімальної ДНФ. Приклад.
4. Тупикові і мінімальні ДНФ. Приклади.

XVI. Кон'юнктивні нормальні форми

1. Поняття про кон'юнктивну нормальну форму (КНФ). Елементарна сума. Конституента нуля. Основні теореми.
2. Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ). Алгоритм одержання конституенти нуля і ДКНФ. Приклади.
3. Поняття імпліценти і простої імпліценти. Навести приклади.
4. Поняття скороченої КНФ. Приклади.
5. Операції повного і неповного склеювання в КНФ. Операції поглинання і розгорнення. Приклади.

XVII. Мінімізація логічних функцій в ДКНФ

1. Теорема Квайна для ДКНФ. Доведення.
2. Алгоритм мінімізації ДКНФ за Квайном. Приклад.
3. Імпліцентна матриця для одержання мінімальної КНФ. Приклад.

4. Тупикові і мінімальні КНФ. Приклади.

XVIII. Одержання мінімальних КНФ за допомогою диз’юнктивних форм

1. Одержання мінімальних КНФ за допомогою диз’юнктивних форм. Приклад.

XIX. Мінімізація логічних функцій за допомогою таблиць Вейча

1. Метод карт Вейча для мінімізації булевих функцій, представлених в ДДНФ. Приклади.

2. Метод карт Вейча для мінімізації булевих функцій, представлених в ДКНФ. Приклади.

XX. Мінімізація неповністю визначених логічних функцій

1. Мінімізація неповністю означених булевих функцій. Приклади.

Додаток 3. Математична індукція

1. Неповна (звичайна) індукція

Поняття дедукції та індукції – це поняття , які особливо часто зустрічаються в науці, за їх допомогою формуються твердження, що можуть бути як дійсними (правильними), так і хибними (помилковими). До того часу, поки не визначена дійсність або хибність твердження, воно є гіпотезою - передбачуваним припущенням.

У свою чергу твердження поділяються на загальні та часткові. Наприклад, твердження, що всі студенти, які встигають у навчанні, мають право на стипендію, є загальним, а твердження, що студент **x** може отримувати стипендію, є частковим. Твердження, що всі натуральні парні числа діляться на 2, є загальним, а твердження, що ціле число x=6 ділиться на 2, є частковим.

Дедукція (лат. deduction – висновок) являє собою перехід від загального до часткового, а індукція (лат. inductio – наведення) – перехід від часткового до загального.

Дедукція широко використовується при логічних доведеннях математичних теорем і при правильному її використанні дає правильні й остаточні висновки.

Звичайна індукція також широко використовується в математиці, але не завжди дає правильний висновок про дійсність або хибність того чи іншого твердження, оскільки вона будує свої висновки на основі ряду часткових результатів, одержаних при дослідженні тієї чи іншої математичної властивості. За допомогою цих результатів потім формуються твердження про досліджувану властивість. Однак це твердження можна вважати дійсним, коли досліджені всі без винятку можливі часткові результати, що буває тільки тоді, коли їх кількість скінченна. У випадку, коли кількість можливих результатів нескінченна, отримати висновок про дійсність або хибність твердження щодо тієї чи іншої математичної властивості за допомогою звичайної індукції неможливо в принципі.

Тому одержані за допомогою звичайної індукції твердження являють собою гіпотези, дійсність або хибність яких ще доведеться підтвердити іншим способом.

Наприклад, те, що парні числа 2, 4, 6, 8, 10, 12 діляться на 2, ще не дає права без додаткового доведення прийти до твердження щодо властивості усіх парних натуральних чисел ділитися на 2 (про визначення парного числа дивіться нижче в прикладі). Однак таке право на цю властивість існує, якщо множина чисел обмежується тільки вказаними числами.

Другий приклад. Нехай маємо тричлен x^2+x+41. Якщо підставити в нього замість x нуль, то одержимо просте число 41; якщо 1, то 43; якщо 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, то відповідно числа 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151. Усі вони прості числа. Здається можна припустити, що при підстановці у даний тричлен будь-якого цілого додатного числа завжди в результаті буде одержане просте число. Однак це не так. Вже при x=40 вказаний тричлен ділиться на 41, при x=41 ($x^2+x+41=41^2+41+41$) тричлен також ділиться на 41. У цьому небезпека звичайної індукції, оскільки вона не гарантує позитивний результат у будь-якому випадку.

Звичайна індукція характеризує собою індуктивний підхід до науки взагалі і є неповною індукцією, оскільки не дає можливості одержати вірогідне твердження про властивість, яка досліджується.

2. Повна індукція

На противагу неповній індукції в математиці розроблений метод, що гарантує вірогідність одержаних за його допомогою, - метод математичної індукції, який називається ще методом повної або цілковитої індукції. Цей метод поширюється тільки на теореми, що відбивають загальні властивості натуральних чисел 1, 2,..., та на інші розділи математики, які спираються на натуральні числа. Наприклад, до таких розділів належить арифметика цілих чисел та заснована на ній теорія раціональних чисел. Існують також розділи математики, які можуть бути інтерпретовані в термінах арифметики, наприклад, евклідова геометрія. Відповідно в цих розділах також може бути використаний метод математичної індукції.

Математична індукція, яка називається ще індукцією за побудовою, використовується також для доведення логічних формул.

В основі методу математичної індукції лежить принцип математичної індукції, який поширюється на будь-які твердження P(n), що відносяться до чисел n=1,2,…. Сформуємо цей принцип у вигляді теореми.

<u>Теорема 1.</u> Будь-яке твердження P(n) дійсне для будь-якого n у випадку, якщо воно дійсне для n=1, та з дійсності цього твердження для будь-якого довільного n=k виходить його дійсність для n=k+1.

Наведена теорема розпадається на дві леми, перша з яких – лема 1 – вимагає, щоб твердження P(n) було справедливим для n=1, а друга – лема 2 –

для n=k+1, за умови, що твердження P(n) справедливе для n=k. Тільки тоді твердження P(n) буде справедливе для будь-якого n.

Доведення. Припустимо, що умови лем 1 і 2 виконуються. Тоді твердження P(n) відповідно до леми 1 дійсне для n=k=1. Відповідно до другої леми P(n) дійсне для n=k+1=1+1=2. Але якщо P(n) дійсне для n=k=2, то відповідно до тієї самої другої леми воно буде дійсне і для n=k+1=2+1=3 і далі для n=4 і т.д. необмежено для всіх можливих n. Теорема доведена■

Із цього принципу випливає метод математичної індукції, що складається із виконання наведених нижче пунктів одержання твердження P(n):

1. Висувається нова гіпотеза у вигляді твердження P(n) про деяку математичну властивість, яка може бути як дійсною, так і хибною.

2. Перевіряється гіпотеза P(n) для n=1. Якщо P(n=1) підтверджується, то здійснюється перехід до наступного пункту 3. У протилежному випадку гіпотеза, що перевіряється, вважається невірною і здійснюється перехід до пункту 1.

3. Проводиться доведення гіпотези P(n) для n=k+1 при припущенні , що P(n=k) дійсне.

4. Якщо P(n=k+1) дійсне, то доведення гіпотези P(n) для будь-якого натурального n одержане. Якщо P(n=k+1) хибне, то здійснюється перехід до пункту 1.

Перший крок наведеного алгоритму являє собою звичайну (неповну) індукцію, яка реалізує індукційний підхід до науки в цілому.

Другий і третій кроки алгоритму є наслідком принципу математичної індукції та реалізують його практично. Принцип математичної індукції гарантує, що коли другий і третій кроки методу виконані, то твердження P(n) дійсне. При цьому другий крок засновується на лемі 1 і є основою (базою) методу математичної індукції, а третій - на лемі 2, яка визначає індукційний крок (перехід) методу.

На рис. 1 наведена блок-схема реалізації методу математичної індукції. Вона показує, що метод математичної індукції містить два основних блоки – блок, що реалізує основу індукції, і блок, що реалізує індукційний перехід.

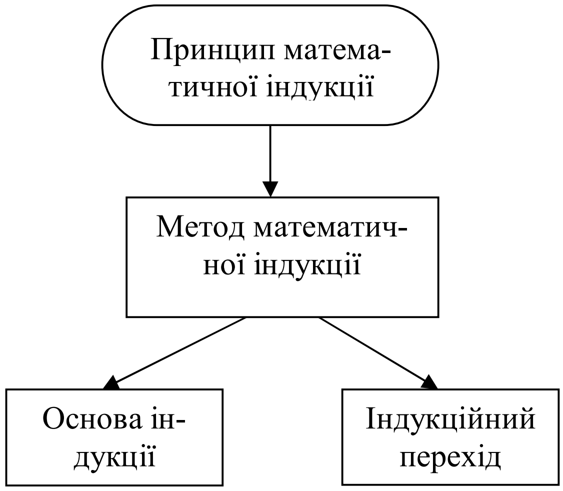


Рис.1. Блок-схема, яка реалізує принцип і метод математичної індукції

3. Приклади доведення методом математичної індукції.

Звернемо увагу ще раз на те, що основою методу математичної індукції є принцип математичної індукції, який твердить, що коли доведені леми 1 і 2 для твердження P(n), то це твердження дійсне для будь-якого n=1,2,… .

Тому завданням методу є доведення лем 1 і 2 для P(n).

Приклад 1. Знайти за допомогою методу математичної індукції формулу P(n), яка виражає собою непарні числа в їх упорядкованій послідовності 1, 3, 5, ... через їх номери n=1, 2, 3.

Перш ніж приступити до розв'язання цього прикладу, введемо деякі означення.

Означення 1. Непарним числом є число натурального ряду, що йде після парного.

Означення 2. Парним числом є число натурального ряду, що йде після непарного.

Означення 3. Одиниця є непарним числом.

Звернемо також увагу на те, що номери n послідовності непарних чисел утворюють натуральний ряд чисел.

Розв'язування. Із наведених означень виходить, що в ряді натуральних чисел непарне число відрізняється від непарного і парне від непарного на 1. Отже, різниця між двома непарними і парними числами, що стоять поряд, завжди дорівнює 2.

Оскільки, першим непарним числом у ряді натуральних чисел є 1, то послідовність непарних чисел можна одержати, додавши до 1 число 2, потім до отриманого результату знову число 2 і т.д. до нескінченності.

Аналізуючи початкові непарні числа натурального ряду 1, 3, 5,... шляхом неповної індукції, приходимо до гіпотези, що непарні числа натурального ряду можна одержати за допомогою виразу P(n)=2n-1. Дійсно для n=1 P(n=1)=2·1-1=1, для n=2 P(n=2)=2·2-1=3, n=3 P(n=3)=2·3-1=5.

Доведемо цю гіпотезу, провівши математичну (повну) індукцію за допомогою лем 1 і 2.

Лема 1. доводиться підстановкою 1 замість n в P(n): P(n=1)= 2·1-1=1.

Оскільки 1 за означенням 3 є непарне число, то основа індукції одержана.

Виконаємо індукційний крок (перехід), який складається із доведення леми 2.

Для цього припустимо, що при n=k твердження P(n)=P(n=k)=2k-1 дійсне.

Доведемо далі, що це твердження правильне і для наступного за порядком непарного числа з n=k+1:

P(n)=P(n=k+1)=2(k+1)-1.

З наведеної властивості непарних чисел різниця між непарними числами, що слідують одне за одним , P(n=k+1)- P(n=k)=2.

Виходить, що P(n=k+1)- P(n=k)+2=2k-1+2=2(k+1)-1.

Одержаний результат співпадає з потрібним і відповідно лема 2 є доведеною.

У результаті на основі доведень, одержаних для лем 1 і 2, та відповідно до принципу математичної індукції можна твердити, що вираз P(n)=2n-1 породжує послідовність непарних чисел натурального ряду. Тим самим упевнюємося, що вихідна гіпотеза P(n) є дійсним твердженням. Гіпотеза підтверджена■

Наслідок 1. Непарне число не ділиться націло на 2.

Дійсно, вираз 2n-1 при діленні на 2 дає такий результат:

$\frac{2n-1}{2}=n-\frac{1}{2}$. Залишок ½ є правильний дріб і тому ділення націло непарного числа неможливе.

Приклад 2. За допомогою методу математичної індукції знайти вираз P(n), який виражає собою парне число через його номер n=1, 2, … в упорядкованій послідовності парних чисел 2, 4, 6, ...

Відповідно до означень 1, 2 парними будуть числа натурального ряду, що стоять між непарними. Наприклад, число 2 є парним, оскільки стоїть між двома непарними числами 1 і 3, число 4 також парне, бо стоїть між непарними числами 3 і 5 і т.д.

Розв'язування. Оскільки парне число стоїть між двома непарними, то різниця між двома парними числами натурального ряду, що стоїть поряд , дорівнює 2. Першим парним числом буде 2, тому що це число йде після першого непарного - 1.

На основі аналізу перших парних чисел натурального ряду 2, 4, 6 приходимо до гіпотези, що P(n)=2n.

Основа повної індукції підтверджується тим, що P(n=1)=2·1=2.

Припустимо тепер, що гіпотеза P(n=k)=2k є правильною. Тоді залишається довести, що вона правильна і для P(n=k+1)=2(k+1).

Дійсно, в силу того, що парні числа, які стоять поряд, відрізняються на 2, то P(n=k+1)= P(n=k)+2=2k+2=2(k+1). Гіпотеза підтверджена■

Наслідок 2. Непарне число ділиться націло на 2.

Дійсно, тому що $\frac{2n}{2}=n$ і n – ціле число, то наслідок 2 підтверджений.

Наслідки 1 і 2 дозволяють сформулювати ознаки непарності та парності чисел натурального ряду.

Ознакою непарного числа є неможливість ділення його націло на 2.

Ознакою парного числа є ділення його націло на 2.

Приклад 3. Знайти вираз для суми перших n непарних чисел натурального ряду:

P(n)=1+3+ ...+(2n-1).

Розв'язування. На основі аналізу перших початкових чисел натурального ряду за допомогою неповної індукції приходимо до гіпотези, що $P(n)=n^2$.

Застосувавши метод математичної індукції , доведемо дану гіпотезу.

Відповідно до першого кроку методу, який доводить лему 1, одержимо, що $P(n=1)=n^2=1^2$.

Перейдемо до другого кроку доведення гіпотези.

Для цього припустимо відповідно до леми 2, що гіпотеза P(n) вірна для n=k. Тоді $P(n=k)=1+3+\ldots+(2k-1)=k^2$.

Доведемо тепер, що ця гіпотеза вірна і для

P(n=k+1)=1+3+…+(2k-1)+(2(k+1)-1).

Подамо для цього P(n=k+1) таким чином:

P(n=k+1)=P(n=k)+(2(k+1)-1).

Тоді, оскільки $P(n=k)=k^2$, $P(n=k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

Результат співпадає з необхідним. Гіпотеза підтверджена■

Приклад 4. Довести, що сума n перших чисел натурального ряду

$P(n)=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Розв'язування. У даному випадку неповну індукцію для висунення гіпотези P(n) проводити не потрібно, бо вона є в умові прикладу.

Приведемо доведення леми 1 для даного випадку:

$P(n=1)=\frac{1(1+1)}{2}=1$.

Таким чином, основа повної індукції одержана. Доведення леми 2 має такий вигляд. Нехай $P(n=k)=1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

Тоді відповідно має бути одержаний вираз

$P(n=k+1)=1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Доведемо це. Дійсно

P(n=k+1)= P(n=k)+(k+1)=$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Гіпотеза підтверджена■

<u>Приклад 5</u>. Довести, що сума квадратів перших чисел натурального ряду

$P(n)=1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

<u>Розв'язування.</u> У цьому прикладі, як і в прикладі 4, твердження P(n) задане у вигляді гіпотези, яка може перетворитися в дійсне твердження тільки після доведення леми 1 і 2.

Лема 1 доводиться підстановкою 1 замість n:

$P(n=1)=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{6}{6}=1=1^2$.

Для доведення леми 2 припустимо, як і в попередніх прикладах, що твердження P(n) у випадку n=k справедливе, тобто для даного прикладу

$P(n=k)=1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Доведемо, що справедливим буде також твердження

$P(n=k+1)=1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=P(n=k)+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Для цього покажемо, що $P(n=k+1)-P(n=k)=(k+1)^2$.

Дійсно, $P(n=k+1)-P(n=k)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}-\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=$

$=\frac{k+1}{6}[(k+2)(2k+3) - k(2k+1)]=\frac{k+1}{6}[2k^2+3k+4k+6-2k^2-k]=\frac{k+1}{6}[6k+6]=(k+1)^2$.

З цього випливає, що $P(n=k+1)=P(n=k)+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Гіпотеза підтверджена■

Особливо слід підкреслити, що для правильного використання методу математичної індукції обов'язково треба доводити обидві леми 1 і 2, оскільки лема 1 створює основу для проведення індукційних кроків у методі, що розглядається, а лема 2 дозволяє проводити вірний перехід від випадку з n=k до випадку з n=k+1, який іде за ним, що дозволяє необмежено розширяти кількість цих переходів.

Якщо лема 1 не доведена, тоді відсутня основа для проведення індукційних кроків. У результаті за допомогою леми 2 можна довести помилкову гіпотезу P(n).

Наприклад, потрібно довести гіпотезу P(n), яка стверджує, що n=n+1. Основа індукції в даному випадку відсутня, оскільки $1\neq 1+1$, тобто лема 1 не доведена.

Одночасно відповідно до леми 2 припустимо, що твердження P(n) для P(n=k) дійсне, тобто n=k+1. Виходячи із цієї умови, необхідно довести, що вірне й твердження P(n=k+1). Таким чином, треба довести, що k+1=k+2. Дійсно, підставивши в ліву і праву частину рівності n=n+1, n=k+1, одержимо, що k+1=(k+1)+1, тобто лема 2 виявляється доведеною.

Із цього помилкового доведення можна зробити висновок, що кожне число натурального ряду дорівнює числам, які ідуть за ним, і, отже, всі числа натурального ряду рівні між собою.

Але справа в тому, що в доведенні твердження P(n), що n=n+1, є груба помилка, яка складається з того, що лема 1 для n=1 не доведена. Доведення леми 2 не є достатнім.

У ряді випадків наведена форма доведення гіпотез методом математичної індукції може бути дещо змінена без порушення вірності доведення. Так, доведення леми 2 може спиратися не тільки на справедливість твердження P(n) для n=k, а й для n=k-1, а іноді справедливість P(n) припускається для всіх натуральних чисел $n \le k$.

Лема 1 може також доводитися, наприклад, для n=p. У цьому випадку дійсність доведення P(n) поширюється тільки на значення $n \ge p$.

4. Вправи для самостійної роботи

1. Довести, що сума квадратів n перших непарних чисел натурального ряду

$$P(n)=1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

2. Довести, що сума кубів n перших чисел натурального ряду

$$P(n)=1^3+2^3+\ldots+(n)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

3. Довести, що

$$P(n)=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

5. Довести, що

$P(n)=1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$, де $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$.

6. Довести, що

$$P(n)=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

7. Із 2n чисел 1,2,...,2n довільно обрані (n+1) чисел. Довести твердження P(n), що серед обраних чисел знайдуться хоча б 2 числа, з яких одне ділиться на друге.

8. Довести, що n різних прямих, проведених на площині через одну точку, ділять площину на 2n частин.

5. Історична довідка

Першим відомим ученим, який застосував метод математичної індукції в сучасному вигляді у 1575 році, був італійський учений Франческо Мауроліко. У XVII столітті цей метод був удосконалений П'єром де Ферма, який назвав його методом нескінченного спуску. Цей метод також використовував у своїх працях Блез Паскаль, зокрема, для доведення формули для біноміальних коефіцієнтів. Доведення працездатності методу математичної індукції, яке використовувалося Паскалем, представлено в цій роботі.

До цього часу за допомогою даного методу проведено безліч різних доведень математичних теорем і їх кількість безсумнівно буде зростати в майбутньому.

Додаток 4. Основні означення

ЕТИМОЛОГО-ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

Термін	Етимологія	Значення
1	2	3
абсолютний	лат. *absolutus* - необмежений, безумовний	безвідносний, досконалий, повний
алгебра	араб. *аль джебр* - відновлення	частина математики, наука про загальні операції над числами, багаточленами, векторами, матрицями тощо
аналогія	гр. *ἀναλογία* - відповідність, співрозмірність	подібність у будь-якому відношенні
асоціативний	лат. *associatio* - приєднання, об'єднання	сполучний
бієкція	лат. *bis* – двічі; *iacio* - кидати	взаємно однозначна відповідність множин
бінарний	лат. *binarius* - подвійний	двійковий
вектор	лат. *vektor* - той, що веде, несе	величина, що характеризується не лише числовим значенням, але й напрямком
графік	гр. *γραφίκός* – накреслений	зображення функції на координатній площині
диз'юнкція	лат. *disiunctio* - відокремлення, розділення	Логічна операція поєднання кількох висловлювань за допомогою логічного сполучника "АБО"
дистрибутивний	лат. *distributio* - розділення, розподіл	розподільний
діаграма	гр. *δίάγραμμα* - окреслення, рисунок	креслення, що наочно показує співвідношення між різними величинами, у вигляді відрізків або геометричних фігур
дуальний	лат. *dualis* - двоїстий	двоїстий, притаманний дуалізму
еквівалентність	лат. *aequus* – рівний;	рівноцінність, відповід-

	valens – той, що має силу, значення	ність чому-небудь у будь-якому відношенні
елемент	лат. *elementum* - першоречовина, стихія	складова частина будь-чого
ідемпотентність	лат. *idem* – той самий; *potens* – сильний, здатний	рівносильність, рівнозначність
ізоморфний	гр. *ίδομόρφος* - рівновидний, рівноформний	взаємно однозначний у відображенні двох множин при збереженні їхніх структурних властивостей
ідентичний	лат. *identicus*	тотожний, однаковий
імпліканта	лат. implicans - вплетений, оплетений, переплетений	логічна функція, що в т.ч. дорівнює 0 на тих наборах, де дорівнює 0 дана функція
імпліцента	лат. *implicens* - вплетений	логічна функція, що в т.ч. дорівнює 1 на тих наборах, де дорівнює 1 дана функція
імплікація	лат. *implicatio* - вплетення, переплетення, оплетення	логічна функція, що створює складне висловлювання з двох простих за допомогою логічної зв'язки "якщо...,то..."
інверсія	лат. *inversio* - перевертання, перестановка	логічна функція, що набирає значення, протилежне аргументу
індукція	лат. *inductio* - виведення	логічний прийом, що полягає в переході від окремих випадків до загального висновку
ін'єкція	лат. *iniectio* - вкидування	відображення **в**

1	2	3
інтуїція	лат. *intueor* – уважно приглядатися	безпосереднє осягнення істини без логічного обґрунтування на основі попереднього досвіду

коефіцієнт	лат. *coefficiens* – сприяючий	постійний множник при змінній (невідомій)
композиція	лат. *compositio* - складання	структура, побудова, послідовне використання
компонент	лат. *componens* - складова	складова частина будь - чого
комутативний	лат. *commuto* - переставляти, змінювати	переставний
константа	лат. *constans* - постійний	стала величина
конституента	лат. *constituens* - установлюючий	логічна функція, що установлює 1 (або 0) лише на одному своєму наборі
кон'юнкція	лат. *coniunctio* - з'єднання, зв'язок	логічна операція "І"
координата	лат. *co-(cum)* – разом, з *ordinatus* - упорядкований	величина, що визначає положення точки (вектора) у будь-якому просторі
кортеж	фр. *cortég* - урочистий хід, виїзд	упорядкований набір елементів
логіка	гр. *λογίκός* - розумний	наука про закони і форми мислення
модуль	лат. *modulus* - міра	абсолютна величина числа, основа системи числення
нейтральний	лат. *neutralius* - той, що не належить ні до того, ні до іншого	той, що не пристає до жодної з протилежних сторін
оператор	лат. *operator*-той, що діє	відображення між елементами множин
операція	лат. *operatio* - дія	будь-яка дія, у тому числі математична
проекція	лат. *proiectio* - кидання вперед	відображення будь-якого об'єкта на площину або пряму

1	2	3
раціональний	лат. *rationalis* - розумний	цілі і дробні числа, а також нуль
символ	гр. *δύμβολον* - знак,	умовне позначення

	ознака	будь-якої величини
симетричний	гр. *συμμετρία* - співрозмірність, належна пропорція	співрозмірний, який має властивість симетрії
система	гр. *σύστημα* - склад, упорядковане ціле	цілісне утворення, множина закономірно зв'язаних між собою у деяку єдність елементів
сюр'єкція	лат. *suriectio* - кидання зверху	відображення **на**
суперпозиція	лат. *superpositio* - спорудження	накладання, об'єднання в ціле різнорідних елементів
тривіальний	лат. *trivialis* - звичайний	звичний, неоригінальний
теорема	гр. *Θεωρημα* - видовище	твердження, істинність якого доводиться
універсальний	лат. *universalis* - загальний	загальний, різносторонній
універсум	лат. *universum* - всесвіт	загальна множина, для якої всі інші є підмножинами
формула	лат. *formula* - правило	математичне співвідношення, яке одержане з допомогою суперпозиції
функціонал	лат. *functio* - виконання	число, що є функцією від функції
функція	лат. *functio* - виконання	математична залежність однієї змінної від іншої

Додаток 5. Грецький і латинський алфавіти

Грецький алфавіт		Латинський алфавіт	
Позначення літери	Назва літери	Позначення літери	Назва літери
Α α	альфа	A a	а
Β β	бета	B b	бе
Γ γ	гамма	C c	це
Δ δ	дельта	D d	де
Ε ε	епсілон	E e	е
Ζ ζ	дзета	F f	еф
Η η	ета	G g	ге
Θ θ	тета	H h	аш
Ι ι	йота	I i	і
Κ κ	капа	J j	йот
Λ λ	лямбда	K k	ка
Μ μ	мю	L l	ель
Ν ν	ню	M m	ем
Ξ ξ	ксі	N n	ен
Ο ο	омікрон	O o	о
Π π	пі	P p	пе
Ρ ρ	ро	Q q	ку
Σ σ ς	сігма	R r	ер
Τ τ	тау	S s	ес
Υ υ	іпсілон	T t	те
Φ φ	фі	U u	у
Χ χ	хі	V v	ве
Ψ ψ	псі	X x	ікс
Ω ω	омега	Y y	ігрек
		Z z	зет

Список літератури

1. Александров П.С. Введение в теорию групп. – М: Наука, 1980. – 144 с.
2. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Е. Дискретна математи - ка: Підручник. – К.: Вища школа, 2002. – 287 с.
3. Борисенко А.А. Лекции по дискретной математике (множества и логика): Учеб. пособие для вузов, - Сумы, СумГУ,1998. – 136 с.
4. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной ма-тематике. – М.: Наука, 1977. – 367 с.
5. Горбатов В.А. Основы дискретной математики: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1986. – 311 с.
6. Калужнин Л.А., Сушанский В.И. Преобразования и перестановки: М.: Наука, 1979. – 112 с.
7. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1980. – 342 с.
8. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, матема тической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1975. – 240 с.
9. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1975. – 768 с.
10. Соминский И.С. Метод математической индукции. – М.: Наука, 1974. – 63 с.
11. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учеб. посо-бие для вузов. – М.: Наука, 1979. – 272 с.

ОСНОВИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА І

(МНОЖИНИ, ЛОГІКА ТА ТЕОРІЯ ГРУП)

ЧАСТИНА ІІ

(Логічні функції)

Навчальний посібник

Автор: Добровольський Юрій Миколайович

Підпис до друку 01.09.10р. Формат 60х84 1/16. Папір KumLux.

Ризографічний друк. Ум. друк. л. 6,5 Ум. кр.-отт. 6,55
Уч.-видавн. л. 6,6 Тираж 50 екз. Заказ № 24

ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»
83000, м. Донецьк, вул. Артема, 58