ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ОТРЕЗКАМИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Назаренко В.И., Иванов А.Ю.
Кафедра ЭВМ ДонГТУ
vn@cs.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Nazarenko V.I., Ivanov A.Y. Definition of the distance between two segments in threedimensionaI space. Task of definition of shortest distance between two segments in threedimensional space is described from the point of view of program realisation in CAD for designing the space constructions. The are formulated criterions of parallelism and intersection of lines, calculation the distance betv,>een of them, is defined the membership of point in segments of line.

Необходимость определения расстояния между двумя отрезками возникает в различных отраслевых САПР, выполняющих автоматизированное проектирование пространственных конструкций. Например, в САПР буровзрывных работ нормативными документами [1] жестко регламентируется минимально допустимое расстояние между шпуровыми зарядами взрывчатых веществ. В связи с этим рассмотрим в общей постановке задачу определения такого расстояния.

Будем считать, что нам заданы концевые точки *My* $(x_{m\{}$, *ущ*, Z_m^) и *Ny* $\{x_{П[}$, y_{nj}, z_{nj}) отрезка *\MyNy\,* принадлежащего прямой *Ly,* и концевые точки $M_2(x_{m2}, y_{m2}, z_m$^) и ^2(^{x}п$_2$'Уг>2'^{2}п2^ ^{от}Р^{езка} ^M_2N_2], принадлежащего прямой L_2. Параметрические уравнения прямых Ly и L_2 имеют вид f2]:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + l_1 t_1 \\ y &= y_1 + m_1 t_1 \\ z &= z_1 + n_1 t_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_2 + l_2 t_2 \\ y &= y_2 + m_2 t_2 \\ z &= z_2 + n_2 t_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здесь

$$x_1 = x_{m_1};\quad y_1 = y_{m_1};\quad z_1 = z_{m_1};\quad x_2 = x_{m_2};\quad y_2 = y_{m_2};\quad z_2 = z_{m_2};$$
$$l_1 = x_{n_1} - x_{m_1};\quad m_1 = y_{n_1} - y_{m_1};\quad z_1 = z_{n_1} - z_{m_1};$$
$$l_2 = x_{n_2} - x_{m_2};\quad m_2 = y_{n_2} - y_{m_2};\quad z_2 = z_{n_2} - z_{m_2}.$$

Направляющими векторами прямых *Ly* и L_2 являются:

$$\overline{L}_1 = \{l_1, m_1, n_1\} \text{ и } \overline{L}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}.$$

В частном случае прямые Ly и L_2 могут быть параллельны друг другу. Это имеет место, если коллинеарны их направляющие векторы *Ly* и L_2:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

Естественно, проверку отношений (3) необходимо выполнять с точностью ε, т.е.

$$\left(\left|\frac{l_2}{l_1}-\frac{m_2}{m_1}\right|<\varepsilon\right)\wedge\left(\left|\frac{l_2}{l_1}-\frac{n_2}{n_1}\right|<\varepsilon\right),$$

где ε -малоечисло(например, £-=0,001).

Предположим, что прямые *Li* и L_2 параллельны одной из осей координат, например, оси X. Тогда От] $=m_2$ =0, *щ* $=n_2$ =0, вследствие чего в программе будет сгенерировано прерывание из-за деления на нуль. Следовательно, отношение (3) из практических соображений нельзя использовать для проверки параллельности двух прямых. Вместо него целесообразно рассматривать направляющие косинусы прямой:

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\quad \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\quad \cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Тогда критерием параллельности двух прямых будет равенство с точностью ε их направляющих косинусов.

Если прямые L_i и L_2 параллельны, то для расчета расстояния между отрезками [AfiJV]] и \M2N2\ необходимо предварительно определить координаты точек пересечения *K*J и K_2 перпендикуляров, опущенных на прямую L_2 из точек *Mi* и *Ni*.

Уравнение перпендикуляра MiKi:

$$\left.\begin{array}{l} l_2(x-x_{m_1})+m_2(y-y_{m_1})+n_2(z-z_{m_1})=0 \\ \begin{vmatrix} x-x_{m_1} & y-y_{m_1} & z-z_{m_1} \\ x_2-x_{m_1} & y_2-y_{m_1} & z_2-z_{m_1} \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Здесь уравнение перпендикуляра записано в виде пересечения двух плоскостей.

Первое уравнение в системе (4), взятое отдельно, определяет плоскость, проведенную через точку *Mi* перпендикулярно прямой L_2, второе - плоскость, проведенную через точку *Mi* и прямую L_2.

Для определения координат точки пересечения *Ki* перпендикуляра с прямой L_2 достаточно использовать параметрические уравнения этой прямой и уравнение первой плоскости из системы (4):

$$\left.\begin{array}{l} x=x_2+l_2t_2 \\ y=y_2+m_2t_2 \\ z=z_2+n_2t_2 \\ l_2x+m_2y+n_2z+p=0 \end{array}\right\}, \qquad (5)$$

где $p=-(l_2x_{m_1}+m_2y_{m_1}+n_2z_{m_1})$.

Из (5)

$$t_2=\frac{l_2x_2+m_2y_2+n_2z_2}{l_2^2+m_2^2+n_2^2}$$

Подставив значение t_2 в параметрические уравнения (1) прямой L_2, получим координаты точки K_1.

Аналогичным образом определяем координаты точки K_2 пересечения перпендикуляра, опущенного из точки N_1 на прямую L_2. Для этого достаточно в систему уравнений (5) вместо координат точки M_i подставить координаты точки A^i_1.

Расстояние между параллельными прямыми Z_i и L_2

$$d(M_1,K_1)=\sqrt{(x_{m_1?}-x_{k_1})^2+(y_{m_1}-y_{k_1})^2+(z_{m_1}-z_{k_1})^2}$$

может быть принято в качестве кратчайшего расстояния $d_{m[n}$ между отрезками $[M_1A^i_1J$ и $[M_2TV_2]$ лишь в том случае, когда эти отрезки полностью или частично перекрывают друг друга. Такое перекрытие имеет место, если

- точка Ki расположена между точками M_2 и N_2 или
- точка K_2 расположена между точками M_2 и N_2 или
- точка M_2 расположенамеждуточками Ki и K_2 ($[M_2A_2]e[ЛГ|АГ_2]$).

В общем случае точка $P(x_p,y_p,z_p)$, лежащая на прямой L_p, расположена между точками $Pj(x],\_yj,ri)$ и $P_2(x_2,y_2,z_2)$ отрезка $[P|P_2]єi_2$, если

при $| x_2 - x\backslash | > \varepsilon$ имеет место $(X_1 - x_p)(x_p - x_2) > 0$ или

при $| y_2 - yi | > \varepsilon$ имеет место $(yi - y_p)(y_p - y_2) > 0$ или

при $| z_2 - Z_1 | > \varepsilon$ имеет место $(Z_1 - z_p)(z_p - z_2) > 0$.

Если отрезки $[M_1A^r_1]$ и $[M_2N_2]$ перекрывают друг друга, то кратчайшее расстояние между ними - это длина перпендикуляра $d(M_i, \hat{}_1)$, в противном случае следует определить минимальноеизрасстоянийместочками M_1 и M_2, Mj и $A^i_{2j}A^i_1$ и $M_{2j}A_1$ и N_2:

$$d_{\min}=\min(d(M_1,M_2),d(M_1,N_2),d(N_1,M_2),d(N_1,N_2)).$$

Если отрезки $[M_1A^i_1\mathbf{J}$ и $[M_2A^i_2\mathbf{J}$ не параллельны, то для нахождения минимального расстояния между ними необходимо сформировать уравнение общего перпендикуляра к прямьм Z_1 и L_2, предварительно вычислив векторное произведение $L = Z_1 \times Z_2 = \{l,m,n\}$, где

$$l=\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}; \qquad m=\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}; \qquad n=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}.$$

В этом случае вектор L определяет направление прямой, которая перпендикулярна к обоим прямым Ly и L_2.

Уравнение общего перпендикуляра представим в виде пересечения двух плоскостей:

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} &= 0 \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Первое уравнение в системе (6), взятое отдельно, определяет плоскость, проходящую через прямую Li параллельно вектору L, второе - плоскость, проходящую через прямую L_2 параллельно тому же вектору L.

Общее уравнение первой плоскости из (6):

$$d_1(x-x_1)+d_2(y-y_1)+d_3(z-z_1),$$

где

$$d_1=\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m & n \end{vmatrix}; \qquad d_2=\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n & l \end{vmatrix}; \qquad d_3=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l & m \end{vmatrix}.$$

После преобразований получим:

$$d_1x+d_2y+d_3z+p_1=0, \qquad (?)$$

где $p_1=-(d_1x_1+d_2y_1+d_3z_1)$.

Аналогично для второй плоскости

$$d_4x+d_5y+d_6z+p_2=0, \qquad (8)$$

где

$$d_4=\begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m & n \end{vmatrix}; \qquad d_5=\begin{vmatrix} n_2 & l_2 \\ n & l \end{vmatrix}; \qquad d_6=\begin{vmatrix} l_2 & m_2 \\ l & m \end{vmatrix};$$

$$p_2=-(d_4x_2+d_5y_2+d_6z_2).$$

Координаты точки *K* пересечения перпендикуляра и прямой *L* получаем из совместного решения уравнений (1) и (7), координаты точки K_2 пересечения перпендикуляра и прямой L_2 - из совместного решения уравнений (2) и (8).

Если точка *K\&[MγNγ],* а точка *K_2e[M_2N_2],* то кратчайшее расстояние между рассматриваемыми отрезками - это длина перпендикуляра, т.е. расстояние между точками *K* и K_2. В противном случае необходимо определить минимальное из расстояний между точками *M* и M_2, *M* и N_2, *N* и M_2, *Ni и* N_2 .

Литература

1. Единые праеwia безопасности при взрывных работах. - Киев: Норматив, 1992. -171с.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. - М.: Наука/Физматлит РАН, 1999. - 224 с.