УДК 681.3

Г.И. Грездов, Т.К. Филиппенко
Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова НАН Украины, г.Киев

Численное вычисление сеточной модели линии пересечения поверхностей

Рассматриваются вопросы вычисления сеточной модели линии пересечения поверхностей. Предложен алгоритм для поверхностей заданной в неявной, параметрической или смешанной формах.

***Ключевые слова**: машинная графика, пересечение поверхностей, сеточная модель.*

Введение

Исходными данными для расчета линии пересечения являются данные о пересекающихся объектах. Эти данные получают из описания деталей, расставленных заданным образом в объектном пространстве. Заданные таким образом два или более объектов могут пересекаться друг с другом, как правило, линия их пересечения проходит по линии пересечения их границ, являющихся поверхностями. Математическое описание этих поверхностей может иметь несколько форм: неявная, параметрическая, смешанная, а также параметрического интерполянта. Поверхность в неявной форме представляется одним нелинейным уравнением:

$$F(x, y, z) = 0,$$

а если использовать обозначение радиус-вектора

$$\mathbf{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix},$$

то уравнение поверхности в неявной форме примет вид: $F(\mathbf{r}) = 0$.

Поверхность в параметрической форме представляется системой уравнений:

$$x = \Re_x(d, g),\ \ y = \Re_y(d, g),\ \ z = \Re_z(d, g),$$

или векторным уравнением:

$$\mathbf{r} = \Re(\xi) .$$

Линии пересечения получают путем совместного решения уравнений для пересекающихся поверхностей. Здесь возможны 3 способа задания поверхностей [1]:

– обе поверхности в неявной форме:

F(r) = 0, W(r)=0;

– обе поверхности в параметрической форме :

$$\mathbf{r} = \Re_1(\xi_1)\ ,\ \mathbf{r} = \Re_2(\xi_2)\ ;$$

– одна поверхность в неявной, другая в параметрической форме:

$$\mathrm{F(r)} = 0; \mathbf{r} = \Re(\xi) .$$

Обычно линии пересечения представляют в параметрической форме. Решение может быть получено в аналитическом виде, а также численно. Аналитические решения имеют пригодный для использования вид в простых случаях, а в остальных случаях слишком громоздки. Как отмечалось, линии обычно представлены в параметрической форме. Параметром может быть любой произвольный параметр, но удобнее использовать длину дуги s от некоторой начальной до текущей точки. $\{x_c, y_c, z_c\}=\{C_x(s), C_y(s), C_z(s)\}$,

$$\dot{s}^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2.$$

Численные решения дают, как правило, сеточные модели. Сеточной моделью линии пересечения называют табличное представление пространственной кривой, являющейся линией пересечения поверхностей. Таблица линии пересечения, как и всякой пространственной кривой в параметрической форме, одномерна, ее элементом является координаты трехмерного радиус-вектора $\{x_c, y_c, z_c\}$. Поскольку линия пересечения проходит по границе между двумя поверхностями, представляют интерес величины нормалей этих поверхностей на линии их пересечения. Таким образом, запись для каждого узла таблицы содержит три вектора: координаты узла и значения нормалей пересекающихся поверхностей в этой точке. Параметр кривой s изменяется с некоторым шагом h. Поскольку длина кривой заранее неизвестна, задают не величину шага, а число узлов на кривой.

В дальнейшем полученные элементы кривой могут использоваться для получения поперечного сечения сварочной щели, а также для вычисления сопутствующего триэдра.

1. Алгоритм вычисления

Вход

Уравнения пересекающихся поверхностей в одной из перечисленных выше форм: неявной, параметрической или смешанной.

Количество узлов сетки на линии пересечения Δ.

Выход

Таблица линии пересечения; каждая строка представлена записью:[s, x, y, z, l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2],

где l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 – компоненты нормалей к поверхностям в узле.

Метод

Структурная схема алгоритма представлена на Рис.1.

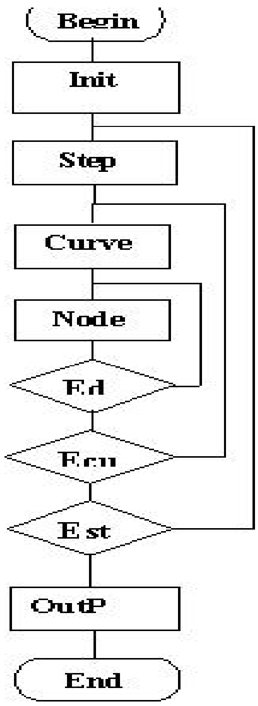

Рисунок 1 – Схема алгоритма

Алгоритм содержит три вложенных друг в друга цикла: внешний – цикл шага, средний – цикл линии и внутренний – цикл узла [2]. Основными блоками алгоритма являются:

Init – инициализации задачи в целом.

Step – вычисления шага.

Curve – перемещения по кривой.

Node – спуска в узел.

Edec – альтернативы по окончании узла.

Ecur – альтернативы по окончании кривой.

Est – альтернативы по окончании выбора шага.

OutP – вывода результатов.

Начинается алгоритм с реализации блока Init инициализации задачи, в котором реализуются подготовительные операции алгоритма. Здесь, используя уравнения пересекающихся поверхностей, вычисляются аналитические выражения нормалей к ним, матриц Якоби, произведения матрицы Якоби на ей сопряженную, градиента. Кроме этого в блоке Init вычисляются координаты начальной точки на линии пересечения, более детально эта операция будет описана ниже.

В блоке Step вырабатывается на первом шаге алгоритма введенное, а на последующих шагах алгоритма скорректированные значения шага сетки. Коррекция шага сетки состоит в следующем. По заданию сетка линии пересечения должна содержать Δ узлов, однако, основным параметром в операциях алгоритма является шаг сетки, который мог бы быть вычислен как длина линии, разделенная на число узлов, но длина линии заранее неизвестна. Поэтому сперва делается проход по линии пересечения с введенным шагом, проход состоит в последовательном вычислении цепочки узловых значений, начинающейся в вычисленной блоком Init начальной точке и оканчивающейся в конечной точке. Когда линия пересечения замкнута, то конечная точка совпадает с начальной.

Цепочка считается оконченной, когда расстояние между текущей и конечной точкой s_e менее шага сетки h_i. В результате этой операции можно вычислить длину вписанной в нее ломаной, а по ней новое значение шага вычисляется как:

$$h_{i+1} = (\Delta_i h_i + s_e) / \Delta,$$

которое используется для вычисления новой цепочки узловых значений. Цикл шага считается оконченным, когда $\Delta_i = \Delta$ и $s_e = 0$. Это условие используется в блоке Est альтернативы по окончании выбора шага, а условие $s_e < h_i$ в блоке

Ecur альтернативы по окончании прохода по кривой.

Цепочка узловых значений на линии пересечения показана на рис.2.

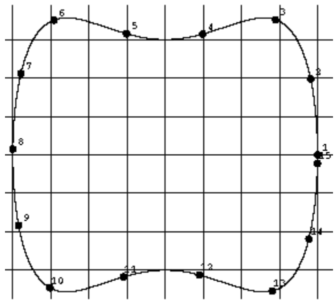

Рисунок 2 – Узлы на линии пересечения

Блок Curve перемещения по кривой организует проход по линии пересечения от ее начала до ее конца. В этом блоке реализуется цепочка вычислений начальных значений для последующих спусков. В начале цепочки в качестве базовой используется точка начала кривой. Для этой точки записывается уравнение сферы с центром в этой точке, которое используется как дополнительное. Кроме этого записывается уравнение сетки по касательной к линии в положительном направлении.

Координаты точки начала спуска к следующему корню выбираются путем шага смещения базовой точки на расстояние текущего.

В блоке Node спуска в узел используются уравнения пересекающихся поверхностей с дополнительным уравнением и координаты точки начала спуска для отыскания координат узловой точки методом наименьших квадратов. В соответствии с этим методом для решения совместной системы нелинейных уравнений вводится вспомогательная функция, равная сумме квадратов невязок в этих уравнениях, и отыскиваются координаты точки минимума этой функции. Координаты точки минимума отыскиваются путем применения комбинации методов наискорейшего спуска и метода Ньютона. Спуск считается завершенным, когда значение вспомогательной функции становится меньше заданной величины. Это условие управляет блоком Edec альтернативы по окончании узла. Вид операций при спуске к начальной и внутренней точки в блоке Init и Node зависит от вида исходных данных и рассматривается ниже более подробно.

2. Метод наименьших квадратов

Широко распространенный метод наименьших квадратов приводится сперва в обобщенном виде для справки, а затем на его основе строятся модели отыскания точек линии пересечения.

Пусть требуется найти решение нелинейного уравнения

$$f(u) = 0; \qquad (1)$$

для заданной векторной функции f = {f1,..,fn} от векторного аргумента u = {u1,..,un}. Вводится вспомогательная скалярная функция, равная скалярному произведению векторной функции самой на себя:

$$Hm = f(u).\ f(u), \qquad (2)$$

которая обращается в нуль, когда все компоненты функции одновременно равны нулю. Решение отыскивается итерационным методом минимизации вспомогательной функции по аргументам $\{u_1,\dots,u_n\}$.

Условием минимума является

$$\frac{\partial Hm}{\partial u} = 0;$$

что при развертывании гамильтониана и подстановке линеаризации векторной функции через разложение по формуле Тейлора дает

$$f_u^T f = f_u^T (f_0 + f_u \Delta u) = 0; \quad (3)$$

где f_u – матрица Якоби для системы функций.

$$f_u = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ . & \cdots & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{matrix} \right\| \qquad (4)$$

Если обозначить

$$g = f_u^T f_0; M = f_u^T f_u; \qquad (5)$$

то придем к такой форме условия минимума квадратичной формы Hm

$$M\ \Delta u + g = 0. \ (6)$$

Минимум квадратичной формы находят с помощью итераций методами наискорейшего спуска, Ньютона или их комбинации. Обычно метод наискорейшего спуска имеет широкую область, но медленную сходимость, метод Ньютона быстро сходится около корня.

3. Метод наискорейшего спуска

В этом методе спускаются в направлении градиента, а шаг продвижения в этом направлении находят из условия максимального убывания минимизируемой функции.

$$u = u_0 - g \frac{g \cdot g}{g \cdot Mg}; \qquad (7)$$

4. Метод Ньютона

Продвижения к корню по этому методу вычисляются по формуле:

$$u = u_0 - M^{-1} g. \qquad (8)$$

Когда начальное приближение лежит достаточно близко к простому корню, метод Ньютона дает быструю (квадратичную) сходимость к нему.

5. Неявное задание поверхностей

Пересекающиеся поверхности задаются скалярными уравнениями:

$$W(x, y, z) = 0,$$
$$F(x, y, z) = 0,$$

а линия пересечения определяется из решения совместной системы этих уравнений.

Как правило, в алгоритмах отыскивается какая-либо точка на линии пересечения, которую задают путем введения вспомогательного уравнения:

$$A(x, y, z) = 0.$$

Для этой задачи основные компоненты поиска g и M определятся как

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} \mathbf{J}_W \\ \mathbf{J}_F \\ \mathbf{J}_A \end{Vmatrix}, \mathbf{J}_G = \begin{Vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{Vmatrix}, G \in \{W, F, A\},$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{J}^T[W,F,A] = \mathbf{J}_W^T W + \mathbf{J}_F^T F + \mathbf{J}_A^T A, \mathbf{M} =$$
$$\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{J}_W^T \mathbf{J}_W + \mathbf{J}_F^T \mathbf{J}_F + \mathbf{J}_A^T \mathbf{J}_A,$$
$$W = W(x, y, z),\ F = F(x, y, z),$$
$$A = A(x, y, z).$$

5.1 Вычисление начальной точки

Чтобы вычислить координаты начальной точки, систему уравнений для линии пересечения нужно дополнить уравнением, задающим положение начальной точки на линии. Способов задания точки на линии много, здесь будем использовать уравнение, фиксирующее какую-либо пространственную координату (для определенности x). В этом случае вспомогательное уравнение, определяющее координаты начальной точки, будет иметь вид

$$x - x_0 = A,$$

а его матрица Якоби –

$$\mathbf{J}_A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

5.2. Вычисление внутренних точек

Для вычисления координат внутренней точки систему уравнений для линии пересечения нужно дополнить уравнением, задающим ее положение на линии. Положение внутренней точки на линии пересечения задается ее отстоянием от предыдущей на расстояние, равное заданному шагу сетки h, в сторону положительного направления по линии пересечения. Это выполняется за счет двух действий.

Система уравнений для линии пересечения дополняется уравнением сферы радиуса h с центром в предыдущей точке.

Выбираются координаты точки начала спусков, равные координатам предыдущей точки смещенной на величину шага сетки h по касательной к линии пересечения в положительном направлении.

Вспомогательное уравнение, определяющее координаты внутренней точки на линии пересечения, имеет вид:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - h^2 = A,$$

тогда

$$\mathbf{J}_A = 2\begin{Vmatrix} x - x_i & y - y_i & z - z_i \end{Vmatrix}, \mathbf{J}_A^T \mathbf{J}_A =$$
$$= \begin{Vmatrix} (x-x_i)^2 & (x-x_i)(y-y_i) & (x-x_i)(z-z_i) \\ (x-x_i)(y-y_i) & (y-y_i)^2 & (y-y_i)(z-z_i) \\ (x-x_i)(z-z_i) & (y-y_i)(z-z_i) & (z-z_i)^2 \end{Vmatrix}$$

Как отмечалось, координаты точки начала спуска выбираются равными координатам предыдущей точки смещенной на величину шага сетки h по касательной к линии пересечения в положительном направлении, то есть

$$\{x_{0,I+1}, y_{0,I+1}, z_{0,I+1}\} = \{x_i, y_i, z_i\} + h\,\{x_t, y_t, z_t\}.$$

Касательная к линии пересечения определяется как

$$\mathbf{r_t} = \mathrm{Ort}(\mathbf{J_W} \times \mathbf{J_F})$$

Компоненты поиска g и M вычисляются для начального значения аргументов x_i, y_i, z_i.

6. Параметрическое задание поверхностей

Пересекающиеся поверхности задаются векторными уравнениями:

$$\{x_F, y_F, z_F\} = \{x_F(d_F, g_F), y_F(d_F, g_F), z_F(d_F, g_F)\},$$
$$\{x_W, y_W, z_W\} = \{x_W(d_W, g_W), y_W(d_W, g_W), z_W(d_W, g_W)\},$$

которые дополняются вспомогательным уравнением

$$A(x_a, y_a, z_a) = 0.$$

Точка на линии пересечения определяется из совместного решения системы этих уравнений.

$$\{x_F(d_F, g_F), y_F(d_F, g_F), z_F(d_F, g_F)\} -$$
$$- \{x, y, z\} = \{F_x, F_y, F_z\} =$$
$$\mathbf{F}, \{x_W(d_W, g_W), y_W(d_W, g_W), z_W(d_W, g_W)\} - \{x, y, z\} = \{W_x, W_y, W_z\} = \mathbf{W},$$
$$A(x, y, z) = A.$$

Следует обратить внимание, что векторным аргументом здесь является $[d_W, g_W, d_F, g_F, x, y, z]$.

В процессе спусков будет отыскиваться именно этот вектор. Искомые величины – декартовы координаты точки на линии пересечения **r** = [x, y, z].

Для этой задачи основные компоненты поиска **g** и **M** определятся как

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} \mathbf{J}_W & 0 & -\mathbf{E} \\ 0 & \mathbf{J}_F & -\mathbf{E} \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_A \end{Vmatrix}; \mathbf{J}_W = \frac{\partial \mathbf{r}_W}{\partial \xi_W};$$

$$\mathbf{J}_F = \frac{\partial \mathbf{r}_F}{\partial \xi_F}; \mathbf{J}_A = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}};$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{J}^{\mathrm{T}} \begin{Vmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{F} \\ \mathrm{A} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{J}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \\ \mathbf{J}_F^T \mathbf{F} \\ \mathbf{J}_A^T A - \mathbf{W} - \mathbf{F} \end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} = \begin{Vmatrix} \mathbf{J}_W^T \mathbf{J}_W & 0 & -\mathbf{J}_W^T \\ 0 & \mathbf{J}_F^T \mathbf{J}_F & -\mathbf{J}_F^T \\ -\mathbf{J}_W & -\mathbf{J}_F & \mathbf{J}_A^T \mathbf{J}_A + 2\mathbf{E} \end{Vmatrix}$$

6.1 Вычисление начальной точки

Для вычисления координат начальной точки систему уравнений для линии пересечения нужно дополнить уравнением, задающим ее положение на линии. Способов задания точки на линии много, здесь будем использовать уравнение, фиксирующее какую-либо пространственную координату (для определенности x):

$$x - x_0 = A.$$

Тогда

$$\mathbf{J}_A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \mathbf{J}_A^T \mathbf{J}_A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Компоненты поиска g и M вычисляются для начального значения аргументов x_0, y_0, z_0, выбираемых из каких-либо соображений.

6.2 Вычисление внутренних точек

Для вычисления координат внутренней точки систему уравнений для линии пересечения нужно дополнить уравнением, задающим ее положение на линии. Положение внутренней точки на линии пересечения задается ее отстоянием от предыдущей на расстояние, равное заданному шагу сетки h, в сторону положительного направления по линии пересечения. Это выполняется за счет двух действий.

Система уравнений для линии пересечения дополняется уравнением сферы радиуса h с центром в предыдущей точке.

Выбираются координаты точки начала спусков, равные координатам предыдущей точки, смещенной на величину шага сетки h по касательной к линии пересечения в положительном направлении.

Координаты внутренней точки находятся как результат решения системы уравнений линии пересечения, дополненной уравнением, задающим ее положение на линии. Текущая внутренняя точка находится на линии пересечения и отстоит от предыдущей в сторону положительного направления обхода линии пересечения на расстояние, равное заданному шагу сетки.

Дополняющее уравнение и его характеристики описаны в разделе о неявном задании

Касательная к линии пересечения находится следующим образом. Сперва отыскиваются нормали $\mathbf{n_W}$ и $\mathbf{n_F}$ к поверхностям **W** и **F**

$$\mathbf{n_W} = \mathbf{J_{W1}} \times \mathbf{J_{W2}},\ \mathbf{n_F} = \mathbf{J_{F1}} \times \mathbf{J_{F2}}.$$

Затем находится орт касательной как:

$$\mathbf{t} = \mathrm{Ort}(\mathbf{n_W} \times \mathbf{n_F}).$$

Радиус-вектор точки начала текущего спуска $\mathbf{r_{0,i+1}}$ определяется по радиус-вектору предыдущей точки на линии пересечения $\mathbf{r_i}$ как

$$\mathbf{r_{0,i+1}} = \mathbf{r_i} + h\,\mathbf{t}.$$

При этом приращения криволинейных координат для каждой из поверхностей отсутствуют, поскольку они находятся из уравнения:

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} \Delta\xi = h \mathbf{J}^T \mathbf{t},$$

правая часть которого равна нулю.

7. Смешанное задание поверхностей

Пересекающиеся поверхности задаются: одно неявно

$$W(x_W, y_W, z_W) = 0,$$

а другое векторным уравнением

$$\{x_F, y_F, z_F\} = \{x_F(d_F, g_F), y_F(d_F, g_F), z_F(d_F, g_F)\},$$

которые дополняются вспомогательным уравнением

$$A(x_a, y_a, z_a) = 0.$$

Точка на линии пересечения определяется из совместного решения системы этих уравнений.

$$W(x, y, z) = W,$$

$$\{x_F(d_F, g_F), y_F(d_F, g_F), z_F(d_F, g_F)\} - \{x, y, z\} = \{F_x, F_y, F_z\} = \mathbf{F},$$

$$A(x, y, z) = A.$$

Следует обратить внимание, что векторным аргументом здесь является

[d_F, g_F, x, y, z].

В процессе спусков будет отыскиваться именно этот вектор. Искомые величины – декартовы координаты точки на линии пересечения **r** = [x, y, z].

Для этой задачи основные компоненты поиска **g** и **M** определятся как

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{J}_W \\ \mathbf{J}_F & -\mathbf{E} \\ 0 & \mathbf{J}_A \end{Vmatrix}; \mathbf{J}_W = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}};,$$

$$\mathbf{J}_F = \frac{\partial \mathbf{r}_F}{\partial \xi_F}; \mathbf{J}_A = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}};$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{J}^{\mathrm{T}} \begin{Vmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{F} \\ \mathrm{A} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{J}_F^T \mathbf{F} \\ \mathbf{J}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} + \mathbf{J}_A^T A - \mathbf{F} \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} = \begin{Vmatrix} \mathbf{J}_F^T \mathbf{J}_F & -\mathbf{J}_F^T \\ -\mathbf{J}_F & \mathbf{J}_W^T \mathbf{J}_W + \mathbf{J}_A^T \mathbf{J}_A + \mathbf{E} \end{Vmatrix}$$

7.1. Вычисление начальной точки

Для вычисления координат начальной точки систему уравнений для линии пересечения нужно дополнить уравнением, задающим ее положение на линии. Способов задания точки на линии много, здесь будем использовать уравнение, фиксирующее какую-либо пространственную координату (для определенности x):

$$x - x_0 = A.$$

Тогда

$$\mathbf{J}_A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \mathbf{J}_A^T \mathbf{J}_A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Компоненты поиска g и M вычисляются для начального значения аргументов x_0, y_0, z_0, выбираемых из каких-либо соображений.

7.2. Вычисление внутренних точек

Для вычисления координат внутренней точки систему уравнений для линии пересечения нужно дополнить уравнением, задающим ее положение на линии. Положение внутренней точки на линии пересечения задается ее отстоянием от предыдущей на расстояние, равное заданному шагу сетки h, в сторону положительного направления по линии пересечения. Это выполняется за счет двух действий.

Система уравнений для линии пересечения дополняется уравнением сферы радиуса h с центром в предыдущей точке.

Выбираются координаты точки начала спусков, равные координатам предыдущей точки смещенной на величину шага сетки h по касательной к линии пересечения в положительном направлении.

Координаты внутренней точки находятся как результат решения системы уравнений линии пересечения, дополненной уравнением, задающим ее положение на линии. Текущая внутренняя точка находится на линии пересечения и отстоит от предыдущей в сторону положительного направления обхода линии пересечения на расстояние, равное заданному шагу сетки.

Дополняющее уравнение и его характеристики описаны в разделе о неявном задании

Касательная к линии пересечения находится следующим образом. Сперва отыскиваются нормали $\mathbf{n_W}$ и $\mathbf{n_F}$ к поверхностям **W** и **F**

$$\mathbf{n_W} = \mathbf{J_W},\ \mathbf{n_F} = \mathbf{J_{F1}} \times \mathbf{J_{F2}}.$$

Затем находится орт касательной как

$$\mathbf{t} = \mathrm{Ort}(\mathbf{n_W} \times \mathbf{n_F}).$$

Радиус-вектор точки начала текущего спуска $\mathbf{r_{0,i+1}}$ определяется по радиус-вектору предыдущей точки на линии пересечения $\mathbf{r_i}$ как

$$\mathbf{r_{0,i+1}} = \mathbf{r_i} + \mathrm{h}\,\mathbf{t}.$$

При этом приращения криволинейных координат для каждой из поверхностей отсутствуют, поскольку они находятся из уравнения

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} \Delta \xi = h \mathbf{J}^T \mathbf{t},$$

правая часть которого равна нулю.

Литература

1. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
2. Wolfram S., Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer, Addison-Wesley, 1991. – 962 с.

Надійшла до редакції 24.12.2010