

## ТРАНСПОРТ

---

---

УДК 539.3+620.178.15

Вовк Л.П., д.т.н., Жмайло Ю.А., студент

АДИ «ГВУЗ» ДонНТУ, г. Горловка

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ДИНАМИЧЕСКОГО КОНТАКТИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

*Рассматриваются математические аспекты решения пространственной динамической задачи контактирования цилиндрических деталей машин. Приведена модификация метода суперпозиции, позволяющая провести аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния и дать практические рекомендации по оценке интенсивности локальной концентрации напряжений в нерегулярных зонах контакта, что практически предопределяет прочностные параметры контактной пары. В качестве численного эксперимента рассмотрены механические характеристики взаимодействия поршневых пальцев двигателей внутреннего сгорания с головкой шатуна и бобышками поршня.*

#### **Введение**

Детали, воспринимающие контактные нагрузки, как правило, являются одними из наиболее ответственных, и от их прочности зависит работоспособность и надежность всего механизма в целом. Однако при рассмотрении систем контактирующих тел механическими явлениями в зоне контакта зачастую пренебрегают, проводя упрощение и схематизацию усилий, действующих на детали механизма. Такие упрощения могут приводить к неверным результатам, так как в большинстве реальных механизмов закон распределения контактных давлений оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние (НДС) механизма или конструкции в целом. В связи с этим возникает необходимость исследования НДС деталей механизма в местах их контактного взаимодействия при произвольной площадке контакта, размеры которой зависят от приложенных нагрузок.

Теоретические исследования в этой области сопряжены с решением краевых задач нестационарной динамики со смешанными граничными условиями. Одним из наиболее эффективных является аналитический подход, предложенный в [1] и развитый в работе [2]. В соответствии с этим подходом решение упругопластической задачи получают на основе комбинации решений упругой и жестко-пластической задач. Такой подход базируется на принципе Герстнера, при котором общее перемещение можно представить в виде суммы упругой и пластической составляющих, рассматриваемых независимо.

Упругое поведение большинства конструкционных материалов играет важную роль в деформационном процессе, особенно когда зона пластических деформаций мала. Решение контактных задач при упругопластическом деформировании в основном проводится на основе численных схем. Разработка аналитических подходов возможна при введении ряда гипотез [1,2] или эмпирических коэффициентов [3]. В последние годы широкое распространение при решении упругопластических задач получили численные методы, среди которых наиболее универсальным является метод конечного элемента.

Несмотря на большое количество работ, посвященных данной тематике, исследователи вынуждены практически повсеместно моделировать одно из контактирующих тел бесконечной или полубесконечной областью, что дает возможность применения при аналитическом решении методики интегральных преобразований [4], понижающей размерность задачи. Кроме того, существенным упрощением следует признать тот факт, что неограниченное тело моделируется областью с прямолинейной границей (полупространство, слой). Такой

подход, хотя и дает возможность математического анализа исходной краевой задачи, однако может быть уместен лишь в случае малой области контакта по сравнению с размерами контактирующих тел (точечный контакт). При анализе НДС деталей машин и особенно деталей двигателей внутреннего сгорания (ДВС) такая разновидность контакта встречается крайне редко. Поэтому проблему построения и решения математической модели динамической пространственной задачи контактирования упругих цилиндрических деталей конечных размеров следует признать актуальной.

### **Цель работы**

В настоящее время разработано два подхода к решению граничных задач динамической теории упругости для тел конечных размеров. Один из них, метод однородных решений [5,6], нашел применение в плоской задаче теории упругости, в теории тонких и толстых плит. Решение задачи находится с помощью однородных решений, которые являются интегралами основных уравнений теории упругости и удовлетворяют нулевым граничным условиям на части поверхности тела, совпадающей с одной из координатных поверхностей. Во втором подходе, развитом в [6–8], решение задачи представляется в виде суперпозиции нескольких последовательных частных решений, обладающих конкретными свойствами симметрии. При этом предполагается, что поверхность упругого тела образована частями координатных поверхностей разных семейств в декартовой, цилиндрической или сферической системах координат. Метод суперпозиции наиболее приспособлен для решения двумерных динамических задач теории упругости, что существенно снижает области его применения.

Целью данной работы служит построение алгоритма метода суперпозиции, свободного от предположений раздельного рассмотрения волновых движений с различными типами симметрии относительно срединной плоскости цилиндра, распространения этого метода на трехмерные области с криволинейной границей и применения разработанной схемы для численно-аналитического расчета полей контактных напряжений в поршневом пальце (ПП) ДВС.

### **Основная часть**

**Постановка задачи.** Пусть ПП, моделируемый конечным полым цилиндром, занимает в цилиндрической системе координат область

$$D: -H \leq z \leq 0 \cup b \leq R \leq a \cup 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Предполагаем, что материал цилиндра характеризуется упругими параметрами  $\rho$  (плотность),  $\lambda$ ,  $\mu$  (коэффициенты Ляме). Пусть вдоль границы области заданы следующие граничные условия в напряжениях ( $\omega$  – круговая частота виброн нагружения):

$$\begin{aligned} R = a: & \quad \sigma_R = f_1^+(\phi, z)e^{-i\omega t}, \quad \tau_{Rz} = f_2^+(\phi, z)e^{-i\omega t}, \quad \tau_{R\phi} = f_3^+(\phi, z)e^{-i\omega t}; \\ R = b: & \quad \sigma_R = f_1^-(\phi, z)e^{-i\omega t}, \quad \tau_{Rz} = f_2^-(\phi, z)e^{-i\omega t}, \quad \tau_{R\phi} = f_3^-(\phi, z)e^{-i\omega t}; \\ z = -H: & \quad \sigma_z = \varphi_1(R, \phi)e^{-i\omega t}, \quad \tau_{Rz} = \varphi_2(R, \phi)e^{-i\omega t}, \quad \tau_{\phi z} = \varphi_3(R, \phi)e^{-i\omega t}; \\ z = 0: & \quad \sigma_z = \varphi_4(R, \phi)e^{-i\omega t}, \quad \tau_{Rz} = \varphi_5(R, \phi)e^{-i\omega t}, \quad \tau_{\phi z} = \varphi_6(R, \phi)e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Движение среды описывается уравнениями линейной теории упругости в смещениях, связь компонент векторов напряжений и деформаций определяется соотношениями закона Гука в цилиндрической системе координат [6].

Решение сформулированной краевой задачи строим с использованием принципа суперпозиции, используя тот факт, что данная область является пересечением подобластей  $D_1: a \leq R \leq b$  и  $D_2: -H \leq z \leq 0$ . Вектор смещения  $\vec{U}(R, \phi, z)$  в области  $D_1 \cup D_2$  ищем в виде

суммы векторов  $\vec{U}(R, \phi, z) = \vec{u}_1(R, \phi, z) + \vec{u}_2(R, \phi, z)$ , определяющих решения вспомогательных задач для бесконечного цилиндрического слоя ( $D_1 - \vec{u}_1$ ) и слоя с плоскопараллельными границами ( $D_2 - \vec{u}_2$ ).

**Решение вспомогательной задачи для бесконечного цилиндрического слоя.** С этой целью рассмотрим установившиеся гармонические колебания области  $D_1 : a \leq R \leq b$  при следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} R = a : \sigma_R = X_1^+(\phi, z)e^{-i\omega t}, \tau_{Rz} = X_2^+(\phi, z)e^{-i\omega t}, \tau_{R\phi} = X_3^+(\phi, z)e^{-i\omega t}; \\ R = b : \sigma_R = X_1^-(\phi, z)e^{-i\omega t}, \tau_{Rz} = X_2^-(\phi, z)e^{-i\omega t}, \tau_{R\phi} = X_3^-(\phi, z)e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Функции напряжений  $X_j^\pm$ , вообще говоря, неизвестны, но в рамках постановки вспомогательной задачи предполагаем их заданными и принадлежащими к классу суммируемых вдоль всей границы рассматриваемой подобласти. На бесконечности задаются условия излучения энергии колебаний. Эти предположения являются естественными и необходимы для корректного использования при решении задачи методики интегральных преобразований Фурье [4]. В результате достаточно сложных и громоздких выкладок получено следующее представление для компонент вектора перемещений  $\vec{u}_1(R, \phi, z) = \{u_{11} = u_{R1}, u_{21} = u_{\phi 1}, u_{31} = u_{z1}\}$

$$\begin{aligned} u_{k1} = \frac{a}{2\pi\mu} \int_{\Gamma} \{\tilde{u}_{k1}(R, \phi, \alpha)\} \exp[i\alpha z] d\alpha, \quad \tilde{u}_{k1}(R, \phi, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^3 [G_{jn}^{(k1)}(R, \alpha, \omega) A_{jn}(\alpha, \omega) + \\ + G_{jn}^{(k2)}(R, \alpha, \omega) B_{jn}(\alpha, \omega)] \Delta_n^{-1}(\alpha, \omega) \exp(in\phi). \end{aligned} \quad (3)$$

Вид контура интегрирования  $\Gamma$  в комплексной плоскости  $\alpha$  определяется использованием принципа предельного поглощения при удовлетворении условиям излучения на бесконечности [9] и имеет следующий вид: обходит положительные особенности подынтегральной функции снизу, отрицательные – сверху, а на остальной части совпадает с вещественной осью. Функции  $A_{jn}(\alpha, \omega)$ ,  $B_{jn}(\alpha, \omega)$  определяются при удовлетворении выражениями (3) граничным условиям (2),  $G_{jn}^{(k1)}(R, \alpha, \omega)$ ,  $G_{jn}^{(k2)}(R, \alpha, \omega)$ ,  $\Delta_n(\alpha, \omega)$  имеют довольно громоздкую структуру, например,

$$\begin{aligned} G_{jn}^{(11)}(R, \alpha, \omega) &= \alpha \left[ J_n \left( R \sqrt{\theta_j^2 - \alpha^2} \right) \right]_{\alpha}^{\prime}, \quad j = 1, 2; \\ G_{3n}^{(11)}(R, \alpha, \omega) &= \frac{i n \alpha}{R} J_n \left( R \sqrt{\theta_2^2 - \alpha^2} \right) = G_{2n}^{(21)}(R, \alpha, \omega); \\ G_{1n}^{(21)}(R, \alpha, \omega) &= \frac{i n \alpha}{R} J_n \left( R \sqrt{\theta_1^2 - \alpha^2} \right); \quad G_{3n}^{(21)}(R, \alpha, \omega) = -\alpha G_{2n}^{(11)}(R, \alpha, \omega); \\ G_{1n}^{(31)}(R, \alpha, \omega) &= -i \alpha^2 J_n \left( R \sqrt{\theta_1^2 - \alpha^2} \right); \quad G_{3n}^{(31)}(R, \alpha, \omega) = 0; \\ G_{2n}^{(31)}(R, \alpha, \omega) &= i \left( \theta_2^2 - \alpha^2 \right) J_n \left( R \sqrt{\theta_2^2 - \alpha^2} \right); \\ \theta_1^2 &= \frac{\rho \omega^2 a^2}{\mu}, \quad \theta_2^2 = \frac{\rho \omega^2 a^2}{\lambda + 2\mu} \text{ и т. п.} \end{aligned} \quad (4)$$

Обезразмеривание линейных координат проводится делением на величину  $a$  — внутренний радиус цилиндра. Соотношения, определяющие представления для  $G_{jn}^{(k2)}(R, \alpha, \omega)$ ,

получаем из выражений для  $G_{jn}^{(k1)}(R, \alpha, \omega)$  заменой во всех выражениях функций Бесселя  $J_n(Z)$  на функции Неймана  $N_n(Z)$ .

При подстановке представлений (3) в граничные условия (2) с использованием соотношений закона Гука в цилиндрической системе координат в преобразованиях Фурье по координате  $z$  с разложением всех заданных и неизвестных функций в ряд Фурье по координате  $\phi$  получаем для каждого значения параметра  $n$  систему шести функциональных уравнений для определения неизвестных функций  $A_{jn}(\alpha, \omega)$ ,  $B_{jn}(\alpha, \omega)$ . Численные значения этих коэффициентов при заданных значениях параметров проще получить, реализуя численный алгоритм их определения непосредственно на ЭВМ. Точность получаемых при этом результатов не ниже, чем при расчете по аналитическим представлениям.

Итоговое представление решений этой задачи имеет вид (3), где

$$\tilde{u}_{kj}(R, \phi, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^3 [\Phi_{jn}^{(k+)}(R, \alpha, \omega) \bar{X}_{jn}^{(+)}(\alpha) + \Phi_{jn}^{(k-)}(R, \alpha, \omega) \bar{X}_{jn}^{(-)}(\alpha)] \exp(in\phi). \quad (5)$$

$$\text{Здесь } \bar{X}_{jn}^{(\pm)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_j(z, \phi) \exp[-i(n\phi + \alpha z)] dz d\phi.$$

При исследовании реализована схема аналитико-численного алгоритма построения подынтегральных функций. В ней использованы аналитические представления (3), (4). Дальнейшие расчеты, связанные с решением систем линейных алгебраических уравнений для определения значений функций  $\Phi_{jn}^{(k\pm)}(R, \alpha, \omega)$  при заданных значениях параметров проводятся непосредственно на ЭВМ.

**Решение вспомогательной задачи для бесконечного слоя с плоскопараллельными границами.** Рассмотрим задачу об установившихся гармонических колебаниях области  $D_2$ :  $x, y \in (-\infty, +\infty)$ ;  $-H \leq z \leq 0$  при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} z = -H: \quad \sigma_z &= Y_1(x, y) e^{-i\omega t}, \quad \tau_{xz} = Y_2(x, y) e^{-i\omega t}, \quad \tau_{yz} = Y_3(x, y) e^{-i\omega t}; \\ z = 0: \quad \sigma_z &= Y_4(x, y) e^{-i\omega t}, \quad \tau_{xz} = Y_5(x, y) e^{-i\omega t}, \quad \tau_{yz} = Y_6(x, y) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (6)$$

На бесконечности задаем условия излучения энергии колебаний. Решение задачи строим методом интегральных преобразований с использованием принципа предельного поглощения [9]. В результате получаем следующее представление для амплитудной функции вектора смещения  $\bar{u}_2(x, y, z) = \{u_{12}, u_{22}, u_{32}\}$

$$u_{j2}(x, y, z) = \frac{a}{4\pi^2 \mu} \iint_{\Gamma} \tilde{u}_{j2}(\gamma, \beta, z) \exp[i(\gamma x + \beta y)] d\gamma d\beta. \quad (7)$$

$$\text{Здесь } \tilde{u}_{j2}(\gamma, \beta, z) = \sum_{k=1}^6 L_{jk}(\gamma, \beta, z) \bar{Y}_k(\gamma, \beta), \quad j = 1, 2, 3;$$

$$\begin{aligned} L_{11}(\gamma, \beta, z) &= \frac{i\beta}{\mu u^2 \Delta_1(u)} [(u^2 + \sigma_2^2)^2 2(ch \sigma_1 z - ch \sigma_1(H-z) ch \sigma_2 H) + \\ &+ 8u^2 \sigma_1 \sigma_2 sh \sigma_2 H sh \sigma_1(H-z) + 4u^2 (u^2 + \sigma_2^2) (ch \sigma_2 z - ch \sigma_2(H-z) ch \sigma_1 H) + \\ &+ (\sigma_1 \sigma_2)^{-1} (u^2 + \sigma_2^2)^3 sh \sigma_1 H sh \sigma_2(H-z)]; \end{aligned}$$

$$L_{12}(\gamma, \beta, z) = \frac{i\gamma}{\mu u^2 \Delta_1(u)} [(u^2 + \sigma_2^2)^2 2(ch \sigma_1 z - ch \sigma_1(H-z) ch \sigma_2 H) + \\ + 8u^2 \sigma_1 \sigma_2 sh \sigma_2 H sh \sigma_1(H-z) + 4u^2 (u^2 + \sigma_2^2)^2 (ch \sigma_2 z - ch \sigma_2(H-z) ch \sigma_1 H) + \\ + (\sigma_1 \sigma_2)^{-1} (u^2 + \sigma_2^2)^3 sh \sigma_1 H sh \sigma_2(H-z)] \dots,$$

$$u^2 = \gamma^2 + \beta^2; \quad \sigma_j^2 = u^2 - \theta_j^2; \quad \theta_j = \frac{\omega a}{V_j}; \quad V_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}; \quad V_2^2 = \frac{\mu}{\rho};$$

$$\Delta_1(u) = 8(u^2 + \sigma_2^2)^2 (ch \sigma_1 H ch \sigma_2 H - 1) - [(u^2 + \sigma_2^2)^4 u^{-2} + 16u^2 (\sigma_1^2 \sigma_2^2)] (\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}) sh \sigma_1 H sh \sigma_2 H;$$

$L_{k(j+3)}(\gamma, \beta, z)$ ,  $j=1, 2, 3$ , получаем из  $L_{kj}(\gamma, \beta, z)$ , меняя во всех формулах  $z$  и  $H-z$  местами,

$$\bar{Y}_k(\gamma, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_k(x, y) \exp(-i[\gamma x + \beta y]) dx dy.$$

Полученные соотношения позволяют проводить расчет амплитудных характеристик вектора смещения в слое при заданных на его гранях напряжениях  $Y_k(x, y) \exp(-i\omega t)$ .

**Система интегральных уравнений пространственной динамической задачи для конечного цилиндра при однородных граничных условиях.** Рассмотрим исходную краевую задачу о возбуждении колебаний в конечном цилиндрическом слое в пространственной постановке (граничные условия (1)). В соответствии с принципом суперпозиции решение ищем в виде суммы решений вспомогательных краевых задач для бесконечного цилиндрического слоя с граничными условиями (2) и плоскопараллельного слоя (граничные условия (6)):

$$\bar{u}(x, y, z) = \bar{u}_1(x, y, z) + \bar{u}_2(R, \phi, z). \quad (8)$$

Представления для компонент векторов  $\bar{u}_j$  определены соотношениями (3), (4), (5) — для  $\bar{u}_1$  и (7) для  $\bar{u}_2$ . Связь цилиндрических и декартовых координат определена соотношениями  $R^2 = x^2 + y^2$ ;  $\phi = \arctg \frac{y}{x}$ ;  $z = z$ . При этом необходимо учитывать, что вектор смещений  $\bar{u}(x, y, z) = \bar{u}(R, \phi, z)$  может быть представлен в декартовых и цилиндрических координатах.

Функции напряжений, определенные граничными условиями вспомогательных краевых задач, вообще говоря, неизвестны. Для их определения используем граничные условия исходной краевой задачи (1) и соотношения закона Гука в цилиндрических и декартовых координатах [6]. В результате получаем систему двенадцати интегральных уравнений относительно двенадцати неизвестных функций напряжений  $X_j^{(\pm)}(\phi, z)$ ,  $Y_n(x, y)$ , ( $j=1, 2, 3$ ;  $n=1, 2, \dots, 6$ ), определяющих граничные условия вспомогательных задач, которая имеет следующую структуру

$$X_{jm}^{(+)}(z) + \frac{a}{4\pi^2 \mu} \iint_{\Gamma} \sum_{k=1}^6 Q_{kmj}(\gamma, \beta, \omega, z) \bar{Y}_k(\gamma, \beta) \exp[i(\gamma x^* + \beta y^*)] d\gamma d\beta + \\ + \frac{a}{2\pi \mu} \int_{\Gamma} \sum_{l=3}^6 [\Phi_{ljm}^{\circ}(\alpha, \omega) \bar{X}_{lm}^{(-)}(\alpha)] \exp[i\alpha z] d\alpha = f_{jm}^{(+)}(z); \quad j=1, 2, 3; \quad m=1, 2, 3, \dots;$$

$$\begin{aligned}
& X_{jm}^{(-)}(z) + \frac{a}{4\pi^2\mu} \iint_{\Gamma} \sum_{k=1}^6 Q_{km(j+3)}(\gamma, \beta, \omega, z) \bar{Y}_k(\gamma, \beta) \exp[i(\gamma x^* + \beta y^*)] d\gamma d\beta + \\
& + \frac{a}{2\pi\mu} \int_{\Gamma} \sum_{l=3}^6 [\Phi_{l(j+3)m}^{\circ}(\alpha, \omega) \bar{X}_{lm}^{(-)}(\alpha)] \exp[i\alpha z] d\alpha = f_{jm}^{(-)}(z); \\
& Y_n(x, y) + \frac{a}{2\pi\mu} \int_{\Gamma} \sum_{l=1}^3 [\Phi_{nl}^{(1)}(\alpha, R^*, \phi^*, \omega) \bar{X}_{lm}^{(+)}(\alpha) + \\
& + \Phi_{nl}^{(2)}(\alpha, R^*, \phi^*, \omega) \bar{X}_{lm}^{(-)}(\alpha)] \exp[i\alpha z] d\alpha + \\
& + \frac{a}{4\pi^2\mu} \iint_{\Gamma} \sum_{k=1}^6 \Psi_{nk}(\gamma, \beta, \omega, z) \bar{Y}_k(\gamma, \beta) \exp[i(\gamma x^* + \beta y^*)] d\gamma d\beta = \Phi_n(x, y); \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
f_{jm}^{(\pm)}(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_j^{(\pm)}(z, \phi) \exp[-i(m\phi)] d\phi; \\
X_{jm}^{(\pm)}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_j^{(\pm)}(z, \phi) \exp[-i(m\phi)] d\phi; \\
X_j^{(\pm)}(z, \phi) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_{jm}^{(\pm)}(z) \exp[i(m\phi)]; \\
x^* &= R \cos \phi; \quad y^* = R \sin \phi; \quad R^* = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \phi^* = \arctg \frac{y}{x}.
\end{aligned} \tag{10}$$

**Система интегральных уравнений пространственной динамической контактной задачи для поршневого пальца.** При постановке контактной задачи предполагается, что на части поверхности цилиндра заданы компоненты вектора смещения, а на остальной части – компоненты вектора напряжения. Рассмотрим случай, когда на внешней поверхности цилиндра  $R = a$  в области  $\Omega: \phi \in [-\phi_0, \phi_0] \cup z \in [h_1, h_2]$  заданы компоненты вектора смещения, например  $u_R(\phi, z) = U(z, \phi)$ . При контакте без трения касательные напряжения в области  $\Omega$  полагаем равными нулю ( $f_2^{(+)} = f_3^{(+)} = 0$ ). Нормальные усилия в области контакта ( $f_1^{(+)}(R, \phi)$ ) неизвестны и подлежат определению. Следовательно, в системе (9) имеем 12 уравнений с 13 неизвестными. Для определения дополнительного неизвестного (нормального контактного давления  $f_1^{(+)}(R, \phi)$ ) используем условие равенства компоненты смещения поверхности цилиндра в области  $\Omega$  –  $u_R(\phi, z)$  смещению подошвы штампа  $U(z, \phi)$ . Это дополнительное уравнение имеет следующую структуру

$$u_R = u_{11}(a, \phi) + \sqrt{u_{12}^2(a \cos \phi, a \sin \phi, z) + u_{22}^2(a \cos \phi, a \sin \phi, z)} = U(z, \phi), \tag{11}$$

где  $u_{11}$  определяется соотношениями (3) – (5);  $u_{12}, u_{22}$  – соотношениями (7). В результате правая часть (11) является интегральным оператором от неизвестных функций напряжений  $X_j, Y_j$ . Получаемое интегральное уравнение замыкает систему (9). Алгоритм получения представлений интегральных операторов достаточно прост при матричной записи. Однако при его реализации аналитические представления для подынтегральных функций операторов системы чрезвычайно громоздки и труднообозримы. Для исследования и построения решения систем предложено пользоваться численными методами, позволяющими производить

расчет значений подынтегральных функций при фиксированных значениях параметров. Для заданных функций напряжений разработаны алгоритмы и программы расчета интегральных представлений, определяющих операторы системы.

**Методика решения систем интегральных уравнений.** Для разработки методики построения решения полученных выше систем интегральных уравнений необходим анализ свойств операторов систем. Исследование алгоритма построения и общих свойств операторов системы (9) подтверждает их непрерывность вдоль всей границы области, за исключением окрестности угловых точек. При этом можно показать, что в случае, когда нагрузка приложена на некотором удалении от этих точек, коэффициент при особенности решения равен нулю [9]. При постановке контактной задачи дополнительное уравнение для определения закона распределения контактных напряжений (11) является уравнением первого рода, свойства оператора которого аналогичны свойствам оператора соответствующей контактной задачи для бесконечного цилиндра. Следовательно, контактные напряжения имеют корневую особенность вдоль границы зоны контакта.

Анализ возможностей различных методов построения решения систем интегральных уравнений при данных исходных определяет целесообразность использования комплекса методов построения ее решения для различных частотных диапазонов. В частности, для относительно низкочастотных колебаний (длина волны гораздо больше размеров конечного цилиндра) можно достаточно эффективно использовать аппроксимационный подход с использованием метода коллокаций. При этом алгоритм построения приближенного решения систем сводится к следующему. Так как все неизвестные функции напряжений заданы в ограниченных областях, вводится их аппроксимация в виде конечного отрезка разложения в ряд по ортогональной системе функций с неопределенными коэффициентами и учетом порядка особенности (при ее наличии у данной функции). При этом важно, чтобы ортогональная система функций была такова, что при подстановке аппроксимации в уравнение представлялась возможность точного вычисления наибольшего количества интегралов в операторах, что повышает точность определения коэффициентов линейной алгебраической системы, получаемой при использовании метода коллокаций.

Анализ особенностей строения данной системы определяет целесообразность использования разложения функций  $X_k^\pm, Y_j$  в степенной ряд по координатам  $R, z$  и в ряд по тригонометрическим функциям (или  $\exp(in\phi)$ ) по угловой координате. При определении функций  $Z_j(z, \phi)$  целесообразно выбрать аппроксимирующий полином следующей структуры

$$Z(z, \phi, \omega) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N C_{ij}(\omega) T_i(h_k z) T_j(\phi_0 \phi) / \sqrt{(h_k^2 - z^2)(\phi_0^2 - \phi^2)}; \quad k = 1, 2,$$

где  $C_{ij}(\omega)$  — неопределенные постоянные,  $T_i(z), T_j(\phi)$  — полиномы Чебышева. Подобное представление точным образом учитывает особенность контактных напряжений вдоль кромки штампа. Использование в разложении полиномов Чебышева определено их ортогональностью на требуемом отрезке с весом  $\sqrt{(h_k^2 - z^2)}$  или  $\sqrt{(\phi_0^2 - \phi^2)}$ .

**Численные результаты.** Рассмотрим приложение разработанной выше численно-аналитической методики к уточненному расчету полей контактных напряжений в деталях цилиндрично-поршневой группы ДВС. Анализ проведем двумя способами: 1) при помощи метода конечных элементов; 2) с помощью решения системы интегральных уравнений с выделением математической особенности механических характеристик в нерегулярных точках области контактирования. В качестве основной расчетной модели был выбран ПП 406.1004020-01 для двигателей марок ЗМЗ-4061.10, ЗМЗ-4062.10 и ЗМЗ-4063.10, шатун в сборе 24-1004045-02 с втулкой 406-1004052-10, поршень ЗМЗ 523-1004014.

При реализации первого способа воспользуемся методикой работы [10]. В связи с тем, что точное распределение контактных напряжений между ПП и бобышкой, между головкой шатуна и ПП неизвестно и подлежит определению, в зоне контакта моделировали сетку контактных элементов (общим количеством до 36000). Взаимодействие деталей должно удовлетворять условиям контактирования, в соответствии с которыми точки одного тела не должны проникать внутрь другого.

Для обнаружения условий проникновения задаются контактные узлы, а на поверхности поршневого пальца – контактные элементы. Вместе они образуют контактную пару. Контактный узел, попадая на поверхность контактного элемента, скользит вдоль нее с коэффициентом трения  $\mu$ . При вычислении контактных сил использовался известный метод штрафных функций.

Результаты решения динамической задачи представлены в виде полей напряжений, деформаций и перемещений деталей поршневой группы. На рис. 1 и 2 показаны нормальные напряжения  $\sigma_y, \sigma_x$ , соответствующие пятой моде колебаний и действующие в глобальных направлениях  $Y, X$  в принятой системе координат.

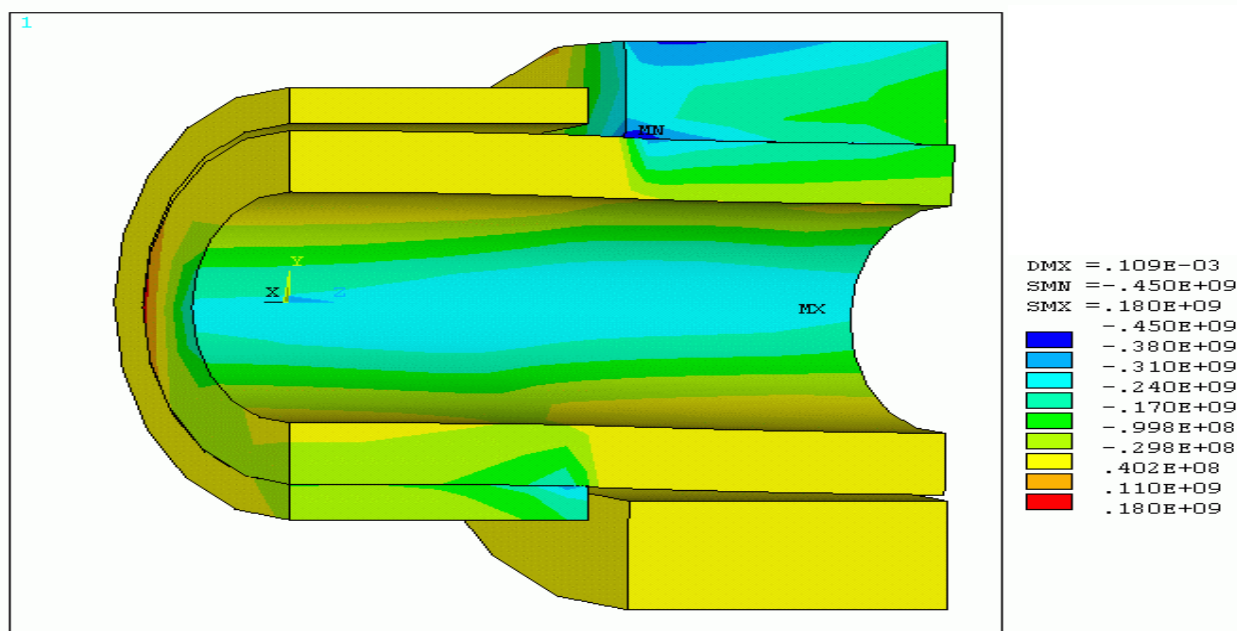


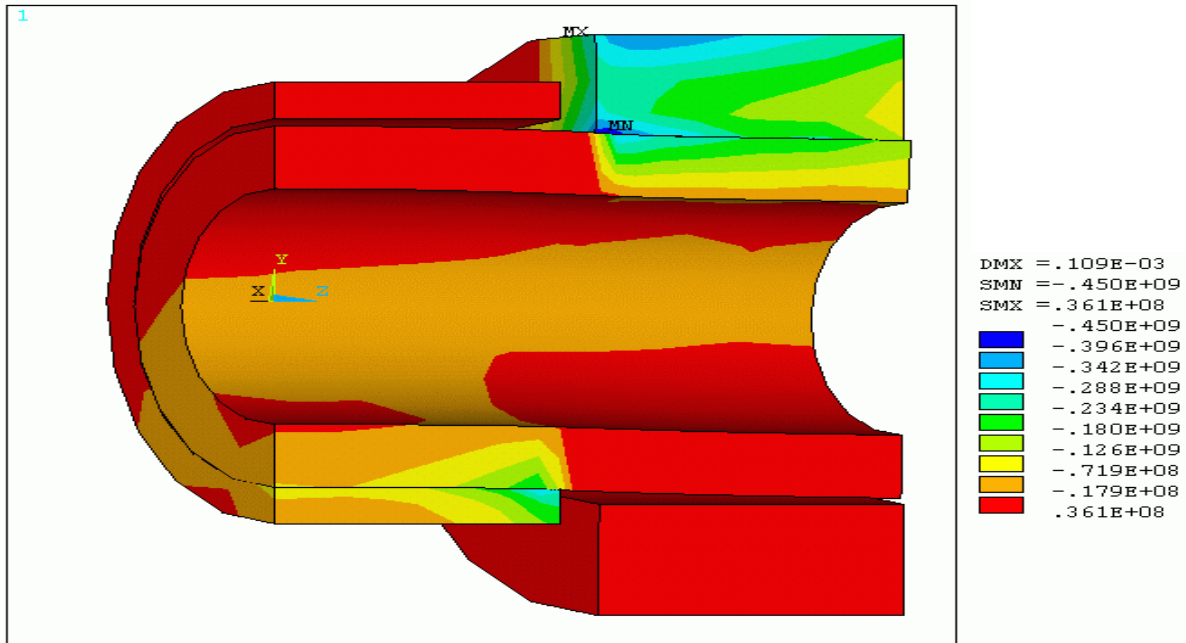
Рис. 1. Поле нормальных напряжений  $\sigma_y$

Видно, что в зоне контакта бобышки поршня с поршневым пальцем возникает концентрация напряжений, обусловленная влиянием граничных эффектов. Поля напряжений имеют характерный пик в окрестности особой точки и ниспадающий характер на удалении. Похожая картина возникает в зоне контакта поршневого пальца с головкой шатуна.

На рис. 1 и 2 видно, что кроме сжимающих напряжений, обусловленных контактным взаимодействием, возникают значительные растягивающие напряжения, обусловленные изгибом, которые приводят к овализации пальца. Попеременное воздействие этих напряжений становится причиной к появлению усталостных трещин и разрушению. В настоящее время в инженерной практике принято использовать приближенные зависимости, предложенные в работе [11]. Предполагается, что нагрузка по длине поршневого пальца распределяется по кусочно-линейному закону. Ясно, что такая схема нагружения будет давать весьма приближенные результаты расчета НДС пальца, так как не учитывает концентрации напряжений в особых точках, характерные черты которой присутствуют на рис. 1 и 2.

При расчете по предлагаемой в данной работе численно-асимптотической методике предполагаем, что поле напряжений имеет корневую особенность вдоль границы зоны кон-



Рис. 2. Поле нормальных напряжений  $\sigma_x$ 

такта. Это позволяет выделить сингулярные члены в разложениях механических характеристик и улучшить сходимость функциональных рядов для контактных напряжений.

Для примера детально рассмотрим интенсивность локальной концентрации напряжений, возникающей в зоне контакта поршневого пальца с головкой шатуна (см. рис. 1, 2). Подсчитаем относительное значение внутренней энергии  $E$  [6], накопленной в нерегулярной зоне контакта  $\Omega$  возле кромки головки шатуна. Значение  $E$  представляет собой процентное отношение энергии, накопленной в области  $\Omega$ , к энергии, накопленной во всей области контакта головки шатуна с поршневым пальцем. Если взять начало координат в плоскости кромки головки шатуна, то область  $\Omega$  задается неравенствами (координата  $z$  измеряется в миллиметрах):  $\varphi \in [-\pi, \pi] \cup z \in [-1, 1]$ .

В таблице 1 подсчитаны значения внутренней энергии на первых шести резонансных частотах, полученные при помощи метода конечных элементов ( $E_1$ ) и при помощи решения определяющей системы интегральных уравнений ( $E_2$ ). Величины  $E_1$  и  $E_2$  можно принять за показатели интенсивности концентрации напряжений в области  $\Omega$ .

Таблица 1

Относительная внутренняя энергия, накопленная в области концентрации напряжений

Порядковый номер частоты/моды	Значение собственной частоты, Гц	$E_1$	$E_2$
1	30,7	51,3	56,4
2	113,6	46,7	50,5
3	326,2	46,1	47,7
4	648,7	40,8	41,8
5	864,5	38,8	38,5
6	1023,6	38,0	34,9

Из данных таблицы 1 следуют несколько выводов:

1. Для любой рассмотренной моды колебаний наблюдается существенная концентрация напряжений в нерегулярной области контакта  $\Omega$ , которая составляет лишь примерно 4% от общей площади контакта поршневого пальца с головкой шатуна. Это еще раз свидетельствует о невозможности применять в уточненных прочностных расчетах инженерные гипотезы [11].

2. С увеличением порядкового номера моды колебаний интенсивность концентрации напряжений несколько уменьшается, приближаясь к постоянной величине.

3. Результаты расчетов, проведенных по обоим методикам, практически совпадают, что свидетельствует о достоверности полученных данных.

4. Для достаточно больших значений частоты нагружения  $\omega$  целесообразно применять конечно-элементные методики расчета, поскольку весь алгоритм решения определяющей системы интегральных уравнений контактной задачи базируется на том, что длина волны гораздо больше размеров поршневого пальца.

### ***Выводы и перспективы дальнейших исследований***

Анализ научных публикаций, посвященных построению аналитических подходов к решению задач контактного динамического деформирования полых цилиндрических деталей машиностроения, показал, что в общем случае, когда изучение колебаний сводится к решению основных граничных задач, возникают значительные математические трудности. Этим трудностям сопутствует существенное усложнение физической картины деформирования цилиндра. Кроме того, в области относительно высоких частот необходимо учитывать пространственный характер волновых движений частиц цилиндра. В связи с этим предложенная в работе методика обобщения метода суперпозиции для построения решения пространственной динамической задачи вибрационного деформирования полых цилиндрических тел обладает достаточным элементом научной новизны. Суть ее состоит в возможности представления общего решения в виде суммы решений вспомогательных задач для бесконечного цилиндрического слоя и бесконечного слоя с плоскопараллельными границами. Применение интегральных преобразований для решения вспомогательных задач позволяет получить их решение в замкнутой форме.

Большой интерес представляет оценка роли граничных условий в формировании спектра резонансных частот и форм колебаний полых цилиндрических деталей. С этой точки зрения в работе проведено рассмотрение динамической смешанной контактной задачи, которая имеет выраженное прикладное значение. Получено интегральное уравнение, определяющее неизвестные напряжения в области контакта, которое замыкает определяющую систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций вспомогательной задачи. Таким образом, получены возможности численного исследования всех особенностей контактного деформирования полых цилиндрических деталей при общем случае нагружения их внешней поверхности.

В качестве перспектив дальнейших исследований следует рекомендовать распространение предложенной численно-аналитической методики для анализа полей контактных напряжений для существенно анизотропных тел и тел с трещинами.

### ***Список литературы***

1. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.
2. Кадомцев И.Г. Осесимметричное упругопластическое соударение двух тел, одно из которых коническое // Изв. СКНЦ ВШ. – 1990. – №4. – С. 50-54.
3. Матлин М.М. Определение параметров первоначально точечного упругопластического контакта по физико-механическим свойствам контактирующих тел // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 1993. – №5. – С. 11-20.

4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.: Наука, 1968. – 402с.
5. Лурье С.А. Обобщенный метод однородных решений в задачах теории плит и оболочек с оператором разрешающего уравнения порядка  $2n$  // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т.2. – № 3-4. – С. 58-71.
6. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284с.
7. Вовк Л.П. Обобщение метода суперпозиции в задачах о гармонических колебаниях прямоугольных областей произвольной кусочно-неоднородной структуры // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 2003. – №4. – С. 19-23.
8. Вовк Л.П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267 с.
9. Ворovich И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, 1979. – 319 с.
10. Вовк Л.П. Применение акустического метода свободных колебаний к диагностике технологически неоднородных деталей // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технич. науки. – 2004. – №3. – С. 55-58.
11. Кинашвили Р.С. Расчет поршневого пальца авиационного двигателя. – М.: Оборонгиз, 1977. – 148 с.

Стаття надійшла до редакції 24.09.07

© Вовк Л.П., Жмайло Ю.О., 2007