

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**  
**ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**В.Я. Воропаєва, В.І. Бессараб,  
В.В. Турупалов, В.В. Червинський**

## **ТЕОРІЯ ТЕЛЕТРАФІКУ**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМКУ  
ПІДГОТОВКИ "ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ"**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Донецьк  
ДВНЗ «ДонНТУ»  
2011

УДК 621.395.61(075.8)  
ББК 32.882  
Т 33

Рецензенти:

*М.М. Климаш*, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри телекомунікацій національного університету «Львівська політехніка»;

*С.І. Приходько*, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри транспортного зв'язку Української державної академії залізничного транспорту;

*А.О. Каргін*, д-р техн. наук, професор, декан фізичного факультету Донецького національного університету.

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, лист № 1/11-7538 від 10.08.2011*

**Теорія** телетрафіку: навч. посіб. / В.Я. Воропаєва, В.І. Бессараб, В.В. Турупалов, Т 33 В.В. Червинський. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2011. – 202 с.

ISBN 978-966-377-115-1

Викладено основи теорії телетрафіку, розглянуто визначення та класифікація систем масового обслуговування. Наведений аналіз основних типів випадкових потоків викликів, дані основні характеристики якості систем масового обслуговування. Виведені перший та другий розподіли Ерланга, вирішені задачі аналізу та синтезу систем з втратами і з очікуванням. Розглянуто теоретичні основи моделювання мереж масового обслуговування та приведено алгоритми імітаційного моделювання СМО.

Навчальний посібник призначений для студентів напрямку підготовки «Телекомунікації» та може бути корисний технічним фахівцям, аспірантам, студентам інших спеціальностей галузі знань «Радіотехніка».

УДК 621.395.61(075.8)  
ББК 32.882

ISBN 978-966-377-115-1

© Воропаєва В.Я., Бессараб В.І.,  
Турупалов В.В., Червинський В.В., 2011

## ЗМІСТ

Перелік основних скорочень та умовних позначень.....	7
Вступ.....	9
1 Основні поняття теорії телетрафіку. Класифікація СМО. Символіка Кендала – Башаріна.....	14
1.1 Поняття СМО. Приклади СМО. ....	14
1.2 Основні поняття теорії телетрафіка .....	17
1.3 Предмет і задачі теорії телетрафіка.....	18
1.4 Класифікація СМО. Символіка Кендала – Башаріна .....	20
1.5 Контрольні питання.....	22
1.6 Завдання для самостійної роботи .....	23
2 Моделі потоків викликів .....	24
2.1 Способи опису випадкових потоків .....	24
2.2 Властивості випадкових потоків. ....	25
2.3 Характеристики випадкових потоків .....	26
2.4 Найпростіший потік викликів.....	28
2.4.1 Розподіл Пуассона .....	28
2.4.2 Аналіз розподілу Пуассона.....	32
2.4.3 Розподіл інтервалу між викликами у найпростішому потоці.....	35
2.4.4Перевірка відповідності потоку моделі найпростішого .....	37
2.4.5 Об'єднання та роз'єднання найпростіших потоків .....	40
2.5 Нестационарний пуассонівський потік .....	41
2.6 Неординарний пуассонівський потік .....	42
2.7 Потік з простою післядією .....	44
2.7.1 Примітивний потік.....	44
2.8 Потік з повторними викликами .....	48
2.9 Потік звільнень .....	49
2.10 Потік з обмеженою післядією.....	55
2.11 Контрольні питання.....	63
2.12 Завдання для самостійної роботи .....	65

3 Види навантаження та характеристики якості обслуговування в СМО .....	67
3.1 Генерування навантаження в телефонних мережах .....	67
3.2 Навантаження і робота в СМО .....	75
3.3 Характеристики якості обслуговування .....	83
3.3.1 СМО з явними втратами .....	83
3.3.2 Системи з очікуванням .....	84
3.3.3 Системи з повторенням викликів .....	85
3.3.4 Загальні характеристики якості .....	86
3.4 Контрольні питання .....	86
3.5 Завдання для самостійної роботи .....	87
4 Моделювання смо за схемою марківських випадкових процесів .....	89
4.1 Марківський ланцюг з дискретним часом .....	89
4.2 Марківський ланцюг з безперервним часом. СДР Колмогорова .....	95
4.3 Контрольні питання .....	101
4.4 Завдання для самостійної роботи .....	101
5 Системи з явними втратами .....	102
5.1 Система $M/M/V/L$ . Перший розподіл Ерланга .....	102
5.2 Характеристики якості системи $M/M/v/L$ .....	106
5.2.1 Імовірність втрат за часом .....	106
5.2.2 Інтенсивність обслугованого навантаження .....	107
5.2.3 Інтенсивність потенційного навантаження .....	108
5.2.4 Інтенсивність втраченого навантаження .....	108
5.2.5 Імовірність втрати виклику .....	108
5.2.6 Імовірність втрат за навантаженням .....	109
5.3 Синтез систем з втратами .....	111
5.3.1 Структурний синтез .....	111
5.3.2 Параметричний синтез .....	112
5.4 Пропускна здатність окремих каналів системи з втратами .....	113
5.4.1 Пропускна здатність каналів системи $M/M/v/L//R$ .....	113
5.4.2 Пропускна здатність каналів системи $M/M/v/L//S$ .....	113

5.5 Система $M_r/M/V/L$ .....	116
5.5.1 Розподіл імовірностей станів системи $M_r/M/V/L$ .....	116
5.5.2 Основні випадки розподілу станів системи $M_r/M/V/L$ .....	118
5.5.3 Характеристики якості систем $M_i/M/v/L$ .....	120
5.6 Імовірність зайнятості визначених каналів .....	125
5.7 Порівняння моделей $M/M/v/L$ та $M_i/M/v/L$ для рішення задачі структурного синтезу .....	126
5.8 Контрольні питання .....	128
5.9 Завдання для самостійної роботи .....	129
6 СМО з очікуванням .....	131
6.1 Другий розподіл Ерланга .....	131
6.2 Характеристики якості обслуговування .....	135
6.2.1 Імовірність очікування для виклику, що надійшов .....	135
6.2.2 Інтенсивність обслугованого навантаження .....	136
6.2.3 Середня довжина черги .....	137
6.2.4 Середня тривалість очікування початку обслуговування .....	138
6.2.5 Імовірність перевищення довжиною черги величини $n$ .....	139
6.2.6 Імовірність очікування більше припустимого часу $t_{np}$ .....	139
6.3 Одноканальна система з очікуванням .....	140
6.4 Система з обмеженим числом місць в черзі .....	141
6.5 Контрольні питання .....	143
6.6 Завдання для самостійної роботи .....	143
7 Імітаційне моделювання СМО .....	145
7.1 Загальні відомості .....	145
7.2 Структура імітаційної моделі СМО .....	147
7.3 Моделювання випадкових величин. Метод Монте-Карло .....	148
7.4 Моделювання найпростішого потоку .....	150
7.5 Моделювання процесу обслуговування .....	152
7.6 Моделювання марківського процесу .....	155

7.7 Точність і достовірність результатів моделювання.....	158
7.8 Контрольні питання.....	159
8 Аналітичні методи теорії мереж масового обслуговування .....	160
8.1 Основні визначення.....	161
8.2 Однорідні експоненціальні мережі.....	166
8.2.1 Рівняння глобального балансу для замкнених мереж.....	166
8.2.2 Вид рішення в мультиплікативній формі .....	168
8.2.3 Мережі, що залежать від навантаження .....	171
8.2.4 Показники якості обслуговування однорідних мереж.....	174
8.3 Мережі масового обслуговування з різними класами вимог .....	176
8.3.1 Опис змішаної мережі .....	177
8.3.2 Теорема ВСМР .....	180
8.3.3 Відкриті мережі МО з декількома класами вимог .....	182
8.4 Ітераційний метод аналізу середніх значень .....	184
8.5 Задача синтезу замкнутих однорідних мереж МО .....	186
8.6 Контрольні питання.....	188
Список літератури.....	190
Додаток А - таблиці першої формули Ерланга .....	193
Додаток Б – таблиця імовірності втрат за часом при обслуговуванні примітивного потоку .....	196
Додаток В – критичні точки розподілу $\chi^2$ критерію Пірсона .....	198
Додаток Г – результати моделювання системи М/М/3/Л//S .....	199

## **ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ СКОРОЧЕНЬ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ**

- АТС – автоматична телефонна станція;  
ВАТС – відомча АТС;  
ГНН – година найбільшого навантаження;  
КО – канал обслуговування;  
КС – комутаційна система;  
ММТС – міжміська телефонна станція;  
МО – масове обслуговування;  
ПНН – період найбільшого навантаження;  
ППВ – потік з повторними викликами;  
ППП – потік з простою післядією;  
СДР – система диференційних рівнянь;  
СКВ – середньоквадратичне відхилення;  
СМО – система масового обслуговування;  
ТМО – теорія масового обслуговування;  
у.о.ч – умовна одиниця часу;  
BCMP – Baskett, Chandy, Muntz, Palacios;  
D – детермінований (невипадковий) потік (Determinate)  
D – детермінований закон розподілу часу обслуговування виклику  
 $E^n$  – потік Ерланга  $n$  – ого порядку;  
FF (FIFO) – демократична черга;  
G – довільний закон розподілу часу обслуговування виклику;  
G – неповнодоступні канали обслуговування;  
GS – груповий шукач;  
 $G_e$  – довільний потік (General);  
I – індивідуальна черга;  
ITU – Міжнародна Спілка Електрозв'язку (International Telecommunication Union);

IS – обслуговування без очікування (Immediately Served );

L – спосіб обслуговування з втратами (Loss);

LCFS – одноканальний центр зі стековою чергою;

LF (LIFO) – стекова черга;

LL – спосіб обслуговування без втрат (Loss Less);

LS – багатофазна система (Link System);

M – найпростіший потік;

$M_t$  – пуассонівський потік із змінним параметром;

$M_r$  – пуассонівський потік з умовним параметром;

$M_i$  – примітивний потік;

M – експоненціальний закон розподілу часу обслуговування виклику;

PR – черга з пріоритетом (Priority);

PRA – черга з абсолютним пріоритетом (Absolute);

PRR – черга з відносним пріоритетом (Relative);

PS – розподіл процесора (Processor Sharing );

R – спосіб обслуговування з повторенням (Reattempt);

R – випадковий спосіб заняття каналу (Random);

S – послідовний спосіб заняття каналу (Sequential);

SP – рівно імовірна черга (Same Probability);

SS – абонентський шукач;

W – спосіб обслуговування з очікуванням (чергою) (Wait);

WL – спосіб обслуговування з умовними втратами (комбінований).



## ВСТУП

В курсі «Теорія телетрафіка» розглядаються процеси обробки інформації в телекомунікаційних мережах з точки зору теорії масового обслуговування (ТМО). Основи цієї теорії були закладені в працях датського математика, співпрацівника Копенгагенської телефонної компанії А.К. Ерланга (формулювання принципу статистичної рівноваги) і отримали подальшого розвитку в роботах багатьох вітчизняних та зарубіжних вчених, таких як Т. Енгсет, Г.О. Делл, Е. Молін, О. Колмогоров, А. Хінчин, К. Пальм, Г. Башарін, А. Маркевич, Б. Лівшиц, Ю.М. Корнишев та ін.

Основними поняттями системи масового обслуговування (СМО) є заявки (вимоги) та сервери, які також називають обслуговуючими приладами (каналами). Заявки створюють вхідний потік на вході СМО, а система обслуговує ці заявки, використовуючи на кожну деякий час. Якщо кількість каналів замала для обслуговування усіх заявок, що надійшли на якийсь момент, то виникає конфлікт, вирішення якого полягає в тому, що частина заявок відкидається або розміщується в чергу. Тому в англійській літературі разом з назвою Teletraffic Theory або Teletraffic Engineering часто використовується термін Queuing Theory (теорія черг).

Отже, теорія телетрафіка досліджує математичну модель процесу обслуговування, яка містить наступні основні компоненти:

- потік заявок (викликів, повідомлень), що надходить в систему;
- час обслуговування викликів;
- система і дисципліна обслуговування;
- характеристики якості обслуговування вхідних заявок.

Поняття потоку заявок досить широке. Під ним розуміють інформацію про параметри та властивості потоку вимог на обслуговування (викликів), вигляд та форму представлення повідомлень, множину адрес джерел та приймачів повідомлень.

Система обслуговування характеризується кількістю каналів та структурою побудови (повно- або неповнодоступна, одно- або багатоланкова, одно- або багатофазна і т.д.) і набором структурних параметрів. Під дисципліною обслуговування розуміють спосіб обслуговування (без втрат повідомлень, з явними втратами, з очікуванням, з повторенням або комбінований), порядок обслуговування (за чергою, у випадковому порядку або за пріоритетом), режим шукання виходів комутаційної системи (вільний, груповий або індивідуальний), спосіб зайняття вільних каналів (послідовний або випадковий), а також іншу інформацію, що характеризує взаємодію потоку повідомлень з системою обслуговування.

До характеристик якості обслуговування вхідного потоку заявок відносять: імовірність явної або умовної втрати повідомлень через відсутність вільних каналів обслуговування або шляхів встановлення з'єднання, середній час затримки початку обслуговування вхідного повідомлення, імовірність втрати первинного або повторного виклику, інтенсивність обслугованого навантаження, пропускна здатність системи обслуговування та ін.

Домінуюче положення в теорії телетрафіка займають задачі аналізу – визначення характеристик якості обслуговування залежно від параметрів і властивостей вхідного потоку заявок, а також від параметрів і структури системи обслуговування. Іншою важкою задачею є задача синтезу – визначення параметрів або структури системи, що здатна забезпечити нормовані показники якості для певного вхідного потоку заявок.

З розвитком елементної бази вузлів мереж зв'язку, вдосконаленням принципів та систем управління в телекомунікаціях та впровадженням нових послуг задачі, що вирішує теорія телетрафіку, суттєво розширюються. Пошук найбільш економічних структур комутаційних схем, розробка принципів їх побудови пов'язуються з дотриманням умов не тільки щодо пропускної здатності та часу передачі повідомлення через комутаційне поле, але і надійності функціонування, гнучкості розвитку, модульності побудови.

Для АТС з програмним управлінням рішення задач аналізу і синтезу передбачає визначення необхідного рівня децентралізації управління (вибір оптимальної структури управління) залежно від конкретних характеристик системи (ємність, призначення та ін.), оптимального розподілу функцій та ресурсів системи управління між окремими ЕОМ та мікроЕОМ при децентралізованому та розподіленому управлінні, а також пошук оптимальних алгоритмів обробки викликів і процедур взаємодії між окремими елементами системи управління з метою підвищення її ефективності.

Поява цифрових систем комутації великої ємності з високою пропускною здатністю комутаційного поля та широкими можливостями вносу абонентського обладнання суттєво змінила історичні принципи побудови мереж зв'язку та потребувала розробки нових концепцій мереж зв'язку та методів розрахунку пропускної здатності мережних елементів.

Крім того, висока вартість сучасного телекомунікаційного обладнання та природне бажання оптимального використання вкладених інвестицій спричинили в останній десятиріччя розвиток моделей коротко- та довгострокового прогнозування очікуваних параметрів розподілу обслуговуваного та абонентського навантажень. Ці питання також отримали висвітлення в цьому посібнику.

Математичний апарат теорії телетрафіка базується на теорії імовірності, комбінаториці та математичній статистиці. Методи останньої застосовуються здебільшого для обробки даних, які отримуються при вимірюванні параметрів потоків повідомлень та показників якості обслуговування в реальних системах, а також при моделюванні таких систем на ЕОМ. Для рішення конкретних задач використовуються також інші розділи математики – лінійна алгебра, диференційне та інтегральне обчислення, теорія графів, системний аналіз.

Основним інструментом дослідження в теорії телетрафіка є метод рівнянь імовірностей станів, оснований на принципі статистичної рівноваги.

Для системи обслуговування вводиться поняття *стану*. В найпростішому випадку стан системи характеризується однією випадковою змінною, наприклад числом зайнятих ліній або викликів, що знаходяться в системі (обслуговуються або чекають в черзі). При надходженні наступного виклику або закінченні обслуговування система змінює свій стан. Інтенсивності переходу з одного стану в інший звичайно відомі на основі властивостей потоків викликів і звільнень. Це дозволяє побудувати розмічений граф станів і скласти систему рівнянь, які зв'язують між собою вірогідності сусідніх станів. Систему можна вирішувати аналітично або чисельно. Прикладом аналітичного рішення є розподіли Ерланга, Енгсета, Бернуллі, Пуассона.

Найбільш універсальним, придатним для рішення задач практично будь якої складності, є метод статистичного (імітаційного) моделювання. Математична модель процесу обслуговування при цьому реалізується в вигляді програми для ЕОМ. Моделювання дозволяє отримати чисельні характеристики якості обслуговування при конкретних параметрах потоку, СМО та заданій дисципліні обслуговування. Результати моделювання використовують для перевірки гіпотез і припущень, уточнення емпіричних коефіцієнтів. При моделюванні отримують приблизну оцінку характеристик якості обслуговування, однак за рахунок збільшення часу, а також застосування спеціальних методів моделювання досягається потрібна точність.

Таким чином, вивчивши основні методи теорії телетрафіка, ви зможете розрахувати характеристики якості обслуговування в телекомунікаційних системах, управляти основними параметрами якості обслуговування реальних мереж і систем та вимірювати їх, а також запропонувати оптимальні з точки зору якості обслуговування технічні рішення при проектуванні нових мереж і систем.

Питання побудови мереж з гарантованою якістю послуг є предметом уваги ІТУ-International Telecommunication Union (Міжнародної Спільки Електрозв'язку), особливо при розгортанні мобільних мереж третього

покоління та мультисервісних мереж. ІТУ виділяє Traffic Engineering як один з важливіших напрямків діяльності спеціалістів в галузі телекомунікацій та присвячує йому низку рекомендацій, визначення й методики з яких будуть використані далі в цьому посібнику.

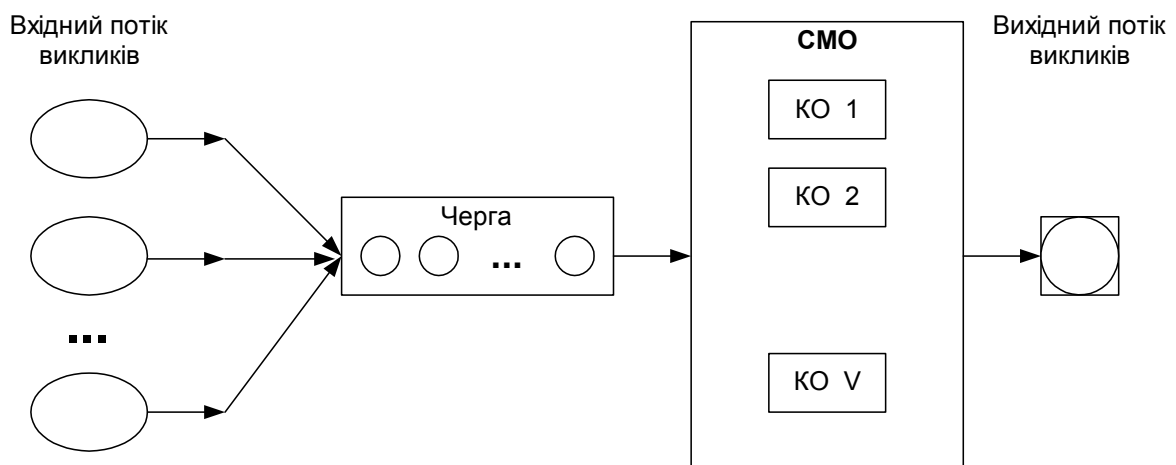
# 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ТЕЛЕТРАФІКУ. КЛАСИФІКАЦІЯ СМО. СИМВОЛІКА КЕНДАЛА – БАШАРІНА

Перший розділ включає в себе основні поняття, необхідні для формулювання і вирішення задач теорії телетрафіку, класифікацію цих задач та класифікацію систем масового обслуговування з використанням міжнародно прийнятої символіки Кендала – Башаріна. При вивченні цього розділу рекомендується використовувати літературу [1], [2].

## 1.1 Поняття СМО. Приклади СМО.

Термін “система масового обслуговування (СМО)” об’єднує досить широке коло систем в телефонних мережах, виробництві, транспорті, сфері обслуговування тощо.

Функціональна схема СМО наведена на рисунку 1.1 і відбиває загальні принципи обслуговування вхідного потоку викликів  $v$  – канальною СМО. Виклики з деякого потоку надходять на обслуговування в СМО, займаючи вільні канали. При зайнятості всіх каналів можливе очікування викликів у черзі. Після завершення обслуговування виклики звільняють канали і лишають систему.



СМО – система масового обслуговування

КО – канал обслуговування

Рисунок 1.1. Функціональна схема СМО.

Під таку схему підпадають наступні приклади з різних галузей економіки: обслуговування покупців в супермаркеті, заправка машин на АЗС, надання злітно-посадочної смуги літакам в аеропорту, контроль якості виробів на виході збирального конвеєру, відновлення виробничого обладнання та ін. Математичне обґрунтування роботи таких систем надає теорія масового обслуговування.

Звичайно, СМО також широко розповсюджені і в телекомунікаційних мережах: локальні (районні) та міжміські телефонні станції, комутатори та маршрутизатори обчислювальних мереж, взагалі, – будь-які комутаційні системи функціонують як СМО. Функціонування СМО в телефонних мережах має свої особливості, які й розглядає підрозділ теорії масового обслуговування – “*теорія телетрафіка*”.

Теорія телетрафіка розглядає як основу всіх процесів в телекомунікаційних системах передачу та обробку *повідомлень (message)*, під якими будемо розуміти одновимірне представлення інформації з відокремленим початком і кінцем. Появу в системі повідомлення будемо ототожнювати з *вимогою (arrival)* на його передачу або обробку. Обробка або передача кожного повідомлення займає деякий кінцевий час – *час обслуговування (holding time)*.

Частина системи, що приймає участь в процесі передачі або обробки повідомлення так, що одночасно з ним ніяке інше повідомлення не може оброблятися цією частиною, назвемо *каналом обслуговування (server)*. Таким чином, маючи рівно один КО, система в кожній момент часу здатна обслуговувати не більше чим одну вимогу. Якщо на таку систему, зайняту обслуговуванням, протягом інтервалу часу обслуговування надійде ще одна вимога, то вона не зможе отримати обслуговування.

Це найпростіший випадок ресурсного конфлікту – вимоги, що надходять одна за одною, не можуть бути обслужені негайно при надходженні або, як кажуть, в реальному масштабі часу через те, що канал обслуговування не встигає обслужити вимоги за час між їх надходженнями.

Конфлікт не виникне, якщо система буде мати не один, а декілька каналів обслуговування, ввімкнених так, щоб вхідні вимоги розподілялися б для обслуговування на бідь-який вільний з них в даний момент.

Тим не менш, якщо час обробки не безкінечно малий порівняно з інтервалом між надходженням вимог, то і в системі з декількома каналами обслуговування може виникнути ресурсний конфлікт – вимога при надходженні не зможе отримати негайного обслуговування, оскільки усі канали виявляться зайнятими на даний момент. В такому випадку система може просто проігнорувати вимогу. Вона буде відкинута, а система, як кажуть, буде вважатися **заблокованою**. Імовірність такої події є важливою характеристикою системи. Її прийнято називати **імовірністю блокування** (*blocking probability*).

Для уникнення таких ситуацій, в системі може бути передбачений спеціальний буфер пам'яті, в котрий будуть поміщатися вимоги, які не можуть бути обслуговані негайно при надходженні через зайнятість усіх каналів. Тобто в системі організується **черга (queue) вимог** і така СМО розглядається як система з чергами (*queuing system*). В черзі може опинитися не одна, а декілька вимог, якщо кількість вимог за певний інтервал часу перевищить кількість звільнившись за цей час каналів обслуговування. При виконанні певних умов черга не буде безкінечно зростати і усі вимоги рано чи пізно будуть обслуговані, однак час їх перебування в черзі буде різним і може розглядатися як випадкова величина. Розподіл цієї випадкової величини також є суттєвою характеристикою системи обслуговування. Часто для оцінки якості використовують тільки її середнє значення – **середній час очікування обслуговування** (*average waiting time*).

Таким чином, недостатність ресурсів в телекомунікаційній системі може призвести або до втрат повідомлень, або до затримки їх обслуговування.



## 1.2 Основні поняття теорії телетрафіка

Дамо визначення основним поняттям теорії телетрафіка, які будемо широко використовувати при викладенні подальшого матеріалу.

**Повідомлення** – сукупність інформації, що передається через комутаційну систему (КС). Характеризується такими показниками: обсяг, тривалість заняття, категорія, адреса приймача, адреса джерела, форма інформації – аналогова чи дискретна. Розрізняють:

- обслуговане (передане від джерела до приймача)
- втрачене (через зайнятість КС, не відповідь приймача)
- затримане (чекає початку передачі)
- умовно втрачене (затримане більше допустимого часу).

**Виклик** – вимога джерела на встановлення з'єднання для передачі повідомлення. Характеризується моментом надходження. Розрізняють:

- обслугований (повністю або частково на деякій ділянці)
- втрачений (відмова в обслуговуванні або помилка з'єднання)
- затриманий (чекає)
- первинний
- повторний

**Зайняття** – використання деякого приладу для встановлення з'єднання. Характеризується моментом початку і тривалістю.

**Звільнення** – повернення приладу в початковий вільний стан. Характеризується моментом початку.

**Потік викликів (повідомлень, занять, звільнень)** – множина послідовних моментів надходження викликів (повідомлень, занять, звільнень). Потік викликів називають **детермінованим**, якщо відома послідовність моментів надходження викликів та **випадковим** у протилежному випадку.

Найчастіше зустрічаються випадкові потоки викликів. В подальшому будемо розглядати саме цей випадок.

### 1.3 Предмет і задачі теорії телетрафіка

Предметом вивчення теорії телетрафіка є процеси в системах масового обслуговування, що виникають при надходженні й обслуговуванні потоків викликів, та їх кількісні характеристики.

Математична модель системи масового обслуговування (СМО) містить наступні основних елементи: потік повідомлень, що надходять, (вхідний потік викликів), систему обслуговування, що має то чи інше число каналів, визначену дисципліну обслуговування та забезпечує необхідні характеристики якості.

Поняття *вхідного потоку* викликів включає інформацію про модель потоку викликів (вимог на з'єднання), закон розподілу тривалості обслуговування (передачі) повідомлення, множину адрес джерел і приймачів повідомлень, а також тип каналу, який потрібен для передачі повідомлень, та спосіб передачі – аналоговий чи дискретний. *Система обслуговування* характеризується структурою побудови (кількість каналів, фазність, доступність) та набором структурних параметрів. Під *дисципліною обслуговування* викликів розуміють: спосіб обслуговування (з наявними втратами, очікуванням, повтором чи комбінований), порядок обслуговування (за чергою, у випадковому порядку чи з пріоритетом), а також іншу інформацію, яка характеризує взаємодію потоку повідомлень з системою обслуговування. До *характеристик якості* обслуговування відносять імовірність явної або умовної втрати повідомлення, середній час затримки повідомлення, середня довжина черги, імовірність втрати первинного або повторного виклику, інтенсивність обслугованого навантаження і т.п.

При дослідженні СМО можуть вирішуватися:

- *задачі аналізу СМО* – визначення, які характеристики якості забезпечить СМО із заданою структурою і параметрами для відомого вхідного потоку повідомлень;

- **задачі параметричного синтезу** – визначення, які параметри системи обслуговування з фіксованою структурою треба встановити, щоб забезпечити для відомого вхідного потоку повідомлень задану якість обслуговування;
- **задачі структурного синтезу** – визначення, яку структуру системи обслуговування з фіксованими параметрами треба встановити, щоб забезпечити для відомого вхідного потоку повідомлень задану якість обслуговування;
- **задачі оптимізації СМО** – визначення, яку структуру і параметри системи треба встановити, щоб забезпечити мінімальну вартість її функціонування при підтримці заданої якості обслуговування.

В телекомунікаційних системах заявка асоціюється, перш за все, зі спробою абонента отримати доступ до ресурсів мережі для передачі або прийому повідомлень. Наприклад, знімаючи слухавку телефонного апарату, абонент телефонної мережі породжує сигнал, який і є заявкою на обслуговування його цією мережею. Якщо апарат ввімкнено через блокіратор, і після зняття слухавки абонент не чує сигналу, то мережа відмовляє йому в обслуговуванні, заявка відкидається. Наявність гудка означає, що заявка прийнята й абонент отримує обслуговування.

Абонент телефонної мережі створює заявки й іншого типу – набір номера абонента, що викликається. Ця заявка також може бути виконана, якщо ресурси мережі дозволять установити з'єднання між усіма телефонними станціями, які забезпечують передачу мовного сигналу між телефонами цих абонентів. Однак, це відбувається не завжди. Заявка на встановлення з'єднання може бути не задоволена. Імовірність такої події для абонентів телефонної мережі розглядається як характеристика якості обслуговування цієї мережі. Тому розрахунок імовірності відмови в обслуговуванні є прикладом рішення задачі аналізу теорії телетрафіка.

Розглянемо тепер користувачів іншої, комп'ютерної мережі, наприклад Internet. В цьому випадку якість мережі асоціюється з іншою

характеристикою: часом доступу до того чи іншого ресурсу. Причиною уповільнення роботи є черги пакетів, що утворюються в маршрутизаторах. В комп'ютерних (пакетних) мережах заявка на передачу інформації від одного узла до іншого навіть у випадку нестачі мережного ресурса, як правило, не відкидається, а ставиться в чергу на очікування звільнення необхідного ресурса. Тому характеристикою якості обслуговування в цьому випадку вважають час очікування в черзі на обслуговування. Задача розрахунку середнього часу очікування також вирішується в рамках рішення задачі аналізу.

Прикладом задачі параметричного синтезу може бути визначення необхідної швидкодії маршрутизатора для забезпечення нормованого часу затримки обробки пакетів заданої довжини.

При структурному синтезі, наприклад машинної АТС, визначається кількість комутаційних приладів на кожному кроці шукання для забезпечення нормованої імовірності втрати вилику.

#### 1.4 Класифікація СМО. Символіка Кендала – Башаріна

Оскільки модель СМО поєднує в собі сукупність багатьох елементів, класифікацію СМО можна здійснювати за різними ознаками. Для забезпечення універсального підходу в позначенні різних типів СМО та взаєморозуміння інженерів та науковців різних країн, які досліджують ці системи, була розроблена наступна класифікація СМО, відома під назвою “Символіка Кендала – Башаріна” (за прізвищами вчених, що її запропонували).

Символіка складається з шести позицій, що розділяються слешами:

1/2/3/4/5/6

**Перша позиція** – тип потоку, що надходить:

$M$  – найпростіший потік

$M_t$  – пуассонівський потік із змінним параметром (залежить від часу)

$M_r$  – пуассонівський потік з умовним параметром

$M_i$  – примітивний потік

$D$  – детермінований (невипадковий) потік (Determinate)

$E^n$  – потік Ерланга  $n$  – ого порядку

$Ge$  – довільний потік (General)

**Друга позиція** – закон розподілу часу обслуговування виклику

$M$  – експоненціальний

$D$  – детермінований

$G$  – довільний

**Третя позиція** – структура СМО

$V$  – число каналів

$G$  – неповнодоступні канали обслуговування (тобто існує алгоритм, що визначає, які канали доступні яким заявкам). Якщо не вказано, то усі канали обслуговування доступні усім викликам.

$LS$  – багатофазна система (Link System), якщо не вказано, то це – однофазна система, де заявка проходить тільки одну фазу обслуговування деякому каналі

**Четверта позиція** – дисципліна або спосіб обслуговування

$LL$  – без втрат (Loss Less)

$L$  – з втратами (Loss)

$W$  – з очікуванням (чергою) (Wait)

$R$  – з повторенням (Repeat)

$WL$  – з умовними втратами (комбінований)

**П'ята позиція** – тип черги

$I$  – індивідуальна, якщо не вказано – загальна черга до усіх каналів обслуговування

$SP$  – рівно імовірна (Same Probability)

$FF$  – демократична (FIFO)

$LF$  – стекова (LIFO)

$PR$  – з пріоритетом (Priority)

1) *PRR* – відносний (Relative) – заявка чекає звільнення каналу

2) *PRA* – абсолютний (Absolute) – заявка перериває обслуговування і займає канал

**Шоста позиція** – спосіб заняття каналу

*S* – послідовне (Sequential)

*R* – випадкове (Random)

#### Приклад 1.1

$M/M/10/L//R$  – означає 10-канальну систему з втратами, на вхід якої надходить найпростіший потік викликів, час обслуговування розподілено за експоненціальним законом, канали займаються випадково.

#### Приклад 1.2

$M/G/5/W/FF/$  – означає 5-канальну систему з очікуванням, на вхід якої надходить найпростіший потік викликів, час обслуговування розподілено за довільним законом, черга демократична.

#### Приклад 1.3

$M_i/M/20/LL//S$  – означає 20-канальну систему без втрат, на вхід якої надходить примітивний потік викликів, час обслуговування розподілено за експоненціальним законом, канали займаються послідовно.

#### Приклад 1.4

$M/M/5/R$  – означає 5-канальну систему з повторенням, яка обслуговує найпростіший потік викликів, час обслуговування розподілено за експоненціальним законом.

### **1.5 Контрольні питання**

1. Навести приклад задачі аналізу теорії телетрафіку.
2. Навести приклад задачі структурного синтезу теорії телетрафіку
3. Навести приклад задачі параметричного синтезу теорії телетрафіку

4. До якого класу задач можна віднести наступні:
  - a. визначити кількість каналів обслуговування, які забезпечать необхідний рівень якості обслуговування заданого потоку викликів;
  - b. знайти долю викликів заданого потоку, які отримують відмову в обслуговуванні в даній системі
5. Дисципліни обслуговування в СМО та їх символічне позначення.

### **1.6 Завдання для самостійної роботи**

1. Розшифрувати позначення:
  - a.  $M_r / D // 15 / L // S$
  - b.  $D / G / 50 / W / SP$
  - c.  $M / M / 1 / R$
2. Навести позначення в символіці Кендала-Башаріна:
  - a. 1-канальна система з очікуванням, що обслуговує найпростіший потік викликів, час обслуговування розподілено за експоненційним законом;
  - b. 5-канальна система з втратами, що обслуговує не випадковий потік викликів, час обслуговування детермінований.

## 2 МОДЕЛІ ПОТОКІВ ВИКЛИКІВ

Виклики, що надходять на вхід СМО, формують потік дискретних подій, який найчастіше визначають множиною моментів часу їх надходження  $\Xi = \{t_i\}$ . Для детермінованого потоку значення  $t_i$  задаються таблицею або формулою. Але на практиці здебільшого виклики надходять випадково, отже значення моментів надходження викликів є значення безперервної випадкової величини, яку можна задати, використовуючи відповідний апарат теорії імовірностей [5].

### 2.1 Способи опису випадкових потоків

Випадкові потоки можна задати з допомогою (рис. 2.1):

- закону розподілу інтервалів часу між викликами  $z_k$
- закону розподілу моментів надходження викликів  $t_k$
- сімейства  $F_i(t_1, t_2)$  – імовірностей надходження  $i$  викликів за інтервал  $[t_1, t_2]$
- функції  $x(t)$ , що дорівнює числу викликів, які надійшли в  $[0, t]$

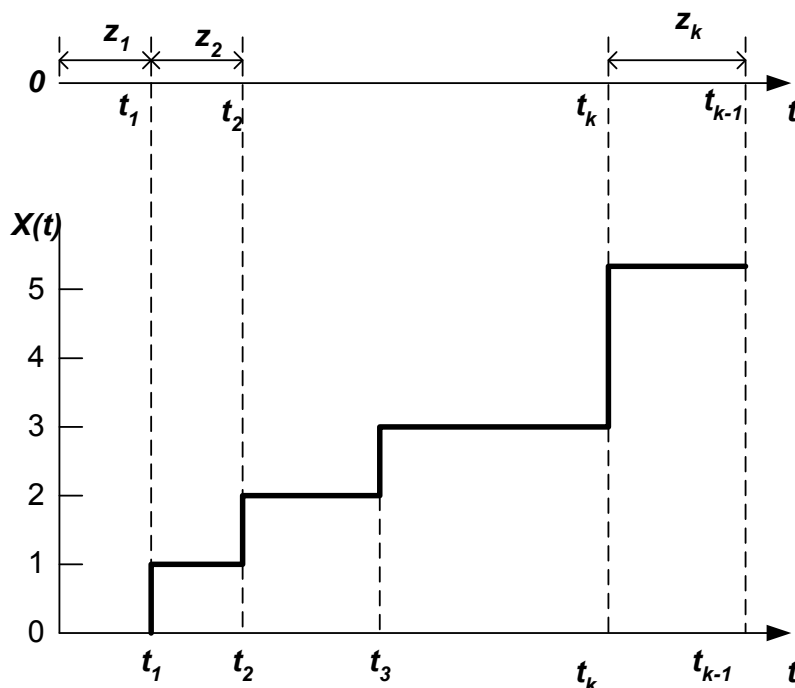


Рисунок 2.1. Способи завдання потоків викликів



## 2.2 Властивості випадкових потоків.

Випадкові потоки викликів класифікуються залежно від належності або відсутності трьох наступних властивостей: *стаціонарності, післядії та ординарності*.

*Стаціонарність* означає, що з часом імовірнісні характеристики потоку не змінюються. Стаціонарність потоку рівнозначна постійній щільності імовірності надходження викликів у будь-який момент часу, інакше кажучи, для стаціонарного потоку імовірність надходження  $i$  викликів за інтервал часу  $\Delta t$  залежить тільки від розміру інтервалу і не залежить від його розташування на осі часу:

$$P_i(t + \Delta t) = P_i(t_i + \Delta t) = P_i(\Delta t) \quad (2.1)$$

Будь-який стаціонарний потік можна задати сімейством умовних імовірностей  $F_i(t)$  надходження  $i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) викликів у проміжку  $t$ , якщо в початковий момент цього проміжку надійшов виклик.

Реальний (наприклад на АТС або ММТС) потік викликів має явно виражений нестаціонарний характер. Інтенсивність потоку – число викликів за одиницю часу – істотно залежить від періоду доби, дня тижня і навіть пори року. Проте завжди можна виділити одно- або двогодинні відрізки часу, протягом яких потік викликів близький до стаціонарного.

*Післядія* означає залежність імовірнісних характеристик потоку від попередніх подій. Іншими словами, імовірність надходження  $i$  викликів в інтервалі  $[t_1, t_2]$  залежить від числа, часу надходження та тривалості обслуговування викликів до моменту  $t_1$ . Для випадкового потоку без післядії умовна імовірність надходження викликів в інтервалі  $[t_1, t_2]$ , обчислена при будь-яких припущеннях про процес обслуговування викликів до моменту  $t_1$ , дорівнює безумовній:

$$P_i(t_1, t_2)_{t < t_1} = P_i(t_1, t_2) \quad (2.2)$$

Тому подібний потік можна виразити сімейством безумовних імовірностей  $P_i(t_1, t_2)$  надходження  $i$  викликів в інтервалі  $[t_1; t_2]$ . Стационарний потік без післядії можна задати сімейством імовірностей  $P_i(t)$  надходження  $i$  викликів у будь-якому інтервалі довжиною  $t$ .

Потік викликів, що надходять від достатньо великої групи джерел, близький за своїми властивостями до потоку без післядії, якщо при цьому не враховувати повторних викликів. Потік від малої групи, навпаки, має помітну післядію, оскільки число вільних джерел (які можуть надсилати виклики) залежить від процесу обслуговування попередніх викликів, чим і визначається післядія потоку.

Потік повторних викликів також являється прикладом потоку з післядією, оскільки повторний виклик виникає як результат втрати попереднього виклику, тобто залежить від попередніх подій.

**Ординарність** означає практичну неможливість групового надходження викликів. Інакше кажучи, імовірність надходження двох або більше викликів за будь-який безконечно малий проміжок часу  $\Delta t$  є величиною безконечно малою більш високого порядку, ніж,  $\Delta t$  тобто

$$P_{i \geq 2}(\Delta t) = o(\Delta t) \quad (2.3)$$

### 2.3 Характеристики випадкових потоків

До основних характеристик випадкового потоку відносять провідну функцію, параметр та інтенсивність [1]. **Провідна функція** випадкового потоку  $\bar{x}(0, t)$  є математичне очікування числа викликів за час  $[0, t)$ .

**Параметр** потоку  $\lambda(t)$  в момент часу  $t$  є щільність імовірності викличного моменту:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{i \geq 1}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.4)$$

Таким чином, імовірність надходження хоча б одного виклику в інтервалі часу  $[t, t + \Delta t]$  з точністю до нескінченно малої пропорційна інтервалу часу та параметру потоку  $\lambda(t)$ :

$$P_{i \geq 1}(t, t + \Delta t) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t) \quad (2.5)$$

Для стаціонарних потоків імовірність надходження викликів не залежить від часу, тобто,  $P_{i \geq 1}(t, t + \Delta t) = P_{i \geq 1}(\Delta t)$ , тому параметр стаціонарного потоку постійний. Відповідно одержуємо:

$$P_{i \geq 1}(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t) \quad (2.6)$$

**Інтенсивність** стаціонарного потоку  $\mu$  є математичне очікування числа викликів за одиницю часу, тобто це величина, зворотно-пропорційна середньому часу між викликами. Для нестаціонарних потоків використовується поняття **середньої та миттєвої інтенсивності**. **Середня інтенсивність** потоку в інтервалі часу  $[t_1; t_2]$  є математичне чекання числа викликів у цьому інтервалі часу за одиницю часу. Середню інтенсивність потоку можна виразити через провідну функцію:

$$\mu(t_1, t_2) = \frac{[\bar{x}(0, t_2) - \bar{x}(0, t_1)]}{(t_2 - t_1)} \quad (2.7)$$

**Миттєва інтенсивність** потоку  $\mu(t)$  в момент часу  $t$  є похідною провідної функції потоку по  $t$ :

$$\mu(t) = \bar{x}'(0, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\bar{x}(0, t + \Delta t) - \bar{x}(0, t)]}{\Delta t} \quad (2.8)$$

Якщо миттєва інтенсивність характеризує потік викликів, то параметр - потік викличних моментів. Тому завжди  $\mu(t) \geq \lambda(t)$ , а рівність має місце тільки для ординарних потоків, коли в кожний викличний момент надходить тільки один виклик.

При розгляді конкретних математичних моделей потоків зручно, використовуючи ознаку післядії, розподілити всі досліджувані моделі по трьох класах: потоки без післядії, із простою та обмеженою післядією. У клас потоків без післядії входять: найпростіший, пуассонівський із змінним або випадковим параметром, неординарний пуассонівський та пуассонівський із неординарними викликами. До потоків із простою післядією відносять: примітивний, згладжений, потік з повторними викликами та потік звільнень. Обмежену післядію мають рекурентний потік, потік Пальма, потік Ерланга

## 2.4 Найпростіший потік викликів

### 2.4.1 Розподіл Пуассона

Стационарний ординарний потік без післядії називається *найпростішим (пуассонівський, потоком чистої випадковості I роду)*. Задається найпростіший потік сімейством імовірностей  $P_i(t)$  надходження  $i$  ( $i = \overline{0, \infty}$ ) викликів в інтервалі часу  $t$ . Для визначення функції  $P_i(t)$  проведемо дослідження процесу надходження  $t$  викликів протягом двох сусідніх довільно розташованих на осі часу інтервалів  $t$  та  $\Delta t$ .

В інтервал  $[t + \Delta t]$  може потрапити  $i$  викликів в результаті однієї з таких незалежних подій:

- за інтервал  $t$  надійде  $i$  викликів, а за інтервал  $\Delta t$  – 0 викликів,
- або за інтервал  $t$  надійде  $(i - 1)$  викликів, а за інтервал  $\Delta t$  – 1
- ...
- за інтервал  $t$  надійде 0 викликів, а за інтервал  $\Delta t$  –  $i$  викликів:

Тоді

$$P_i(t + \Delta t) = P(i, t, 0, \Delta t) + P(i - 1, t, 1, \Delta t) + P(i - 2, t, 2, \Delta t) + P(1, t, i - 1, \Delta t) + P(0, t, i, \Delta t) = \sum_{j=0}^i P(i - j, t, j, \Delta t), \quad (2.9)$$

де  $P(i-j, t, j, \Delta t)$  – імовірність такої спільної події: в інтервалі часу  $t$  надходить  $i-j$  викликів, а в інтервалі часу  $\Delta t$  надходить  $j$  викликів.

Оскільки спільно відбуваються дві незалежні події (через відсутність післядії імовірність надходження викликів в інтервалі часу  $\Delta t$  не залежить від числа викликів, що надійшли за час  $t$ , імовірність такої спільної події дорівнює добутку двох безумовних імовірностей  $P_{i-j}(t)$  і  $P_j(\Delta t)$ . Отже (2.9) приймає вид:

$$P_i(t + \Delta t) = \sum_{j=0}^i P_{i-j}(t) P_j(\Delta t). \quad (2.10)$$

Рівняння (2.10) можна значно спростити, якщо врахувати умову ординарності (2.3)

$$P_i(t + \Delta t) = P_i(t) P_0(\Delta t) + P_{i-1}(t) P_1(\Delta t) + 0(\Delta t). \quad (2.11)$$

Імовірність  $P_1(\Delta t)$  визначаємо з виразу (2.6) також з урахуванням ординарності потоку:

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + 0(\Delta t), \quad (2.12)$$

а імовірність:

$$P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) - P_{i \geq 2}(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + 0(\Delta t). \quad (2.13)$$

Підставимо вираз (2.12) і (2.13) у систему рівнянь (2.11), потім перенесемо в ліву частину рівнянь  $P_i(t)$  та поділимо обидві частини рівнянь на  $\Delta t$ :

$$P_i(t + \Delta t) = P_i(t)(1 - \lambda \Delta t) + P_{i-1}(t) \lambda \Delta t + 0(\Delta t).$$

$$P_i(t + \Delta t) = P_i(t) - P_i(t) \lambda \Delta t + P_{i-1}(t) \lambda \Delta t + 0(\Delta t).$$

$$P_i(t + \Delta t) - P_i(t) = -\lambda P_i(t) \Delta t + \lambda P_{i-1}(t) \Delta t + 0(\Delta t).$$

$$\frac{P_i(t + \Delta t) - P_i(t)}{\Delta t} = -\lambda P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t) + o(\Delta t)\Delta t.$$

Переходячи до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$ , одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$P_i'(t) = -\lambda P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t). \quad (2.14)$$

Початковими умовами для системи (2.14) є

$$P_0(0) = 1; \quad P_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (2.15)$$

Розв'язанням (2.14) з урахуванням умов (2.15) є **формула (розподіл) Пуассона:**

$$P_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}. \quad (2.16)$$

Цей вираз визначає **імовірність надходження числа викликів  $i$  за час  $t$** .

Крім того, можна обчислити:

- імовірність  $P_0(t)$  відсутності викликів потоку за час  $t$ :

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \quad (2.17)$$

- імовірність наявності викликів потоку за час  $t$ :

$$P_{\geq 1}(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (2.18)$$

- імовірність наявності не більше  $k$  викликів потоку за час  $t$ :

$$P_{\geq k}(t) = \sum_{i=0}^k P_i(t). \quad (2.19)$$

- імовірність наявності не менше  $k$  викликів потоку за час  $t$ :

$$P_{\geq k}(t) = \sum_{i=k}^{\infty} P_i(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} P_i(t). \quad (2.20)$$

Приклад 2.1.

Виклики найпростішого потоку надходять в середньому через 2 хв.

Знайти : 1) імовірність надходження 2 викликів за 1 хв.

2) імовірність відсутності виклику за 2 хв.

3) імовірність надходження 3 викликів за 2 хв.

## Рішення

Для того, щоб скористатися формулою Пуассона, потрібно знати параметр потоку  $\lambda$ . Оскільки в найпростішому потоці параметр та інтенсивність співпадають і зворотно пропорційні середньому часу між вікличками, то:

$$\lambda = \frac{1}{z} = 0,5 \text{ викл/хв}$$

$$1) \lambda t = 0,5; P_2 = \frac{(0,5)^2}{2! \cdot e^{-0,5}} = 0,0758.$$

$$2) \lambda t = 1; P_0 = e^{-1} = 0,3679.$$

$$3) \lambda t = 0,5; P_3 = \frac{(1)^3}{3! \cdot e^{-1}} = 0,0613.$$

Приклад 2.2.

Для найпростішого потоку з параметром 30 викл/год знайти імовірність надходження 2 викликів за 2 хв., та не більше 3 викликів за 5 хв.

## Рішення

Спочатку узгодимо одиниці виміру параметру та часових інтервалів:

$$\lambda = 30 \text{ викл/год} = 0,5 \text{ викл/хв}$$

$$1) \lambda t = 0,5 \cdot 2 = 1;$$

$$P_2 = \frac{(1)^2}{2! \cdot e^{-1}} = 0,18.$$

$$2) \quad \lambda t = 2,5;$$

$$P_{\leq 3} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = e^{-2,5} + 2,5 \cdot e^{-2,5} + \frac{2,5^2}{2 \cdot e^{-2,5}} + \frac{2,5^3}{6 \cdot e^{-2,5}} = 0,76.$$

### 2.4.2 Аналіз розподілу Пуассона

Проаналізуємо розподіл Пуассона, тобто з'ясуємо коли значення імовірностей зростають, коли убивають, та які мають максимуми. Для чого розглянемо співвідношення двох послідовних членів:  $i - \text{го}$  та  $(i - 1) - \text{го}$ .

$$\frac{P_i(t)}{P_{i-1}(t)} = \frac{\frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}}{\frac{(\lambda t)^{i-1} e^{-\lambda t}}{(i-1)!}} = \frac{\lambda t}{i}$$

Тут можливі 2 ситуації:

- 1)  $\lambda t / i \geq 1$ , тобто при  $i \leq \lambda t$  ряд зростає:  $P_i(t) \geq P_{i-1}(t)$
- 2)  $\lambda t / i \leq 1$ , тобто при  $i \geq \lambda t$  ряд убиває:  $P_i(t) \leq P_{i-1}(t)$

Таким чином, із зростанням  $i$  імовірність  $P_i(t)$  зростає, поки  $i < \lambda t$  і починає убивати при  $i > \lambda t$ . Розподіл Пуассона має наступні **максимуми**:

- 2 максимуми при  $\lambda t$  цілому:  $i_1 = \lambda t, i_2 = \lambda t - 1$ ;
- 1 максимум при  $\lambda t$  дробовому:  $i = [\lambda t]$  (квадратними дужками позначено цілу частину від  $\lambda t$ ).

Побудуємо розподіл Пуассона для  $\lambda t = 5$ . Розраховані за (2.16) значення імовірностей наведено в таблиці 2.1, графік – на рис. 2.2 а) На рис.2.2.б) і в) наведені аналогічні графіки для  $\lambda t = 0,5$  і  $\lambda t = 3,5$ .

Таблиця 2.1

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_i$	0,0067	0,034	0,084	0,1404	0,175	0,175	0,146	0,104	0,065	0,036



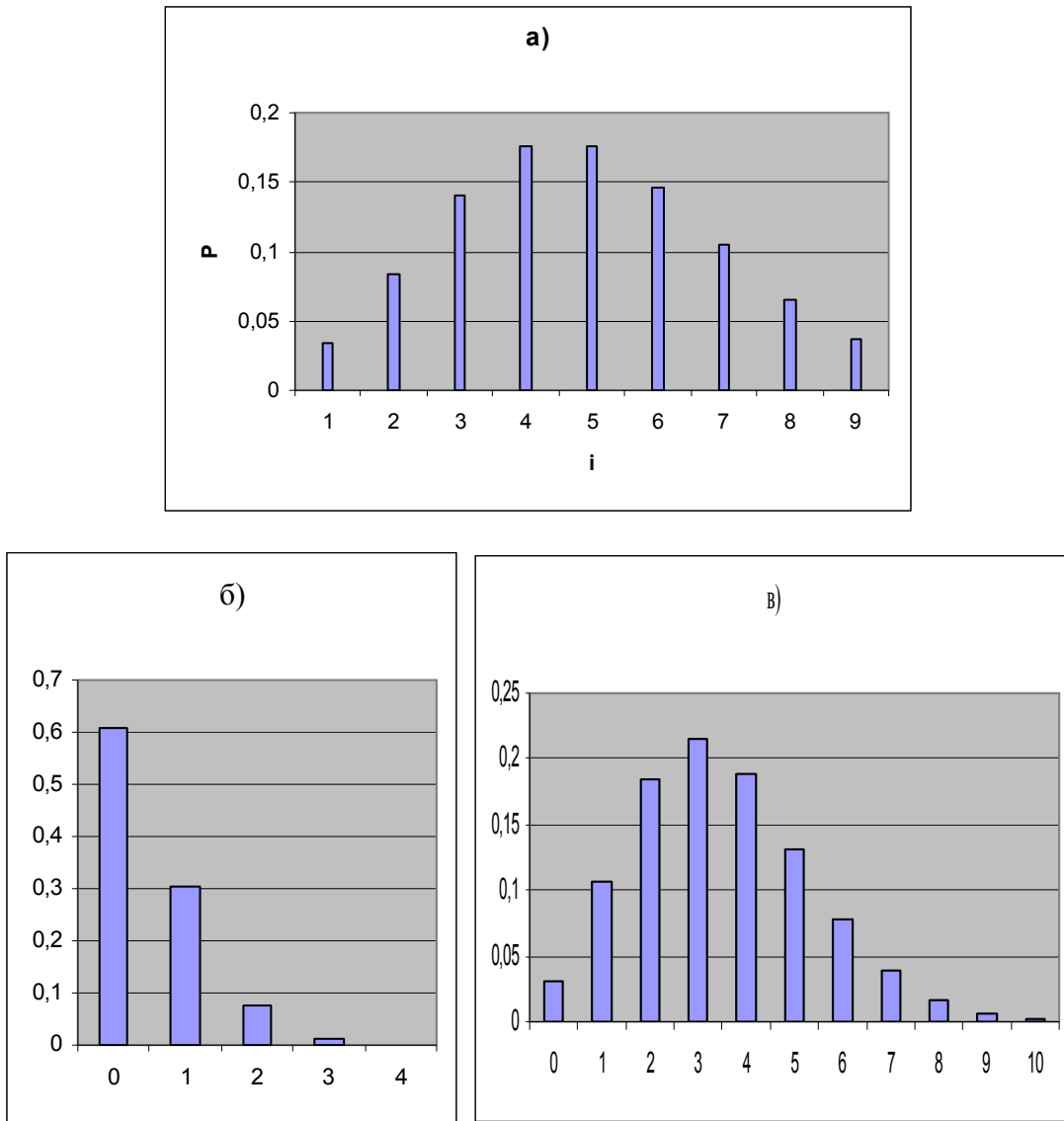


Рисунок 2.2. Графіки розподілу Пуассона для  
 а)  $\lambda t = 5$ , б)  $\lambda t = 0,5$ , в)  $\lambda t = 3,5$

Як видно з рисунка 2.2 а), при  $\lambda t = 5$  значення імовірностей зростають до  $i = 4$ , мають два максимуми  $i = 4$  та  $i = 5$ , після чого починають убувати. У випадку, коли  $\lambda t = 0,5$ , максимум розподілу Пуассона спостерігається для  $i = 0$ , зростаюча частина графіку відсутня (бо  $i$  не може приймати значення менше 0). При  $\lambda t = 3,5$ , максимум розподілу Пуассона спостерігається для  $i = 3$ , значення імовірностей зростають до цього значення, після чого починають убувати.

Приклад 2.3

Визначити найбільш імовірне число викликів найпростішого потоку з параметром 120 викл/год за 180 с.

Рішення

$$\lambda t = \frac{120}{60 \cdot 3} = 6;$$

$$P_{\max} = P_6 = P_5$$

Дійсно:

$$P_6 = \frac{(6)^6}{6! \cdot e^{-6}}.$$

$$P_5 = \frac{(6)^5}{5! \cdot e^{-5}}.$$

Тобто,  $P_5 = P_6$

Отже, найбільш імовірним є надходження 5 або 6 викликів такого потоку.

**Важливою особливістю** розподілу Пуассона є рівність математичного очікування та дисперсії випадкової величини, розподіленої за цим законом.

За визначенням, математичне очікування  $M_x$  дискретної випадкової величини  $X$ , що має відомий закон розподілу  $p(x)$ :

$$M_x = M[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \times p(x).$$

Для нашого випадку випадкова величина  $i$  (кількість викликів, що потрапила до інтервалу заданої довжини), розподілена за законом Пуассона з імовірностями, що визначаються (2.16). Тоді

$$M_i = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} = (\lambda t) e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \lambda t.$$

Аналогічно

$$D_i = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 P_i(t) - (M_i)^2 = e^{-\lambda t} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i^2 (\lambda t)^i}{i!} - (\lambda t)^2 = \lambda t.$$

Таким чином,

$$M_i = D_i = \lambda t.$$

Ця властивість використовується на практиці для обґрунтованого висунення гіпотези, чи можна рахувати заданий потік найпростішим. Перевірку цієї статистичної гіпотези здійснюють з використанням відповідних статистичних критеріїв, наприклад – критерію Пірсона [5].

### 2.4.3 Розподіл інтервалу між викликами у найпростішому потоці

Вираз (2.16) є одним з можливих способів завдання найпростішого потоку. Іншим способом може служити розподіл інтервалу  $z$  між сусідніми викликами  $P(z < t)$ . Визначимо  $P(z < t)$  через імовірність протилежної події:

$$P(z < t) = 1 - P(z > t). \quad (2.21)$$

означає, що за час  $t$  не надійде жодного виклику.

$$P(z > t) = P_0(t).$$

Тоді, обчислюючи  $P_0(t)$  за формулою Пуассона,

$$P(z < t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (2.22)$$

Диференціюємо (2.22) по  $t$ , знаходимо щільність розподілу

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (2.23)$$

Закон розподілу із щільністю (2.23) називається експоненціальним, а  $\lambda$  – його параметром. Основною властивістю цього закону є наступна: якщо інтервал, розподілений за експоненціальним законом з параметром  $\lambda$ , вже

тривав якийсь час  $\tau$ , то його залишок також розподілений за експоненціальним законом з тим же параметром  $\lambda$  і не залежить від  $\tau$ .

Доведемо це. Припустимо, що з моменту надходження останнього виклику пройшов час  $\tau$  і визначимо імовірність того, що до надходження наступного виклику пройде не менше  $t$  одиниць часу.

За теоремою множення імовірність того, що одночасно відбудуться дві залежні події, дорівнює добутку імовірності першої події на умовну імовірність другої, обчислену при умові, що перша подія мала місце.

$$\begin{aligned} P(z > \tau + t) &= P(z > \tau) \times P_{\tau}(z > t). \\ P_0(\tau + t) &= P_0(\tau) \times P_{\tau}(z > t). \\ e^{-\lambda(\tau+t)} &= e^{-\lambda\tau} \times P_{\tau}(z > t). \\ P_{\tau}(z > t) &= e^{-\lambda(\tau+t)} / e^{-\lambda\tau} = e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Тобто, умовна імовірність надходження виклику потоку через  $t$  одиниць часу, обчислена при умові, що з моменту надходження останнього виклику пройшов час  $\tau$ ,  $P_{\tau}(z > t)$  не залежить від  $\tau$  і дорівнює безумовній:

$$P_{\tau}(z > t) = P(z > t) = e^{-\lambda t}$$

Це свідчить, що експоненціальний закон є математичним вираженням властивості відсутності післядії.

Визначимо математичне очікування, дисперсію і середньоквадратичне відхилення інтервалу  $z$ :

$$\begin{aligned} M_z &= \int_0^{\infty} t p(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \\ D_z &= \int_0^{\infty} t^2 p(t) dt - M_z^2 = \int_0^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \\ \sigma_z &= \sqrt{D_z} = 1/\lambda. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$M_z = \sigma_z = 1/\lambda. \quad (2.25)$$

Отриманий збіг величин  $M_z$  и  $\sigma_z$  характерний для експоненціального розподілу. Цю властивість також використовують на практиці для попередньої перевірки відповідності реального потоку моделі найпростішого.

#### 2.4.4 Перевірка відповідності реального потоку моделі найпростішого

Досить часто при дослідженні процесів, що відбуваються в телекомунікаційних системах, в наявності є статистична інформація, отримана в ході спостереження за реальними вхідними та вихідними потоками. Для використання отриманих вище формул треба впевнитися, що ці потоки можна вважати найпростішими.

Для перевірки даних, отриманих статистичним шляхом, використовують різні статистичні критерії, наприклад критерій Пірсона [2].

2 підходи, залежно від того, які вимірювання здійснювались для реального потоку.

##### I спосіб.

Якщо підраховувалась кількість викликів, що потрапили до послідовності часових інтервалів заданої довжини, то перевіряється їх відповідність розподілу Пуассона. Найпростішою ознакою такого розподілу є рівність точечних оцінок математичного очікування та дисперсії, тобто вбіркового середнього та виправленої дисперсії.

Таким чином, якщо з деякої генеральної сукупности  $X(t)$  – значень кількості викликів, що потрапили до послідовності часових інтервалів заданої довжини, зроблено вибірку та виконано її статистичну обробку, то можна отримати таблицю статистичного розподілу дискретної випадкової величини у вигляді таблиці 2.2.

Статистичний розподіл кількості викликів потоку, що потрапили у заданий інтервал

$X(t)_i$	$X(t)_1$	$X(t)_2$	...	$X(t)_k$
$n_i$	$n_1$	$n_2$	...	$n_k$

де  $X(t)_i$  – кількість викликів, що попали у  $n_i$  інтервалів (загальна кількість інтервалів  $\sum_{i=1}^k n_i = N$ ).

Після чого обчислюються статистичні оцінки математичного очікування та дисперсії числа викликів, що потрапили до кожного інтервалу:

Вибіркове середнє:

$$M_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k X(t)_i \cdot n_i.$$

Виправлена дисперсія:

$$D_x = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k \{X(t)_i - M_x\}^2 \cdot n_i.$$

При  $M_x \approx D_x$  доцільно висувати і перевіряти гіпотезу, що потік є найпростішим. Перевірка гіпотези здійснюється за відомими статистичними критеріями, наприклад критерієм Пірсона (додаток 1).

### II спосіб.

Якщо вимірювались інтервали часу між двома послідовними викликами, то перевіряється їх відповідність експоненціальному розподілу, тобто рівність математичного очікування та середньоквадратичного

відхилення (СКВ). Таким чином, якщо задана таблиця статистичного розподілу випадкової величини у вигляді таблиці 2.3,

Таблиця 2.3

Статистичний розподіл інтервалу між послідовними викликами потоку

$z_i$	$z_1$	$z_2$	...	$z_k$
$n_i$	$n_1$	$n_2$	...	$n_k$

де  $z_i$  – значення часу між послідовними викликами,  $n_i$  – кількість таких значень (загальна кількість вимірів  $\sum_{i=1}^k n_i = N$ ), то обчислюються вбіркоче середнє та виправлене СКВ:

$$M_z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k z_i \cdot n_i .$$

$$D_z = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k \{z_i - M_z\}^2 \cdot n_i .$$

$$\sigma_z = \sqrt{D_z} .$$

При  $M_z \approx \sigma_z$  можна висувати і перевіряти гіпотезу, що потік є найпростішим.

#### Приклад 2.4.

В результаті статистичної обробки інтервалів часу між викликами в потоці тримані наступні характеристики: середнє значення інтервалу:  $M_z = 2c$ ; дисперсія  $D_z = 4,03c$ . Визначити імовірність відсутності викликів за 1 с. Обґрунтувати відповідь.

## Рішення

Оскільки вимірювались інтервали часу між викликами в потоці, користуємось другим способом перевірки і обчислимо  $\sigma_z = \sqrt{D_z} = 2c$ . Тобто,  $M_z \approx \sigma_z$  і потік можна вважати найпростішим. Відповідно, імовірність відсутності викликів за 1 с можна вирахувати за формулою Пуассона, а саме (2.17). Параметр потоку визначаємо як величину, зворотну середньому інтервалу між викликами:

$$\lambda = \frac{1}{z} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ викл/с}$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} = e^{-0,5 \cdot 1} = 0,6.$$

#### 2.4.5 Об'єднання та роз'єднання найпростіших потоків

При об'єднанні декількох найпростіших незалежних потоків утворюється також найпростіший потік з параметром, що дорівнює сумі параметрів початкових потоків.

$$\lambda_{sum} = \sum_i \lambda_i. \quad (2.26)$$

При роз'єднанні найпростішого потоку з параметром  $\lambda$  на  $n$  напрямків так, що кожний виклик початкового потоку з імовірністю  $P_i$  ( $\sum_{i=1}^n P_i = 1$ ) надходить на  $i$ -й напрямок, потік  $i$ -го напрямку також буде найпростішим з параметром  $\lambda \cdot P_i$ . Ці властивості найпростішого потоку широко використовуються на практиці, оскільки значно спрощують розрахунки станційного обладнання та мереж зв'язку.

#### Приклад 2.5.

На ММТС з трьох локальних АТС надходять найпростіші потоки з параметрами, відповідно, 5 викл/с, 3 викл/с і 2 викл/с. Визначити імовірність того, що за 0,1 с на ММТС надійде більше 3 викликів.



## Рішення

Враховуючи, що сумарний потік буде найпростішим з параметром 10 викл/с, потрібну імовірність можна визначити за (2.20):

$$P_{>3} = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3) = 1 - (0,3679 + 0,3679 + 0,184 + 0,0613) = 0,019$$

## 2.5 Нестационарний пуассонівський потік

Якщо потік має властивості ординарності та відсутності післядії, але не має стаціонарності, - це нестационарний пуассонівський потік. Для нього в будь-який момент часу існує кінцевий параметр  $\lambda(t)$ . Якщо  $\lambda(t)$  – визначена функція часу, маємо потік із **змінним параметром**, якщо  $\lambda(t)$  – випадкова функція, маємо потік з **випадковим параметром**.

Функція  $\lambda(t)$  може бути безперервною або східчастою. В останньому випадку параметр потоку змінюється стрибками в заздалегідь визначені або випадкові моменти часу залежно від виду потоку (детермінованого або випадкового).

Пуассонівський потік зі змінним параметром, як нестационарний, задається сімейством імовірностей  $P_i(t_0, \tau)$  надходження  $i$  викликів за час  $[t_0, t_0 + \tau]$ :

$$P_i(t_0, \tau) = \frac{[\lambda(t_0, \tau)]^i}{i!} e^{-\lambda(t_0, \tau)}, \quad i = \overline{0, \infty}. \quad (2.27)$$

де  $\lambda(t_0, \tau)$  - математичне очікування числа викликів в інтервалі  $[t_0, t_0 + \tau]$ .

Відношення  $\frac{\lambda(t_0, \tau)}{\tau}$  є середня інтенсивність потоку викликів в цьому інтервалі.

Для стаціонарного потоку  $\lambda(t) = const$ ,  $\lambda(t_0, \tau) = \lambda\tau$ , формула (2.27) переходить у (2.16).

Модель пуассонівського потоку зі змінним параметром дозволяє при відповідному виборі залежності  $\lambda(t)$  достатньо добре описувати реальний

нестационарний потік, наприклад, процес надходження викликів на телефонну станцію протягом доби.

Клас пуассонівських потоків з випадковим параметром доволі широкий, оскільки можливо використання різних випадкових функцій для завдання параметру потоку  $\lambda(t)$ .

Розглянемо найпростіший випадок. Нехай східчаста функція  $\lambda(t)$  приймає кінцеву множину заздалегідь відомих значень  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ), при цьому  $\lambda_i < \lambda_{i-1}$ . Перехід зі стану  $i$  з параметром  $\lambda_i$  можливий тільки до сусідніх станів  $i-1$  або  $i+1$  з імовірностями відповідно  $p$  і  $q = 1 - p$ . Звичайно, перехід з крайніх станів  $i=1$  і  $i=N$  до сусідніх відбувається з одиничною імовірністю. Тривалість стану  $i$  – випадкова величина, розподілена за експоненціальним законом з параметром  $\alpha$ . Як показано вище (п. 2.4.3), в цьому випадку середня тривалість стану  $i$  дорівнює  $\frac{1}{\alpha}$ . Тобто величина  $\alpha$  характеризує частоту змінення параметру потоку  $\lambda_i$ : чим більше  $\alpha$ , тим швидше змінюється параметр потоку. Імовірності  $p$  і  $q$ , в свою чергу, визначають, як часто зустрічаються різні значення  $\lambda_i$ .

## 2.6 Неординарний пуассонівський потік

Стационарний однородний потік без післядії називається неординарним (груповим) пуассонівським. Моменти надходження викликів такого потоку формують найпростіший потік з параметром  $\lambda$ . Тому імовірність надходження  $i$  викличних моментів в інтервалі  $t$  визначається згідно розподілу Пуассона (2.16). В кожний викличний момент з імовірністю  $p_l$  надходить група з  $l$  ( $l = \overline{1, r}, r \leq \infty$ ) однакових викликів. Величина  $l$  називається характеристикою неординарності потоку. Можливі потоки з постійною або випадковою характеристикою неординарності.

Позначимо  $a_l = \lambda p_l$ . Тоді імовірність надходження  $k$  викликів в інтервалі  $t$ :

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_k \frac{(a_1 t)^{j_1}}{j_1!} \frac{(a_2 t)^{j_2}}{j_2!} \dots \frac{(a_k t)^{j_k}}{j_k!}. \quad (2.28)$$

для усіх  $j$ , відповідаючих співвідношенню  $k = j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \dots + kj_k$

Тобто будь-який неординарний потік можна подати як суперпозицію  $k$  незалежних неординарних пуассонівських потоків з постійною характеристикою неординарності  $l$ , а також відповідними параметром  $a_l$  та інтенсивністю  $la$ . Величину  $a_l$ , таким чином, можна визначити як інтенсивність надходження груп викликів з  $l$  викликами в кожній. Параметр та інтенсивність неординарного потоку відповідно дорівнюють:

$$\lambda = \sum_{l=1}^r a_l, \quad r \leq \infty. \quad (2.29)$$

$$\mu = \sum_{l=1}^r \lambda \cdot l \cdot p_l = \sum_{l=1}^r l \cdot a_l, \quad r \leq \infty.$$

Звичайно,  $\lambda \leq \mu$ .

Дещо подібний до розглянутого потоку пуассонівський потік з неординарними викликами. Під неординарним будемо розуміти виклик, який потребує для свого обслуговування з  $l$  ( $l = \overline{1, r}, r \leq \infty$ ) приладів. В цьому випадку  $l$  є характеристикою неординарності виклику. Якщо інтервали між такими неординарними викликами розподілені за експоненціальним законом, то маємо пуассонівський потік з неординарними викликами.

Цей потік також має властивості стаціонарності та відсутності післядії. Імовірність надходження  $i$  викликів за час  $t$  визначається формулою Пуассона (2.16), а імовірність надходження  $k$  вимог на обслуговуючі прилади за час  $t$  – виразом (2.28). Параметр потоку викликів  $\lambda$  та інтенсивність вимог  $\mu$  визначаються за (2.29).

Розглянуті потоки, незважаючи на багато спільних властивостей, мають суттєві відмінності. В неординарному пуассонівському потоці кожний виклик з групи може бути обслугований окремо, його час обслуговування суворо індивідуальний та не залежить від часу обслуговування інших, навіть

тих викликів, що надійшли одночасно з ним. При пуассонівському потоці з неординарними викликами усі прилади, необхідні для обслуговування одного неординарного виклику, зацікавлюються і звільнюються одночасно. Обидва потоки слід розглядати як безпосереднє узагальнення властивостей найпростішого потоку.

Слід відзначити, що неординарні потоки в системах комутації зустрічаються досить рідко. В основному, вони мають місце при передачі телеграм та у мережах поштового зв'язку. Потоки з неординарними викликами виникають при роботі мереж інтегрального обслуговування та інтелектуальних мереж, де для передачі різних видів повідомлень може займатися різне число каналів або канали з різною смугою пропускання (швидкістю передачі). Крім того неординарні виклики можливі у деяких телефонних станціях при здійсненні двох- та чотирьохпроводних з'єднань, якщо у другому випадку передбачено зайняття двох двохпроводних входів і виходів.

## 2.7 Потік з простою післядією

Ординарний потік, параметр якого  $\lambda_r(t)$  визначається станом  $r(t)$  обслуговуючої системи в момент  $t$ , називається **потоком з простою післядією або пуассонівським потоком з умовним параметром**. Більшість реальних потоків відносяться до цієї групи.

$r(t)$  визначається: числом зайнятих каналів обслуговування; числом вільних джерел; числом джерел, які повторюють виклики; довжиною черги.

### 2.7.1 Примітивний потік

Окремим випадком ППП є **примітивний** потік (енгсетовський, потік чистої випадковості II роду).

Ординарний потік, параметр якого  $\lambda_i$  пропорційний кількості вільних джерел  $N_i$  у стані обслуговуючої системи  $i$ , називається *примітивним*:

$$\lambda_i = \alpha(N - i). \quad (2.30)$$

Де  $\alpha$  – параметр (інтенсивність) джерела у вільному стані;

$N$  - загальне число джерел;  $i$  — число зайнятих джерел.

Примітивний потік описує надходження викликів у замкнутій системі. Модель примітивного потоку ураховує так званий ефект обмеженого числа джерел: нові виклики можуть надходити тільки від вільних джерел. Це визначає стрибкоподібне змінювання параметра потоку, причому найбільшого значення параметр досягає, коли всі джерела вільні ( $i = 0$ ) і найменшого, коли число зайнятих джерел сягає максимуму ( $i = N$ ). Ця властивість примітивного потоку суттєво впливає на процес обслуговування і помітно підвищує пропускну здатність обслуговуючої системи.

Математичне очікування параметра потоку

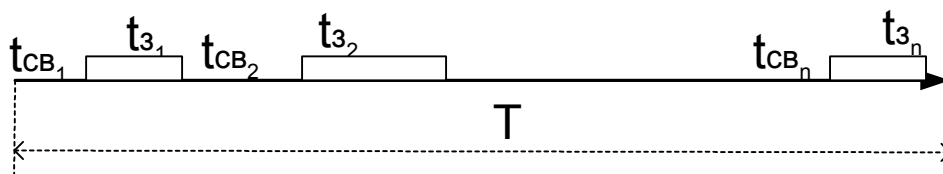
$$\lambda = \sum \lambda_i P_i.$$

де  $P_i$ —імовірність того, що зайнято  $i$  джерел. Величина  $\lambda$ , віднесена до одного джерела

$$\nu = \frac{\lambda}{N}. \quad (2.31)$$

визначає середню інтенсивність джерела.

Розглянемо різницю між  $\alpha$  і  $\nu$ : Якщо від якогось джерела за інтервал  $T$  надійшло  $n$  викликів,



то інтенсивність джерела у вільному стані  $\alpha$  дорівнює відношенню числа викликів, що надійшли, до сумарного “вільного” часу

$$\alpha = \frac{n}{\sum_{j=1}^n t_{cvj}} = \frac{1}{t_{cv}}, \quad (2.32)$$

$$\text{де } \bar{t}_{cv} = \frac{\sum_{j=1}^n t_{cvj}}{n}.$$

Середня інтенсивність джерела  $\nu$  дорівнює відношенню числа викликів, що надійшли, до всього інтервалу часу.

$$\nu = \frac{n}{T} = \frac{1}{t_{cv} + t_3}, \quad (2.33)$$

$$\text{де } \bar{t}_3 = \frac{\sum_{j=1}^n t_{3j}}{n}.$$

Таким чином, інтенсивність джерела у вільному стані зворотно пропорційна середньому вільному часу, а середня інтенсивність джерела – середньому інтервалу між викликами.

Тобто  $\alpha > \nu$

Інтервал вільності має експоненціальний розподіл з параметром  $\alpha$  :

$$P(t_{cv}) = 1 - e^{-\alpha t}$$

Це означає, що нові виклики від джерела надходять випадково, незалежно від моментів виникнення та закінчення обслуговування попередніх викликів.

### Приклад 2.6.

Система обслуговує 20 джерел середньою інтенсивністю 2 викл/хв. Визначити середнє, мінімальне і максимальне значення параметра потоку при середній тривалості зайняття 10 с.

Рішення:

Середнє значення обчислюємо згідно з (2.31):

$$\lambda = \nu \cdot N = 2 \cdot 20 = 40 \text{ викл./хв.}$$

Мінімальне та максимальне значення параметру примітивного потоку знаходимо:

$$\lambda_{\min} = 0$$

$$\lambda_{\max} = \alpha \cdot N$$

Для обчислення  $\alpha$  скористаємось формулами (2.32) і (2.33):

$$\nu = \frac{n}{T} = \frac{1}{t_{cv} + t_3} \Rightarrow \bar{t}_{cv} = \frac{1}{\nu} - \bar{t}_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} (\text{хв.}) = 20 \text{ с}$$

$$\alpha = 3 \text{ викл./хв}$$

(безумовно, значення інтенсивності та часу треба спочатку узгодити – виразити, наприклад, у хвиликах).

$$\lambda_{\max} = \alpha \cdot N = 3 \cdot 20 = 60 \text{ викл./хв.}$$

Примітивний потік є більш загальним випадком, порівняно з найпростішим. Зі зростанням числа джерел  $N$  і відповідним зменшенням  $\alpha$  післядія примітивного потоку скорочується. Якщо  $N \rightarrow \infty$ , а  $\alpha \rightarrow 0$ , але так, що  $N\alpha = \text{const}$ , примітивний потік переходить в найпростіший з параметром  $\lambda = N\alpha$ . Практично уже при  $N \geq 300 - 500$  (залежно від  $\alpha$  та  $i$ ) можна користуватися більш простою моделлю найпростішого потоку.

### Приклад 2.7.

Потік генерується групою з 300 джерел, кожне з котрих потребує обслуговування, в середньому 2 рази за годину. Визначити імовірність відсутності викликів за 6 с. Обґрунтувати допущення.

Рішення:

Параметр одного джерела незначний (порівняно з інтервалом часу, що нас цікавить), а кількість їх велика, отже можна вважати даний потік найпростішим з параметром

$$\lambda = 300 \cdot \frac{2}{60} = 10 \text{ викл / хв.}$$

$$\lambda t = 10 \cdot \frac{6}{60} = 1$$

$$P_0(t) = e^{-1} = 0,3679.$$

## 2.8 Потік з повторними викликами

ППВ складається з потоку первинних викликів (найпростішого, нестационарного пуассонівського або примітивного) та потоку повторних викликів, параметр якого визначається кількістю джерел, які повторюють виклики:

$$\lambda_j = \beta \cdot j. \quad (2.34)$$

де  $j$  – число джерел, які повторюють виклики,

$\beta$  - інтенсивність такого джерела.

Параметр загального потоку, якщо потік первинних викликів примітивний:

$$\lambda_{ij} = \alpha(N - i - j) + \beta \cdot j. \quad (2.35)$$

Якщо  $\beta = \alpha$ , то (2.35) переходить в (2.30), тобто маємо звичайний примітивний потік:

$$\lambda_{ij} = \alpha(N - i - j) + \beta \cdot j = \alpha(N - i) - \alpha \cdot j + \beta \cdot j = \alpha(N - i)$$

Але зазвичай,  $\beta \gg \alpha$ , (для телефонної мережі у 50 – 100 разів), в потоці повторних викликів більше коротких інтервалів  $z$  між викликами, що збільшує дисперсію потоку та число втрачених викликів (як первинних, так і повторних). Причому існує тісна кореляція між величиною  $z$  та станом обслуговуючої системи: чим більше зайнято ліній, тим більше джерел повторюють виклики, зменшуючи інтервал між ними  $z$ . Ця обставина призводить до зростання втрат.



При аналізі загального вхідного потоку викликів іноді доцільно відокремити повторні виклики від первинних, а також оцінити величини  $\alpha$  і  $\beta$ . Як тільки що було зазначено, повторні виклики мають коротші інтервали  $z$ , отже саме величину  $z$  можна використовувати як ознаку потоку повторних викликів.

Нехай досліджується потік викликів від  $N$  джерел і відомі момент надходження кожного виклику та номер джерела, що його надіслало. Задамося граничним значенням  $z_G$ . Якщо для деякого виклику значення  $z \leq z_G$ , вважатимемо його повторним, інакше – первинним. Значення  $z_G$  слід вибирати таким чином, щоб первинні виклики утворювали потік, близький за своїми властивостями до найпростішого або примітивного (залежно від значення  $N$ ). Така процедура використовувалась на практиці і дала добрі результати [1].

## 2.9 Потік звільнень

Послідовність моментів закінчення обслуговування викликів дає потік звільнень. Його властивості у загальному випадку залежать від властивостей потоку, що надходить, якості роботи СМО і закону розподілу часу обслуговування.

Найпростіший і найбільш розповсюджений закон розподілу часу обслуговування – це експоненціальний:

$$P(\xi < t) = 1 - e^{-\frac{t}{h}}, \quad (2.36)$$

де  $h$  – середній час обслуговування.

Рисунок 2.3, на якому показано результати вимірювання часу зайняття абонентської лінії на АТС, підтверджує практичну прийнятність експоненціальної моделі.

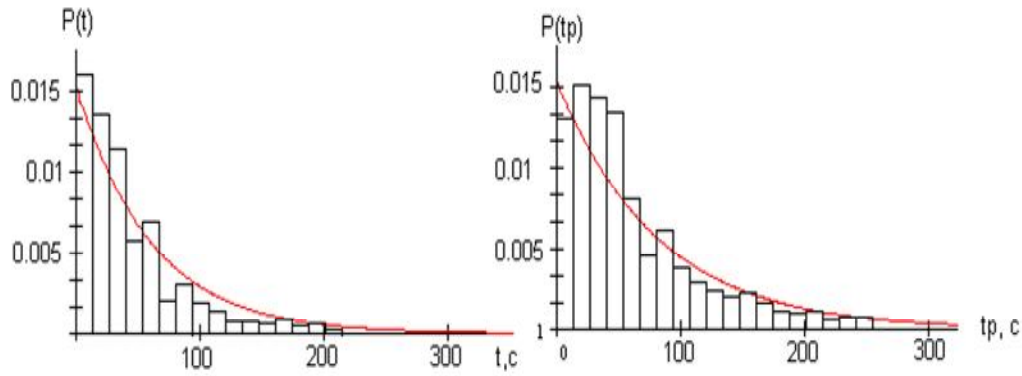


Рис.2.3 – Гістограми вимірювань часу зайнятть при  $h = 60,3c, \sigma = 84,4$  та розмов при  $h = 81,2c, \sigma = 90,1$

Основна властивість експоненціального розподілу зумовлює повну незалежність моментів закінчення обслуговування від моментів початку обслуговування викликів, що надходять. Тому властивості потоку звільнень в цьому випадку не залежать від властивостей потоку, що надходить, та якості роботи СМО, а повністю визначаються числом зайнятих каналів. Якщо в СМО зайнято  $k$  каналів ( $k$  викликів знаходяться на обслуговуванні), то імовірність звільнення  $i$  каналів за час  $t$  можна розглядати як  $i$  успішних випробувань із загального числа  $k$  незалежних випробувань і визначити згідно розподілу Бернуллі

$$P(i, k, t) = C_k^i \cdot p^i \cdot (1 - p)^{k-i},$$

де  $p$  — імовірність звільнення одного каналу за час  $t$ .

Враховуючи (2.36), маємо:

$$P(i, k, t) = C_k^i \left[ 1 - e^{-\frac{t}{h}} \right]^i \cdot e^{-\frac{(k-i)t}{h}}. \quad (2.37)$$

Імовірність того, що за час  $t$  не звільниться жоден з зайнятих каналів,

$$P(0, k, t) = e^{-\frac{t \cdot k}{h}}. \quad (2.38)$$

а імовірність того, що звільниться хоча б один канал

$$P(i \geq 1, k, t) = 1 - P(0, k, t) = 1 - e^{-\frac{k \cdot t}{h}}. \quad (2.39)$$

Згідно визначенню (2.4), параметр потоку звільнень при зайнятості  $k$  каналів

$$\lambda_{зв} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(i \geq 1, k, \Delta t)}{\Delta t}. \quad (2.40)$$

Імовірність  $P(i \geq 1, k, \Delta t)$  знаходимо з (2.39) з урахуванням розкладення функції  $e^{-x}$  в ряд  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot x^j}{j!}$ :

$$P(i \geq 1, k, \Delta t) = \frac{1 - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \times \left(\frac{k\Delta t}{h}\right)^j}{j!} = \frac{k\Delta t}{h} + o(\Delta t). \quad (2.41)$$

Тоді

$$\lambda_{зв} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{k\Delta t}{h} + o(\Delta t)}{\Delta t} \right] = \frac{k}{h}. \quad (2.42)$$

Аналогічно, досліджуючи імовірність звільнення не менш двох ліній за малий інтервал  $\Delta t$ , отримуємо, що  $P(i \geq 2, k, \Delta t) = o(\Delta t)$ . Таким чином, потік звільнень є ординарним і його параметр пропорційний числу зайнятих ліній (джерел). Коефіцієнтом пропорціональності служить величина, зворотна середньому часу обслуговування, котру можна інтерпретувати як інтенсивність джерела у зайнятому стані. Отже, **потік звільнень за своїми властивостями подібний примітивному потоку**.

Але, якщо комутаційна система працює так, що звільнена лінія негайно займається новим викликом, потік звільнень має постійний параметр  $\frac{\nu}{h}$  (де  $\nu$  - загальне число ліній в системі) і є найпростішим. В цьому випадку

імовірність звільнення  $i$  каналів за час  $t$  обчислюється за формулою Пуассона:

$$P_i(t) = \frac{\left(\frac{vt}{h}\right)^i \cdot e^{-\frac{vt}{h}}}{i!} \quad (2.43)$$

В ТТ для спрощення розрахункових формул **величина  $h$  - середній час обслуговування - приймається за умовну одиницю часу (у.о.ч.)**

Приклад 2.8.

В системі зайнято 30 каналів. Час зайнятості кожного розподілено за експоненціальним законом з  $h = 60c$ . Визначити імовірність того, що за час  $t = 6c$ : 1) жоден канал не звільниться, 2) хоча б один канал звільниться.

Рішення

- 1) імовірність того, що жоден канал не звільниться – визначаємо за формулою (2.38)

$$P_0 = e^{-\frac{k \cdot t}{h}} = e^{-30 \cdot \frac{6}{60}} = e^{-3} = 0,05.$$

імовірність того, що хоча б один канал звільниться - визначаємо за формулою (2.39)

$$P_{\geq 1} = 1 - e^{-3} = 0,95.$$

Приклад 2.9.

СМО працює так, що в ній зайнято усі 10 каналів і після звільнення кожний негайно займається новим викликом. Час зайнятості каналу розподілено за експоненціальним законом з  $h = 300c$ . Визначити імовірність того, що за час  $t = 1xв$  не звільниться жодна лінія.

Рішення:

$$h = 300c = 5xв$$

за формулою (2.43)  $P_0(1) = e^{-10 \cdot \frac{1}{5}} = e^{-2} = 0,135$ .

Приклад 2.10.

Лічильник дзвінків абонента видає один імпульс на початку дзвінка, а потім імпульс кожні 3 хвилини, поки триває розмова. Вважаємо, що тривалість розмови розподілено за експоненціальним законом із середнім значенням 3 хвилини. Знайти долю усіх розмов, для яких лічильник видасть:

- a) рівно 2 імпульси;
- b) менше, чим 2 імпульси;
- c) більше, чим 2 імпульси;
- d) не менше, чим 2 імпульси;
- e) не більше, чим 2 імпульси

Рішення:

Закон розподілу для тривалості розмови має вигляд:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{t}{3}} \text{ рівно 2 імпульси буде, якщо } 3 \leq t < 6$$

$$P\{3 \leq t < 6\} = F(6) - F(3) = 1 - e^{-\frac{6}{3}} - \left(1 - e^{-\frac{3}{3}}\right) = e^{-1} - e^{-2} = 0,3679 - 0,1353 = 0,2326.$$

- a) менше, чим 2 імпульси буде, якщо  $t < 3$

$$P\{t < 3\} = F(3) - F(-\infty) = 1 - e^{-\frac{3}{3}} - 0 = 1 - e^{-1} = 0,6321.$$

більше, чим 2 імпульси буде, якщо  $t \geq 6$

$$P\{t \geq 6\} = F(\infty) - F(6) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{6}{3}}\right) = e^{-2} = 0,1353.$$

не менше, чим 2 імпульси буде, якщо  $t \geq 3$

$$P\{t \geq 3\} = F(\infty) - F(3) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{3}{3}}\right) = e^{-3} = 0,3679.$$

не більше, чим 2 імпульси буде, якщо  $t < 6$

$$P\{t < 6\} = F(6) - F(-\infty) = 1 - e^{-\frac{6}{3}} - 0 = 1 - e^{-2} = 0,8647.$$

### Приклад 2.11.

По з'єднувальній лінії між пунктами  $A$  і  $B$  середня тривалість розмови для викликів  $A \rightarrow B$  4 хвилини, а для  $B \rightarrow A$  – 3 хвилини. Для обох випадків можна прийняти експоненціальний розподіл. Виклики  $A \rightarrow B$  складають 55 % викликів. Знайдіть імовірність того, що деяка розмова буде тривати довше, ніж 6 хвилин.

Рішення:

Подія, яка нас цікавить: “деяка розмова буде тривати довше, ніж 6 хвилин” може відбутися у двох незалежних випадках:

1. Розмова відбувається у напрямку  $A \rightarrow B$  і триває довше 6 хвилин. Імовірність цієї сумісної події

$$P_{A \rightarrow B} \cdot P\{t > 6 / A \rightarrow B\} = 0,55 \cdot e^{-\frac{6}{4}} = 0,55 \cdot 0,2231$$

Розмова відбувається у напрямку  $B \rightarrow A$

$$P_{B \rightarrow A} \cdot P\{t > 6 / B \rightarrow A\} = 0,45 \cdot e^{-\frac{6}{3}} = 0,45 \cdot 0,1353.$$

Загальна імовірність дорівнює сумі

$$P = 0,184$$

## 2.10 Потік з обмеженою післядією

Ординарний потік, в якому інтервали часу між викликами  $z_1, z_2, \dots, z_k$  утворюють послідовність взаємно незалежних випадкових величин, називається потоком з обмеженою післядією. Для однозначного описання цього потоку достатньо задати сімейство функцій розподілу випадкових величин  $z_k : F_k(t) = P(z_k < t)$  [5].

В потоці з обмеженою післядією імовірність надходження нового виклику в інтервалі  $\tau$  залежить тільки від розташування цього інтервалу відносно моменту надходження останнього виклику і не залежить від часу надходження решти викликів. Для таких потоків в момент надходження виклику майбутнє не залежить від минулого й уся післядія обмежується величиною інтервалу між викликами.

Особливе місце серед потоків з обмеженою післядією займають *рекурентні потоки*, для яких усі інтервали між викликами, враховуючи перший, мають однаковий розподіл  $F_k(t) = F(t)$  при  $k \geq 1$ , і *рекурентні потоки із запізненням*, в яких тільки перший інтервал має розподіл, відмінний від інших. Рекурентні потоки із запізненням задаються відповідно двома функціями розподілу:  $F_1(t)$  і  $F_k(t) = F(t)$  при  $k \geq 2$ . Функція  $F_1(t)$  характеризує розподіл інтервалу часу від довільно обраного початку відліку  $t_0$  до моменту надходження першого виклику.

Можна показати, що стаціонарний рекурентний потік буде найпростішим. Стаціонарний рекурентний потік із запізненням називають *поток Пальма*. Потік Пальма задається умовною імовірністю  $\varphi_0(t)$  відсутності викликів в інтервалі довжиною  $t$ , якщо в початковий момент цього інтервалу надійшов виклик. Тоді

$$P(z_1 < t) = \lambda \int_0^t \varphi_0(U) dU, \quad P(z_k < t) = 1 - \varphi_0(t), \quad k \geq 2. \quad (2.44)$$

Тут  $\lambda$  – параметр або інтенсивність потоку Пальма,  $\lambda = \frac{1}{z}$ . Потік Пальма є узагальненням найпростішого потоку. При  $\varphi_0(t) = e^{-\lambda t}$  маємо найпростіший потік, оскільки усі інтервали, враховуючи перший, розподілені за експоненціальним законом. Модель потоку Пальма добре описує потік викликів, які не отримали обслуговування в комутаційній системі (втрачених). Має місце наступна *теорема Пальма*.

Якщо на комутаційну систему з явними втратами надходить потік викликів типу Пальма і час обслуговування розподілений за експоненціальним законом, то потік викликів, які не отримали обслуговування, також є потоком Пальма.

Зокрема, якщо вхідний потік є найпростішим, потік втрачених викликів має обмежену післядію і за своїми властивостями є потоком Пальма. Модель потоку Пальма використовується для розрахунку неповнодоступних включень. Певну складність при цьому додає та обставина, що при об'єднанні двох і більше незалежних потоків Пальма сумарний потік за своїми властивостями буде відрізнятися від потоку Пальма. Але при роз'єднанні потоку Пальма на декілька напрямків, так що з імовірністю  $P_i$  виклик надходить на  $i$ -й напрямок, потік  $i$ -го напрямку також буде потоком Пальма.

Поняття „потік Пальма” об'єднує широкий клас потоків, що відрізняються один від одного законом розподілу інтервалу між викликами. Одним з прикладів потоку Пальма є *потік Ерланга*, який отримується просіюванням найпростішого потоку. Якщо з останнього викинути кожний другий виклик, решта утворить потік Ерланга другого порядку. Якщо в найпростішому потоці зберегти кожний третій виклик, матимемо потік Ерланга третього порядку. Таким чином, потоком Ерланга  $n$ -ого порядку називається потік, отриманий з найпростішого потоку збереженням кожного  $n$ -ого виклику та відкиданням решти. Звичайно, найпростіший потік можна розглядати як потік Ерланга першого порядку.



Інтервали між викликами в потоці Ерланга незалежні між собою та однаково розподілені, оскільки вони є сумою однакового числа незалежних інтервалів найпростішого потоку. Знайдемо закон розподілу інтервалу  $z(n)$  між викликами в потоці Ерланга  $n$ -ого порядку. Між  $(k-1)$ -м і  $k$ -м викликами потоку Ерланга були  $(n-1)$  відкинуті виклики початкового найпростішого потоку. Щільність імовірності величини  $z(n)$  позначимо  $p_n(t)$ . Це означає, що з імовірністю  $p_n(t)\Delta t$  величина  $z(n)$  прийме значення, що знаходиться в діапазоні між  $t$  і  $t + \Delta t$ . Для цього необхідно, щоб одночасно відбулися дві події: в інтервал  $[t, t + \Delta t)$  потрапив  $k$ -й виклик (імовірність такої події дорівнює  $\lambda\Delta t$ ), а в інтервал довжиною  $t$  потрапив  $(n-1)$  виклик початкового найпростішого потоку (цю імовірність обчислюємо за формулою Пуассона). За теоремою добутку імовірностей отримуємо:

$$p_n(t)\Delta t = \frac{\lambda\Delta t(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Скоротивши на  $\Delta t$ , можна отримати закон розподілу Ерланга  $n$ -ого порядку:

$$P[z(n) < t] = \int_0^t p_n(t)dt = 1 - \frac{e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda t)^i}{i!}. \quad (2.45)$$

При  $n=1$  (2.45) дає експоненціальний розподіл (2.22).

Математичне очікування і дисперсію величини  $z(n)$  зручно визначити відповідно до теореми суми математичних очікувань і дисперсій незалежних випадкових величин [5], тобто інтервалів між викликами початкового найпростішого потоку:

$$Mz(n) = nMz(1) = \frac{n}{\lambda}; \quad Dz(n) = nDz(1) = \frac{n}{\lambda^2}$$

Параметр потоку Ерланга  $n$ -ого порядку:  $\Lambda_n = \frac{1}{M_z(n)} = \frac{\lambda}{n}$ .

Відповідно до (2.44) визначимо закон розподілу першого інтервалу потоку:

$$P[z_1(n) < t] = \frac{\lambda}{n} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^t \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right] dt = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{(n-i)}{n} \right] \left[ \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right].$$

Для розглянутого потоку із зростанням  $n$  характерне збільшення математичного очікування і дисперсії інтервалу  $z(n)$  і відповідне зменшення параметру. Змінимо масштаб часу так, щоб математичне очікування інтервалу  $z(n)$  і параметр потоку  $\Lambda_n$  залишалися незмінними, незалежними від  $n$ . Для цього введемо нормований інтервал  $z_n(n) = \frac{z(n)}{n}$ . Потік з такими інтервалами між викликами назовемо *нормованим потоком Ерланга  $n$ -ого порядку* (рис. 2.4 б). Приведемо інтегральну функцію та щільність розподілу інтервалу  $z_n(n)$ , а також його математичне очікування і дисперсію:

$$P[z_H(n) < t] = 1 - e^{-n \cdot \Lambda_n \cdot t} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n \cdot \Lambda_n \cdot t)^i}{i!}.$$

$$p_n(t) = \left[ \frac{n \cdot \Lambda_n \cdot (n \cdot \Lambda_n \cdot t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \cdot e^{-n \Lambda_n t}.$$

$$Mz_H(n) = \frac{1}{\Lambda_n}.$$

$$Dz_H(n) = \frac{1}{n \cdot \Lambda_n^2}.$$

Із збільшенням  $n$  дисперсія  $Dz_H(n)$  необмежено убуває і нормований потік Ерланга наближується до детермінованого з постійними інтервалами, рівними  $\frac{1}{\Lambda_n}$ .

Таким чином, використовуючи модель нормованого потоку Ерланга при різних значеннях  $n$ , можна отримати будь-яку ступінь випадковості: від потоку чистої випадковості (найпростіший потік) до детермінованого. Однак при цьому завжди зберігається жорсткий функціональний зв'язок між

математичним очікуванням і дисперсією інтервалу між викликами:  $nDz_H(n) = M^2 z_H(n)$ . Це ускладнює заміну потоком Ерланга реального потоку з довільним співвідношенням  $Mz$  і  $Dz$ .

Узагальнимо розглянуту модель потоку. Припустимо, що інтервал між викликами  $z(n)$  є сума  $n$  випадкових величин, кожна з яких розподілена за експоненціальним законом із своїм параметром  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Такий потік називається *узагальненим потоком Ерланга  $n$ -ого порядку* (рис. 2.4 в). Його функція та щільність розподілу, а також математичне очікування і дисперсія мають вигляд:

$$P[z(n) < t] = 1 - \sum_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_i)}$$

$$p_n(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e^{-\lambda_i t} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_i)}$$

$$Mz(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}$$

$$Dz(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2}$$

(2.46)

Використання узагальнених потоків Ерланга дещо розширює можливості з апроксимації реальних потоків з обмеженою післядією, але і в цьому випадку зберігається співвідношення  $Dz(n) \leq M^2 z(n)$ .

Від цього обмеження вільна модель потоку з інтервалами, розподіленими за *комбінованим експоненціальним законом* (рис. 2.4 г). Нехай інтервал  $z(n)$  складається з випадкового числа фаз, кожна з яких розподілена за експоненціальним законом з параметром  $\lambda_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Після  $k$ -ої фази з імовірністю  $q_k$  надходить виклик, а з імовірністю  $p_k = 1 - q_k$  настає наступна  $(k+1)$ -а фаза. Максимально можливе число фаз дорівнює  $n$  ( $q_n = 1, p_n = 0$ ). Функція та щільність розподілу інтервалу  $z(n)$ , а також

його математичне очікування і дисперсія представлені у формулах (2.47) та (2.48) відповідно.

$$P[z(n) < t] = \sum_{j=1}^n q_j \prod_{r=1}^{j-1} p_r \left[ 1 - \sum_{i=1}^j e^{-\lambda_i t} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^j \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_i)} \right]. \quad (2.47)$$

$$p_n(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\lambda_i t} \sum_{j=1}^n q_j \prod_{r=1}^{j-1} p_r \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^j \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_i)}.$$

$$Mz(n) = \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^{i-1} \frac{p_k}{\lambda_i}.$$

$$Dz(n) = \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^{i-1} \frac{\left( 2 - \prod_{r=1}^{i-1} p_r \right)}{\lambda_i^2} + 2 \sum_{i=3}^n \sum_{j=3r=1}^{i-1} \prod_{r=1}^{i-1} \frac{p_r \left( 1 - \prod_{r=1}^{i-1} p_r \right)}{\lambda_i \lambda_j}. \quad (2.48)$$

В окремому випадку при  $n = 2$   $Mz(2) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{p_1}{\lambda_2}$ ;  $Dz(2) = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{p_1(1+q_1)}{\lambda_2^2}$ .

Нескладно перевірити, що при  $q_1 \lambda_1 < \lambda_2$  має місце  $M^2 z(2) > Dz(2)$ , а при  $q_1 \lambda_1 > \lambda_2$  – зворотнє співвідношення. Змінюючи параметри  $q_r, p_r$  і  $\lambda_r$ , можна підібрати потік з будь-якими заданими значеннями довільного числа моментів величини  $z(n)$ . Зокрема, при  $q_1 = 0, p_i = 1 (i = \overline{1, n-1})$  з розподілу (2.47) отримуємо (2.46).

Наступною моделлю потоку Пальма, що широко використовується для апроксимації реальних потоків, є *переривчастий пуассонівський потік n-ого порядку*. Інтервали між викликами в даному потоці розподілені за гіперекспоненціальним розподілом (рис. 2.4 д):

$$\begin{aligned}
 P[z(n) < t] &= \sum_{i=1}^n q_i (1 - e^{-\lambda_i t}); \sum_{i=1}^n q_i = 1. \\
 p_n(t) &= \sum_{i=1}^n q_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}; Mz(n) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\lambda_i}. \\
 Dz(n) &= \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\lambda_i^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n q_i q_j \left( \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Розподіл (2.49) має наступну інтерпретацію: з імовірністю  $q_1$  інтервал між викликами розподілено за експоненціальним розподілом з параметром  $\lambda_1$ , з імовірністю  $q_2$  – за експоненціальним розподілом з параметром  $\lambda_2$  і т.д.

При  $\lambda_i = \lambda$  даний розподіл переходить в експоненціальний, а при  $q_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_i)}$  – в узагальнений розподіл Ерланга  $n$ -ого порядку (2.46).

Розглянутий потік може бути утворений при пропусканні найпростішого потоку з параметром  $\Lambda$  через ключ. Якщо довжини інтервалів ввімкнення та вимкнення ключа розподілені за експоненціальним законом з параметрами  $a$  і  $b$  відповідно, то на виході ключа отримаємо переривчастий пуассонівський потік 2-ого порядку, характеристики якого можна вихначити наступним чином:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{(\Lambda - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad q_2 = \frac{(\Lambda - \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}. \\
 \lambda_{1,2} &= \frac{\left[ \Lambda + a + b + \sqrt{(\Lambda + a + b)^2 - 4\Lambda a} \right]}{2}.
 \end{aligned}$$

Потік 3-го порядку можна отримати, якщо на вхід подібного ключа буде надходити переривчастий потік 2-ого порядку. Взагалі при пропусканні через ключ потоку  $n$ -ого порядку на виході отримаємо потік  $(n+1)$ -ого порядку.

По аналогії з гіперекспоненціальним розподілом можна ввести *гіперерлангівський розподіл  $n$ -ого порядку* (рис 2.4 е). Він має наступну

інтерпретацію: з імовірністю  $q_1$  інтервал між викликами розподілено узагальненим розподілом Ерланга 1-ого порядку (експоненціальним розподілом), з імовірністю  $q_2$  – за узагальненим розподілом Ерланга 2-ого порядку і т.д. Тоді

$$P[z(n) < t] = \sum_{i=1}^n q_i \left[ 1 - \sum_{j=1}^i e^{-\lambda_{ij} t} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^i \frac{\lambda_{ik}}{(\lambda_{ik} - \lambda_{ij})} \right], \quad \sum_{i=1}^n q_i = 1.$$

$$p_n(t) = \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^i \lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij} t} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^i \frac{\lambda_{ik}}{(\lambda_{ik} - \lambda_{ij})}.$$

$$Mz(n) = \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^i \frac{1}{\lambda_{ij}}.$$

$$Dz(n) = \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^i \frac{1}{\lambda_{ij}} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n q_i q_j \left[ \sum_{k=1}^i \frac{1}{\lambda_{ik}} - \sum_{k=1}^j \frac{1}{\lambda_{jk}} \right]^2.$$

Гіперерлангівський розподіл  $n$ -ого порядку відповідає гіперекспоненціальному  $m$ -ого порядку, де  $m = C_{n+1}^2$ . Параметри  $q_r$  і  $\lambda_r$  ( $r = \overline{1, m}$ ) гіперекспоненціального розподілу можна виразити через параметри  $q'_i$  і  $\lambda'_{ij}$  ( $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, i}$ ) гіперерлангівського наступним чином:

$$\lambda_r = \lambda'_{ij}, \quad q_r = q_{ij} = q'_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^i \frac{\lambda'_{ik}}{(\lambda'_{ik} - \lambda'_{ij})}, \quad r = C_i^2 + j.$$

Гіперерлангівський розподіл в свою чергу можна розглядати як безпосереднє узагальнення комбінованого експоненціального. Замінивши параметри  $q_i$  і  $\lambda_{ij}$  гіперерлангівського розподілу відповідно до приведених нижче формул, отримаємо комбінований експоненціальний розподіл з параметрами  $q'_i$  і  $\lambda'_j$ :

$$\lambda_{ij} = \lambda'_j, \quad q_i = q'_i \prod_{k=1}^{i-1} p'_k.$$

Можливий і зворотній перерахунок параметрів від комбінованого експоненціального до гіперерлангівського розподілу:

$$\lambda'_j = \lambda_{ij}, \quad q'_i = \frac{q_i}{\left[1 - \sum_{k=1}^{i-1} q_k\right]}.$$

Але в цьому випадку загальне число різних параметрів  $\lambda$  у гіперерлангівського розподілу скоротиться до  $n$ .

Розглянуті розподіли надають широкі можливості для апроксимації реальних потоків. Використовуючи фізичну інтерпретацію, можна підібрати необхідний розподіл інтервалу  $z$  і визначити необхідні параметри через порівняння статистичних і теоретичних моментів (математичного очікування, дисперсії, асиметрії тощо). Але перед цим необхідно впевнитися, що розглянутий потік дійсно належить до класу потоків Пальма.

### 2.11 Контрольні питання

1. Навести властивості найпростішого потоку
2. Що означає стаціонарність, ординарність, післядія?
3. Які потоки можна вважати стаціонарними?
4. Які потоки мають післядію?
5. Навести числові характеристики найпростішого потоку
6. Дати визначення і пояснити різницю між параметром та інтенсивністю потоку. Для яких потоків ці характеристики співпадають і для яких – ні.
7. Навести формулу закону Пуассона
8. Навести властивості розподілу Пуассона.
9. За яким законом розподілено інтервали між викликами в найпростішому потоці?
10. За яким законом в найпростішому потоці розподілено число викликів, що потрапили в інтервали рівної довжини?

11. Як перевірити відповідність реального потоку моделі найпростішого, якщо виміряли інтервали між сусідніми викликами?
12. Як перевірити відповідність реального потоку моделі найпростішого, якщо для послідовності інтервалів рівної довжини підраховано число викликів, що потрапили в ці інтервали?
13. Який потік утворюється при об'єднанні найпростіших потоків?
14. До якого класу відноситься потік звільнень і чому?
15. Основна властивість експоненціального закону розподілу.
16. Чому дорівнює кількість джерел викликів в найпростішому потоці. Якою його властивістю це пояснюється?
17. Чи є примітивний потік стаціонарним? Ординарним?
18. Має примітивний потік післядію чи ні?
19. Чи є потік звільнень стаціонарним? Ординарним? У якому випадку?
20. Має потік звільнень післядію чи ні? У якому випадку?
21. Чи є потік з повторними викликами стаціонарним? Ординарним?
22. Має потік з повторними викликами післядію чи ні?
23. В якому випадку можна вважати примітивний потік найпростішим? Чому?
24. Поясніть сутність методу Монте-Карло.
25. Що таке потоки з обмеженою післядією та рекурентні потоки?
26. Дайте визначення потоку Пальма. Як він задається? В якому випадку можна вважати потік Пальма найпростішим? Чому?
27. Сформулюйте теорему Пальма. Як вона використовується при розрахунку комутаційних систем?
28. Який потік утворюється при об'єднанні потоків Пальма? Який потік утворюється при роз'єднанні потоку Пальма на декілька напрямків?
29. Дайте визначення потоку Ерланга. Як він утворюється?
30. Що таке нормований потік Ерланга? Який зв'язок існує між математичним очікуванням і дисперсією інтервалу між викликами в такому потоці?



31. Як можна отримати узагальнений потік Ерланга?
32. До якого класу потоків відноситься переривчастий пуассонівський потік  $n$ -ого порядку? За яким законом розподілено інтервал між викликами в такому потоці?

### 2.12 Завдання для самостійної роботи

33. Для найпростішого потоку, в якому виклики надходять в середньому через 15 с, визначити найбільш імовірну кількість викликів за 5 хв.
34. При якому параметрі найпростішого потоку найбільш імовірним є надходження за 2 хв. 7 и 8 викликів?
35. На СМО надходить найпростіший потік викликів з інтенсивністю 12 викл/год. Знайти імовірність того, що: за 2 хв. надійде хоча б 1 виклик.
36. Для деякого потоку отримані такі значення кількості викликів, що потрапили в 20 двохвилинних інтервалів: 5, 1, 1, 2, 4, 5, 4, 1, 6, 3, 6, 0, 5, 5, 4, 6, 2, 5, 2, 4. Чи можна вважати цей потік найпростішим? Визначити параметр потоку.
37. В результаті статистичної обробки інтервалів часу між викликами в потоці отримані такі характеристики: середнє значення інтервалу:  $m_z = 5c$ ; дисперсія  $D_z = 25,13c$ . Визначити імовірність відсутності викликів за 1 с.
38. Система обслуговує 30 джерел викликів середньою інтенсивністю 3 викл/хв кожний. Визначити середнє, максимальне и мінімальне значення параметра потоку, якщо обслуговування виклику триває в середньому 5 с.
39. Визначити середнє значення параметра потоку, створеного групою з 40 джерел, якщо 1 джерело у вільному стані надсилає на

обслуговування, в середньому, 6 викл/хв, а обслуговування 1 виклику триває, в середньому, 5 с.

40. Деяка система працює так, що кожний з 20 каналів одразу займається новим викликом після завершення обслуговування попереднього. Середній час обслуговування 600 с (експоненціальний закон). Визначити імовірність того, що за 1 хв. не звільниться жоден канал.
41. Потік генерується групою з 600 джерел, кожне з котрих потребує обслуговування, в середньому 1 раз в 2 години. Визначити імовірність наявності викликів за 20 с. Обґрунтувати допущення.
42. В початковий момент часу у з'єднувальній лінії є 5 викликів. Нехай тривалість розмови розподілена за експоненціальним законом із середнім значенням 3 хвилини. Обчислити імовірність, що рівно 2 з тих 5 викликів ще будуть тривати через 1 хвилину.

## 3 ВИДИ НАВАНТАЖЕННЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЯКОСТІ ОБСЛУГОВУВАННЯ В СМО

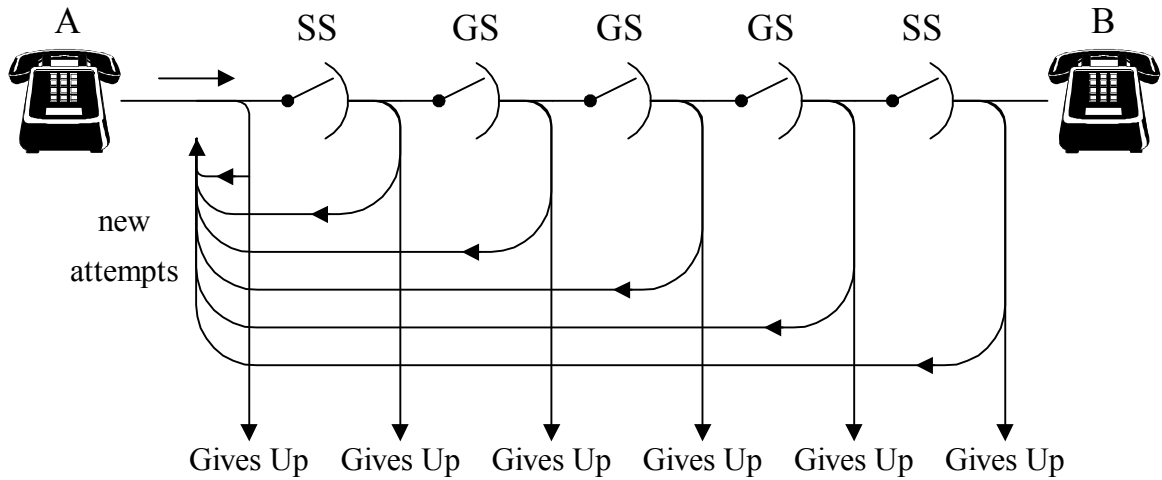
### 3.1 Генерування навантаження в телефонних мережах

Навантаження в телефонних мережах генерується безліччю абонентів. Коли абонент  $A$  бажає додзвонитися до абонента  $B$ , він знімає слухавку свого телефону і набирає номер абонента  $B$ . При цьому локальна АТС абонента  $A$  отримує імпульс, за яким виконуються наступні дії:

- абоненту  $A$  надсилається сигнал “готовність станції” (довгий гудок);
- від абонента  $A$  приймається адресна інформація абонента  $B$ ;
- здійснюється вибір напрямку для з’єднання;
- здійснюється комутація у відповідних блоках (шукачах) в локальній АТС абонента  $A$ , транзитних АТС та в локальній АТС абонента  $B$  (при умові наявності вільних ліній у потрібному напрямку);
- абоненту  $B$  (якщо він вільний) надходить дзвінок про виклик;
- під час розмови підтримується двосторонній (дуплексний) канал зв’язку між абонентами  $A$  і  $B$ , відповідно усе задіяне при цьому обладнання (абонентські лінії  $A$  і  $B$ , з’єднувальні лінії між АТС, комутаційні елементи тощо) знаходиться в стані “зайняте”;
- після завершення розмови абоненти  $A$  і  $B$  кладуть слухавки і звільняють усе задіяне обладнання, воно переходить у стан “вільне”.

Таким чином, виклик від абонента  $A$  проходить декілька етапів обробки (ступенів шукання), як показано на рис. 3.1, причому на кожному етапі виклик може отримати відмову в обслуговуванні через перевантаження обладнання або внаслідок помилки абонента. В цьому разі абонент  $A$  може припинити спроби дозвону або здійснювати повторні виклики (один або

більше) залежно від терміновості чи важливості повідомлення, яке має бути передане під час цього виклику.



*SS* – абонентський шукач;

*GS* – груповий шукач

Рисунок 3.1. Процес обробки виклику між абонентами *A* і *B*

На рис. 3.2 показано структуру тривалості етапів обробки у випадку успішного виклику. Цей простий рисунок дозволяє наочно уявити випадковий процес, характерний для обслуговування телефонного навантаження.

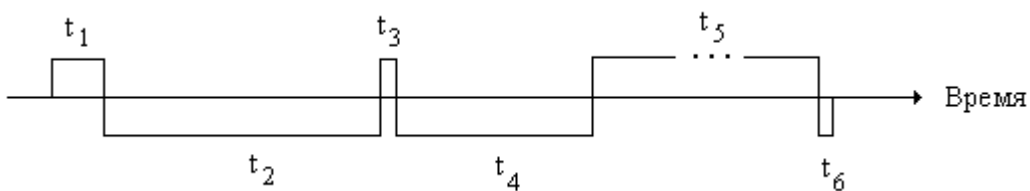


Рисунок 3.2. Тривалість етапів обробки успішного виклику.

Етап  $t_1$  починається з моменту підняття слухавки абонентом *A* і закінчується набором першої цифри номера. Якщо абонент не починає набір номера, то через деякий час  $T_{1max}$  він почує сигнал "Зайнято". Існує певний мінімальний час  $T_{1min}$ , до якого набір номера неможливий. Це час,

необхідний для подачі абоненту акустичного сигналу "Відповідь станції". Таким чином, випадкова величина  $t_1$  розподілена на інтервалі  $(T_{1\min}, T_{1\max})$ .

Час  $t_2$  починається з моменту набору першої цифри номера і закінчується, коли передано всю адресну інформацію. Число цифр залежить від типу з'єднання. Між цифрами можуть бути паузи. Отже випадкова величина  $t_2$  розподілена на деякому відрізку  $(T_{2\min}, T_{2\max})$ .

Випадкова величина  $t_3$  нормується в рекомендаціях *ITU* серії *Q*. За цей час має бути створений тракт між терміналами абонентів *A* і *B*. Якщо такий процес не може бути реалізований або лінія абонента *B* недоступна, то абонент *A* отримує акустичний сигнал "Зайнято".

За час  $t_4$  повинен закінчитися процес прослуховування абонентом *A* акустичного сигналу "Контроль посилки виклику". Нескладно переконатися, що  $t_4$  розподілена на відрізку  $(T_{4\min}, T_{4\max})$ .

Далі починається фаза розмови (обмін інформацією). Випадкову величину  $t_5$  найчастіше вважають експоненціально розподіленою. Правда, в деяких дослідженнях, оснований на результатах вимірювань, рекомендується використовувати інші закони розподілу. Можна зазначити, що в загальному випадку для випадкової величини  $t_5$  вважається прийнятним діапазон  $(0, \infty)$ .

Випадкова величина  $t_6$  визначає інтервал часу, який починається після завершення розмови, а закінчується звільненням усіх комутаційних станцій і транспортних ресурсів. Ця величина (як і  $t_1$ ) порівняно з рештою досить мала, що часто дозволяє виключити їх з формул для розрахунку тривалості зайняття.

Можна ввести два коефіцієнти, які характеризуватимуть відношення між тривалістю розмови та часом зайняття.

$$\eta_1 = \frac{t_5}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6}. \quad (3.1)$$

Цей коефіцієнт дозволяє оцінити частку тривалості розмови в сумарному часі зайняття. Другий коефіцієнт –  $\eta_2$  оцінює неефективне зайняття мережі (накладні витрати або час, за який абонент не сплачує):

$$\eta_2 = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_6}{t_5}. \quad (3.2)$$

При зростанні тривалості телефонної розмови (в загальному випадку – часу інформаційного обміну)  $\eta_1$  і  $\eta_2$  наближаються до одиниці й нуля відповідно. Оператор в принципі може впливати на тривалість телефонної розмови або інформаційного обміну, змінюючи, наприклад, тарифну політику. Але можливість управління такого роду обмежена потребами абонентів. Ефективний спосіб для досягнення ефективних величин  $\eta_1$  і  $\eta_2$  – зниження невиробничих витрат часу на операції, що здійснюються при встановленні з'єднання.

Кожний з комутаторів (шукачів) та пучків з'єднувальних ліній між ними можна розглядати як СМО, яку “завантажує” своїми викликами деякий потік (термін “навантаження” використовується в телефонії як синонім терміну “трафік”). Зайнятість цієї системи залежить від:

- інтенсивності надходження запитів на обслуговування (параметру потоку викликів),
- тривалості окремої розмови ( $t_5$ ),
- рівня відмов.

У телефонних мережах інтенсивність надходження запитів залежить від кількості та типу абонентів, що обслуговуються локальними АТС, і часу доби. Найчастіше розрізняють абонентів квартирної і ділового секторів, таксофони, а також лінії від ВАТС. Звичайно, абоненти різних типів створюють навантаження на локальну АТС, що відрізняється за своїм характером протягом доби. На рис. 3.3 представлені результати виміру навантаження для трьох АТС з різною часткою абонентів квартирної сектора ( $K_k$ ).

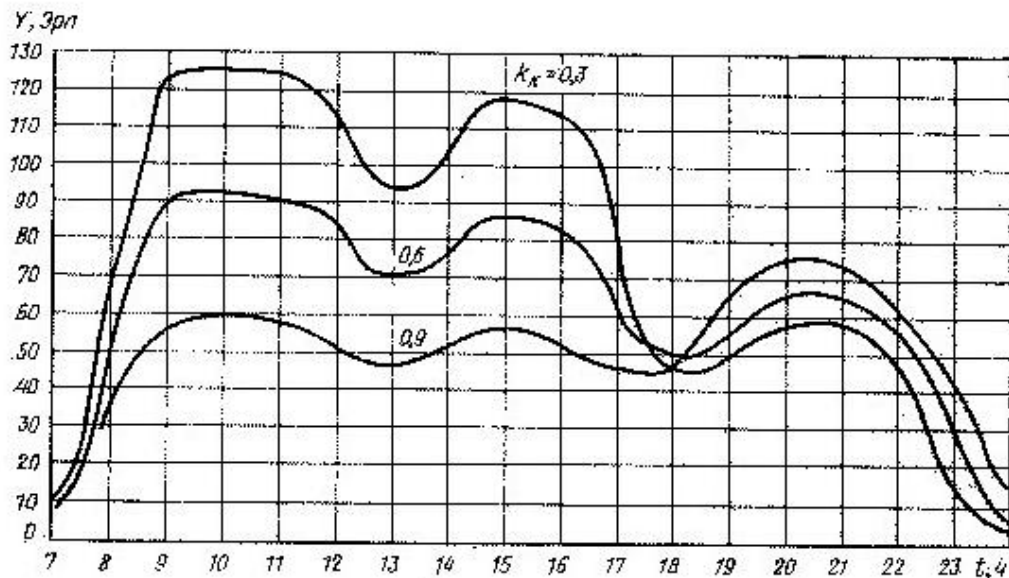


Рисунок 3.3. Добове навантаження АТС з різною часткою квартирних абонентів  $K_k$

Як видно з рисунку, для більшості станцій місцевих та міжнародних мереж характерна наявність трьох періодів найбільшої інтенсивності навантаження – періодів найбільшого навантаження (ПНН): з 9.00 до 12.00 та з 14.00 до 17.00 – виробничі піки, та з 19.00 до 22.00 – вечірній пік. На місцевих АТС зі значною перевагою ( $K_k = 0,9$ ) квартирних абонентів перші два ПНН дещо згладжені, а третій, вечірній, – суттєвіший.

У вихідні та святкові дні інтенсивність абонентів знижується за рахунок відсутності трафіку бізнес-абонентів. Але і робочі дні тижня дещо відрізняються один від одного – найбільше абоненти розмовляють у понеділок та п'ятницю (див. рис. 3.4)

При дослідженні добового розподілу інтенсивності навантаження окрім ПНН, які приймаються рівними трьома годинами, виділяють безперервні годинні інтервали, під час яких спостерігається максимальний пік абонентської активності. Ці періоди називаються години найбільшого навантаження (ГНН). Згідно рекомендацій ІТУ-Т визначають статистичні ГНН і ПНН, реєструючи інтенсивності навантаження кожні 15-хвилин протягом  $n$  днів. За статистичну ГНН приймають одну й ту ж для всіх  $n$  днів

вимірювань годину доби, коли середня за ці дні інтенсивність навантаження максимальна.

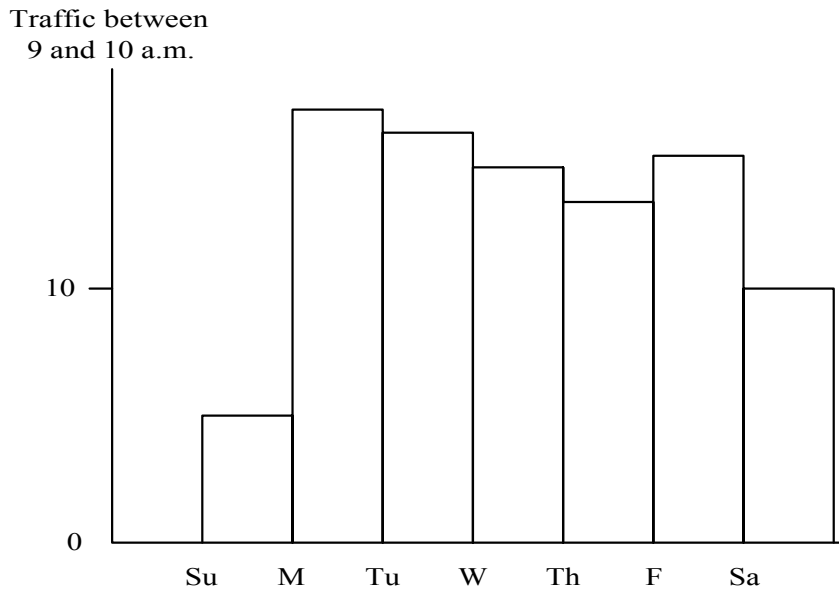


Рисунок 3.4. Зміна телефонного трафіку протягом тижня

Фрагмент результатів таких вимірювань для ранішнього ПНН пучка з'єднувальних ліній однієї з сільських АТС середньої ємності наведений в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1.

Визначення ГНН для ранішнього ПНН

Дні вимірювань	Інтенсивність навантаження по годинним інтервалам, Ерл								
	9.00 – 10.00	9.15 – 10.15	9.30 – 10.30	9.45 – 10.45	10.00 – 11.00	10.15 – 11.15	10.30 – 11.30	10.45 – 11.45	11.00 – 12.00
1	19,67	<b>20,28</b>	18,86	17,94	16,86	15,66	15,30	14,50	15,90
2	16,88	19,03	<b>19,15</b>	18,38	17,03	16,20	15,45	15,69	15,16
...									
8	17,19	18,51	<b>19,06</b>	17,86	16,58	16,01	15,96	16,60	16,03
9	17,70	19,82	<b>20,04</b>	18,89	18,28	17,48	16,98	16,84	16,09
10	19,64	21,27	<b>21,63</b>	21,49	20,59	19,54	18,56	17,11	17,34
...									
21	17,86	19,55	20,82	<b>20,89</b>	19,39	19,04	18,06	16,51	15,48
22	18,81	20,24	<b>20,62</b>	19,57	18,52	17,92	16,84	15,78	15,00
...									
27	23,13	23,85	<b>25,60</b>	25,03	24,15	22,23	20,30	17,47	16,82
28	17,93	19,46	<b>19,96</b>	17,77	16,48	16,28	15,66	18,66	16,03
29	18,05	20,13	21,80	<b>22,42</b>	21,46	21,16	20,92	19,92	18,63
30	17,83	19,22	<b>19,69</b>	17,92	15,48	14,30	13,28	13,15	14,39
$M(Y)$	17,79	19,32	<b>19,98</b>	19,52	19,40	18,09	17,41	16,85	16,92
$D(Y)$	5,28	5,57	6,16	5,40	6,48	4,99	3,85	3,62	3,38



Саме для статистичної ГНН і проводяться усі розрахунки. Тобто, система має задовільно обслуговувати пікові навантаження, тоді у більш “спокійні” періоди якість буде вищою за необхідну. Звісно, що в решту часу (зокрема, вночі) ресурси телефонної мережі будуть використовуватися не так ефективно, як у ГНН. Але оператор зв’язку з допомогою технічних і маркетингових операцій може забезпечити економічне функціонування своєї інфокомунікаційної системи.

Частка навантаження, створюваного в ГНН -  $Y_{ГНН}$ , часто оцінюється коефіцієнтом концентрації –  $k_{ГНН}$ . Для його оцінки беруть відношення навантаження в ГНН до добового навантаження –  $Y_{доб}$

$$k_{ГНН} = \frac{Y_{ГНН}}{Y_{доб}}. \quad (3.3)$$

Діапазон значень цього коефіцієнту досить широкий. Для багатьох телефонних мереж у великих містах  $k_{ГНН} = 0,1$ . В менших мережах величина  $k_{ГНН}$  може приймати значення 0,2.

Для пучків каналів міжміських та міжнародних мереж згідно рекомендації E.500 ITU-T визначається 2 рівня ГНН: рівень *A* – середнє значення за 30 найбільш навантажених днів року (нормальний рівень), та рівень *B* – за 5 самих навантажених днів 30-денного періоду (підвищений рівень).

Середній час тривалості розмови суттєво залежить від типу виклику, як показано в табл. 3.2. Крім того, оскільки спроба з’єднання може бути перервана на будь-якому етапі, то середній час зайнятості комутаторів на початку комутаційного ланцюга менше, ніж в кінці. Слід відзначити, що комутаційне обладнання та з’єднувальні лінії займаються не тільки під час успішної розмови, але й в ході невдалих спроб. Тому середній час зайнятості комутаторів дещо менший, ніж середня тривалість розмови.

Таблиця 3.2.

Середній час тривалості різних типів викликів

Тип виклику	Середній час зайнятості, с
Міський	45 - 120
Міжміський	180 - 300
Міжнародний	300 - 600
Чекання відповіді абонентом А	20
Прослуховування сигналу “зайнято”	5
Час до початку набору номеру	2
Час набору однієї цифри	1.5 (дисконний) 0.6 (кнопковий)
Час до повторної спроби набору	30

Рівень відмов залежить як від властивостей потоку викликів (абонентської інтенсивності та середньої тривалості розмови), так і від кількості та продуктивності встановленого обладнання. Можна виділити чотири основні причини невдалої спроби виклику. Кожній причині властиві імовірності її появи –  $p_i$ :

- абонент  $B$  зайнятий –  $p_1$ ;
- абонент  $B$  не відповідає до початку повторної спроби –  $p_2$ ;
- неповний або неправильний набір номеру (помилка абонента  $A$ ) –  $p_3$ ;
- перевантаження системи і технічні помилки –  $p_4$ ;

Частка викликів, що закінчилися вдалим встановленням з’єднання ( $p_0$ ), може бути отримана за очевидною формулою:

$$p_0 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4). \quad (3.4)$$

Звичайно в телефонних мережах величина  $p_0$  має значення 0,5 – 0,7. Статистика відмов в обслуговуванні телефонної системи з прийнятною якістю обслуговування може мати наступний вигляд (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

## Приблизна статистика телефонної системи

Причина відмови в обслуговуванні	Рівень
Неповний або неправильний набір номеру (помилка абонента А)	5 – 10 %
Перевантаження системи і технічні помилки	1 – 5 %
Абонент Б зайнятий	10 – 20 %
Абонент Б не відповідає до початку повторної спроби	10 – 15%
Кількість успішних розмов	74 – 50 %
Кількість спроб на один успішний набір	1,4

Таким чином, технічні причини відмови в обслуговуванні складають меншу частку невдалих спроб. Але саме це значення нормується в телефонних мережах. І розрахунки СМО мають визначати необхідну кількість каналів обслуговування для забезпечення прийняттого рівня якості.

### 3.2 Навантаження і робота в СМО

Однією з найважливіших характеристик для СМО є поняття “*навантаження*” (*traffic*). Існують різні види навантаження, які розраховуються залежно від типу системи. Частину з них ілюструє рис.3.5. Розглянемо СМО з втратами, на яку надходить потік викликів, створюючи вхідне навантаження  $\Lambda$  (*навантаження, що надходить* – *offered traffic*). Якась частина цього навантаження  $Y$  обслуговується (*обслуговане навантаження* – *carried traffic*), а якась частина створює перевантаження для системи  $R$  (*надлишкове навантаження* – *rejected traffic*), виклики не отримують обслуговування і лишають систему.

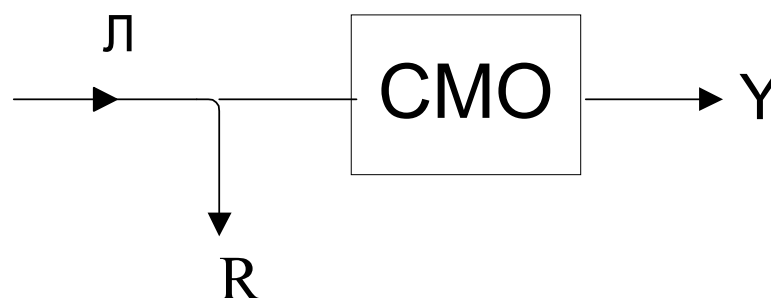


Рисунок 3.5 Основні види навантаження для системи з втратами

Основним при розрахунках є обслуговане навантаження. **Навантаження, що обслуговується** в момент  $t$ , - це число  $i(t)$  зайнятих каналів (або число одночасно обслуговуваних викликів) в момент  $t$ .  $i(t)$  – випадкова величина, тому при розрахунках використовують математичне очікування та дисперсію навантаження. Математичне очікування називають **інтенсивністю навантаження** в момент  $t$ :

$$Y(t) = M[i(t)] = \sum_{i=1}^v iP_i(t) \quad (3.5)$$

$P_i(t)$  – імовірність зайняття  $i$  ліній  $v$ -канальної СМО. При постійній імовірності  $P_i$  у межах деякого інтервалу часу

$$Y(t) = const$$

При подальшому викладенні в усіх розрахунках мається на увазі саме математичне очікування навантаження, тобто інтенсивність навантаження (навіть, якщо це не вказується). Точні значення імовірностей зайнятості того чи іншого числа каналів не завжди можна розрахувати. Тому на практиці, коли хочуть визначити навантаження деякої СМО, підраховують середнє число зайнятих ліній за інтервал  $(t_1, t_2)$  і вважають це інтенсивністю навантаження  $Y(t_1, t_2)$ .

Навантаження вимірюється в *Ерл (ерлангах)*. Навантаження в 1 *Ерл* створюється однією безперервно зайнятою лінією.

На рис. 3.6 на прикладі функціонування 5-лінійного пучка в інтервалі  $(t_1, t_2)$  показано: ступенева функція  $i(t)$  обслугованого навантаження, інтенсивність обслугованого за інтервал  $(t_1, t_2)$  навантаження  $Y(t_1, t_2)$  та тривалості зайняття кожної з 5 ліній  $\tau_j = (j = 1 \dots 5)$ .

Дисперсія навантаження в момент  $t$

$$D[i(t)] = \sum_{i=1}^v i^2 P_i(t) - M^2[i(t)]$$

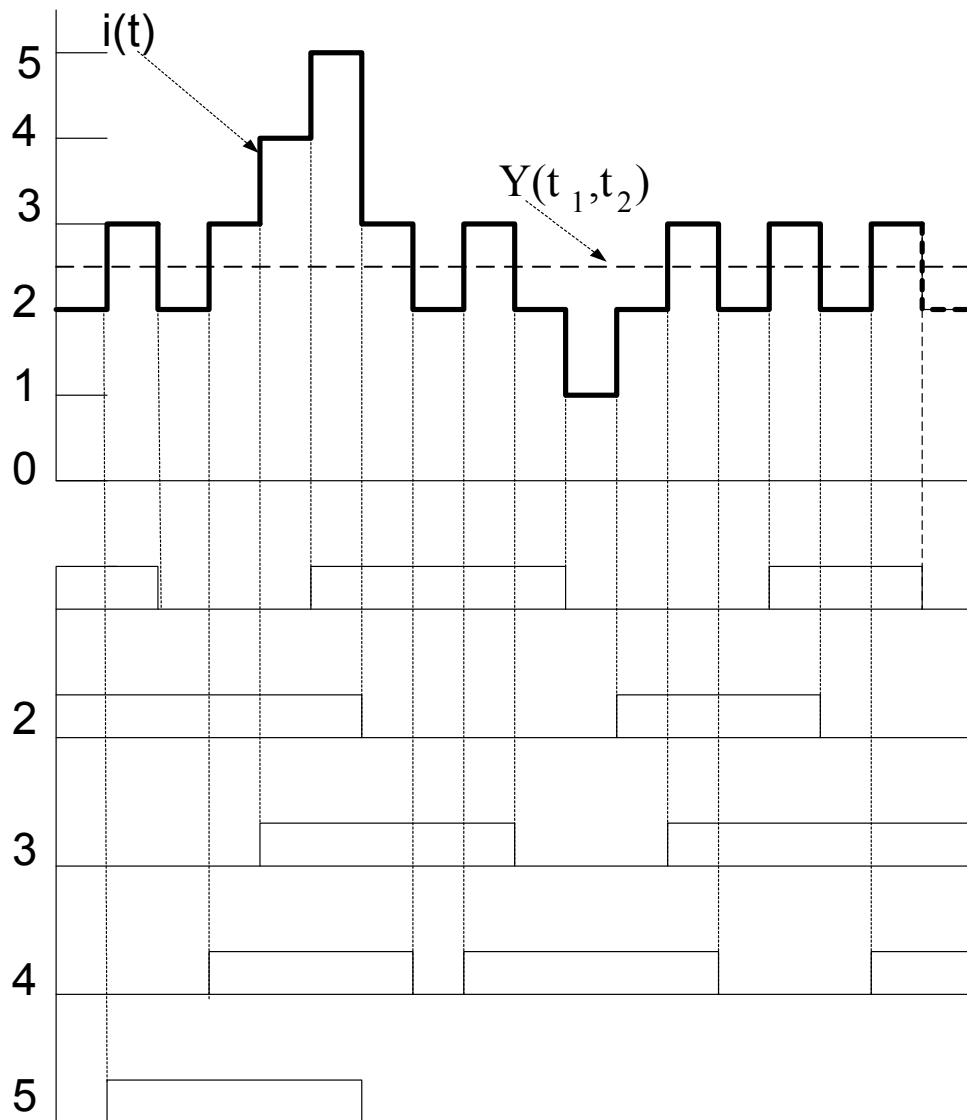


Рисунок 3.6. Зайняття ліній зв'язку в 5-лінійному пучку

Інтеграл функції  $i(t)$  за інтервал  $(t_1, t_2)$  характеризує **роботу** з передачі повідомлення, виконану СМО за цей час. Як видно з рис. 3.5, робота є площа фігури, обмеженої осями координат і функцією навантаження  $i(t)$ . Вона чисельно дорівнює сумарному часу зайняття усіх ліній за інтервал  $(t_1, t_2)$  :

$$\hat{Y}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = \sum_{j=1}^v \tau_j(t_1, t_2). \quad (3.6)$$

де  $\tau_j(t_1, t_2)$  – сумарний час зайняття  $i$  лінії за інтервал  $(t_1, t_2)$ . З іншого боку, можна скористатись відомою формулою чисельного інтегрування

(прямокутників) і визначити площу складної фігури, як добуток середнього значення  $Y(t_1, t_2)$  на довжину інтервалу  $(t_2 - t_1)$ :

$$\hat{Y}(t_1, t_2) = Y(t_1, t_2) = Y(t_1, t_2) \cdot (t_2 - t_1).$$

Звідки

$$Y(t_1, t_2) = \frac{\hat{Y}(t_1, t_2)}{(t_1 - t_2)}. \quad (3.7)$$

Поняттям роботи, або *інтегрального навантаження*, широко користуються при вимірюваннях в мережах зв'язку. Робота вимірюється в Ерл-год (ерланг-година) або годино-зайняттях. Роботу в 1 Ерл-год виконує лінія, безперервно зайнята протягом години, в 2 Ерл-год – 2 безперервно зайняті протягом години лінії або 1 лінія, безперервно зайнята протягом 2 годин.

Якщо роботу СМО представити графічно як функцію від  $t$ , то отримаємо швидко зростаючу лому лінію, вершини якої відповідають моментам зміни навантаження, а кут нахилу ломаної до осі  $t$  визначається як  $\arctg(t)$ .

Робота має властивість адитивності: виконану системою роботу за сусідні інтервали часу можна складати. Щодо інтенсивності навантаження властивість адитивності полягає в тому, що можна складати інтенсивності навантаження різних пучків, визначені на одному й тому ж часовому інтервалі.

### Приклад 3.1.

В 5-лінійній СМО протягом двогодинного періоду сумарний час зайняття першої лінії склав 65 хв., другої – 55 хв., третьої – 50 хв., четвертої – 45 хв., п'ятої – 40 хв. Визначити роботу, виконану системою, інтенсивність навантаження, середню тривалість одного зайняття при їх загальному числі 200.

Рішення:

За формулою (3.6) робота чисельно дорівнює сумарному часу зайняття усіх ліній за інтервал  $(t_1, t_2)$ :

$$F(t_1, t_2) = 65 + 55 + 50 + 45 + 40 = \frac{255}{60} = 4,25(E_{pl} - \text{год}) \quad \text{З формули (3.7)}$$

можна знайти  $Y(t_1, t_2)$ :

$$Y(t_1, t_2) = \frac{\hat{Y}(t_1, t_2)}{(t_1 - t_2)} = \frac{4,25}{2} = 2,125(E_{pl}). \quad \text{Середня тривалість одного}$$

зайняття

$$\bar{\tau} = \frac{255}{200} = 1,275(\text{хв.})$$

Формула (3.5) інтенсивності навантаження може бути дещо видозмінена: якщо на інтервалі  $T$  відомий загальний час  $t_1$ , протягом якого в системі було зайнято рівно  $i$  з  $v$  ліній, то відношення  $\frac{t_i}{T}$  дає статистичну оцінку імовірності  $P_i(T)$ , що дозволяє записати (3.5) у вигляді:

$$Y(T) = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^v i \cdot t_i, \quad (3.8)$$

де  $i$  – кількість одночасно зайнятих каналів

$v$  – загальна кількість каналів в системі

$t_i$  – загальний час, протягом якого було зайнято рівно  $i$  ліній

Крім того, якщо в системі виклики не отримують відмову, то все навантаження, що надходить в систему, буде обслуговано. Зайнятість такої системи (обслуговане навантаження за період  $T$ , а також і вхідне навантаження) залежить від інтенсивності надходження запитів на обслуговування (параметру потоку викликів) та тривалості окремої розмови, тобто може бути розрахована як

$$Y(T) = \lambda \cdot h, \quad (3.9)$$

де  $\lambda$  – параметр потоку викликів (або його середнє значення за час  $T$ );

$h$  – середній час обслуговування

Увага! Формула (3.9) може використовуватися тільки при відсутності втрат!

Таким чином, на практиці інтенсивність обслугованого навантаження може визначитися будь-яким з трьох способів, що дають формули (3.7), (3.8), (3.9).

Приклад 3.2.

В систему з кількістю ліній  $\nu > 3$  протягом 10 одиниць часу надійшло 5 викликів, які займали канали, як показано на рис. 3.7. Визначити обслуговане системою навантаження трьома способами.

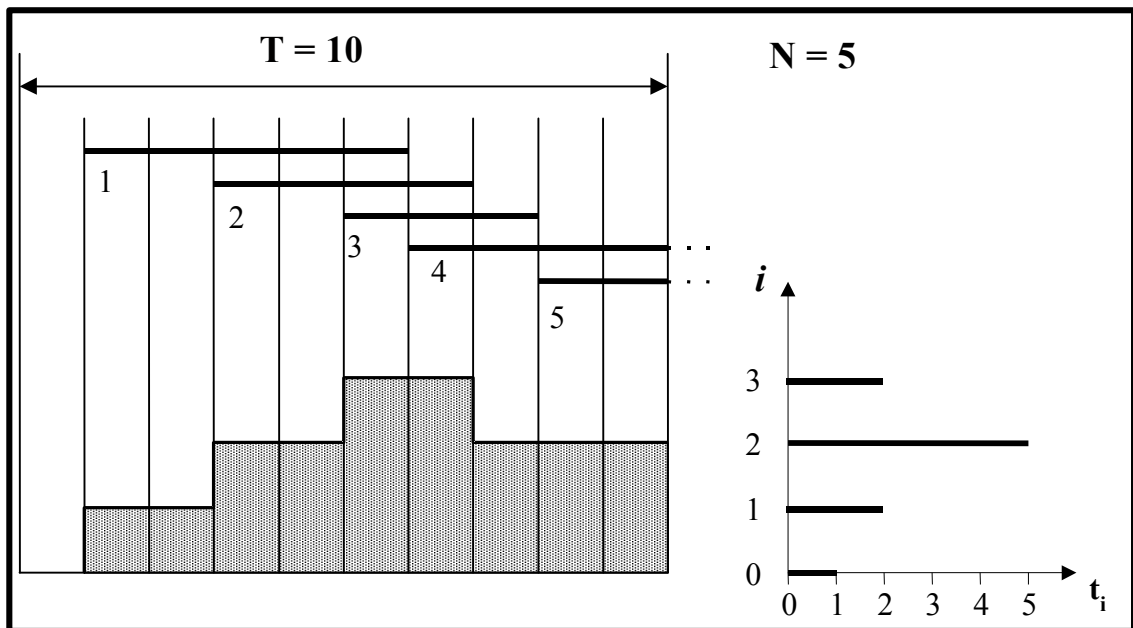


Рисунок 3.7

Рішення

I спосіб.

Як видно з рис.3.7, усі виклики отримали обслуговування, отже можна скористатися формулою (3.9). Для цього спочатку знайдемо параметр потоку, поділивши кількість викликів на інтервал часу, за який вони надійшли:



$$\lambda = \frac{N}{T} = \frac{5}{10} = 0,5(\text{викл} / \text{од. часу}).$$

Середній час обслуговування знайдемо, поділивши сумарний час обслуговування всіх викликів на їх число:

$$h = \frac{1}{5} \cdot (5 + 4 + 3 + 4 + 2) = 3,6(\text{од. часу}),$$

тоді

$$Y = 0,5 \cdot 3,6 = 1,8(\text{Ерл})$$

II спосіб – формула (3.7)

$$Y = \frac{1}{10} \cdot (5 + 4 + 3 + 2) = 1,8(\text{Ерл}).$$

III спосіб – формула (3.8)

$$Y = \frac{1}{10} \cdot (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2) = 1,8(\text{Ерл}).$$

Види навантаження та роботи

При аналізі СМО використовують наступні види навантаження та роботи:

- **Потенційне навантаження** (робота) – розраховані для ідеальної системи, в якій кожному виклику надається негайне обслуговування. Інтенсивність потенційного навантаження будемо позначати  $A$ . На практиці потенційне навантаження забезпечує система  $M_i/M/N/LL/$ , де кількість каналів обслуговування дорівнює кількості джерел, що можуть генерувати виклики. Тоді за кожним джерелом закріплюється свій КО. Прикладом такої системи є система урядового зв'язку.
- **Втрачене навантаження** (робота) – різниця між потенційним та обслугованим навантаженням (роботою). Інтенсивність втраченого навантаження визначається як:

$$Y_{вт} = A - Y. \quad (3.10)$$

- **Робота, що надходить** в СМО, – сумарний час обслуговування всіх викликів, що надійшли в розглянутому інтервалі часу
- **Навантаження, що надходить** в СМО, - похідна за часом від роботи, що надходить. Чисельно дорівнює добутку миттєвої інтенсивності потоку викликів в розглянутий момент часу на середній час обслуговування 1 виклику. Іntenсивність навантаження, що надходить в СМО, будемо позначати  $\Lambda$ . У випадку стаціонарного і ординарного потоку можна визначити  $\Lambda$  через параметр  $\lambda$ :

$$\Lambda = \lambda \cdot h. \quad (3.11)$$

Вхідне навантаження – це інтегральна характеристика, що описує як потік, що надходить в СМО, так і здатність системи його обслужити.

- **Надлишкове навантаження** дорівнює різниці між навантаженням, що надходить, та обслугованим навантаженням. Для інтенсивності надлишкового навантаження ( $R$ ) справедлива формула:

$$R = \Lambda - Y. \quad (3.12)$$

**Співвідношення між  $\Lambda$  і  $A$ ,  $Y_{втр}$  і  $R$ .**

Для найпростішого потоку :

$$\Lambda = A \quad \text{і} \quad Y_{втр} = R.$$

Для примітивного потоку, що надходить в СМО з явними втратами ( $M_i/M/V/L$ ) інтенсивність потенційного навантаження перевищує інтенсивність навантаження, що надходить в СМО  $\Lambda > A$ , оскільки джерело, що отримало відмову, стає вільним і надсилає нові виклики, тим самим збільшуючи  $\Lambda$  порівняно з  $A$ . Якщо примітивний потік надходить в систему з очікуванням ( $M_i/M/V/W$ ) маємо протилежну ситуацію: виклик, що стоїть в черзі, уповільнює надходження нових викликів від цього джерела, тобто  $\Lambda < A$ .

### 3.3 Характеристики якості обслуговування

Для різних дисциплін обслуговування (з втратами, з очікуванням, з повторенням) характерні свої показники якості:

#### 3.3.1 СМО з явними втратами

- імовірність втрати виклику
- імовірність втрат за часом
- імовірність втрат за навантаженням

Імовірність втрати виклику  $P_g(t_1, t_2)$ , що надійшов в інтервалі  $(t_1, t_2)$  – це відношення середніх інтенсивностей потоків втрачених викликів та викликів, що надійшли в інтервалі  $(t_1, t_2)$ :

$$P_g(t_1, t_2) = \frac{\mu_{em}(t_1, t_2)}{\mu(t_1, t_2)}. \quad (3.13)$$

Імовірність  $P_g(t_1, t_2)$  співпадає з імовірністю явної втрати повідомлення, що надійшло в розглянутому інтервалі. Якщо чисельник і знаменник (3.13) помножити на середній час обслуговування  $h$ , то отримаємо рівносильне відношення інтенсивностей надлишкового навантаження  $R(t_1, t_2)$  і навантаження, що надходить  $\Lambda(t_1, t_2)$ .

Для стаціонарних потоків імовірність  $P_g$  – величина постійна і не залежить від довжини та розташування інтервалу часу, що розглядається:

$$P_g = \frac{\mu_{em}}{\mu} = \frac{R}{\Lambda}. \quad (3.14)$$

Практичне вимірювання імовірності втрати виклику здійснюється шляхом підрахування

$$P_g = \frac{K_{em}(t)}{K(t)}. \quad (3.15)$$

Тут  $K_{вм}(t)$  і  $K(t)$  – відповідно кількість втрачених викликів за інтервал  $t$ , та викликів, що надійшли за цей інтервал. Формула (3.15) має тим більшу точність, чим більше  $t$ .

**Імовірність втрат за часом**  $P_t(t_1, t_2)$  в інтервалі  $[t_1, t_2)$  є імовірність зайнятості в цьому інтервалі усіх доступних джерелу з'єднувальних шляхів в потрібному напрямку, тобто – усіх каналів обслуговування. Подібний стан називають станом насичення або небезпечним часом системи. Імовірність  $P_t(t_1, t_2)$  характеризує потенційну імовірність втрати виклику в інтервалі  $[t_1, t_2)$ . Для стаціонарних потоків імовірність  $P_t$  – величина постійна для будь-якого інтервалу часу. При вимірюваннях на реальних системах обчислюють значення втрат за часом як частку розглянутого інтервалу, коли зайняті всі лінії системи.

**Імовірність втрат за навантаженням**  $P_n(t_1, t_2)$  в інтервалі  $[t_1, t_2)$  є відношення інтенсивностей втраченого та потенційного навантаження  $Y_{втр}(t_1, t_2)$  і  $A(t_1, t_2)$  в цьому інтервалі. Як і в попередніх випадках, для стаціонарних потоків імовірність  $P_n$  – величина постійна. При рівності інтенсивностей потенційного навантаження та навантаження, що надходить,  $P_n(t_1, t_2) = P_e(t_1, t_2)$ . При вимірюваннях на реальних системах значення втрат за навантаженням можна наближено оцінити як відношення інтенсивностей надлишкового і обслугованого навантажень в розглянутому інтервалі.

При теоретичних дослідженнях вказані характеристики визначають як для обмежених, так і для необмежених часових інтервалів.

### 3.3.2 Системи з очікуванням

В системах з очікуванням характеристиками якості є:

- імовірність очікування  $P(\gamma > 0)$ ;
- імовірність очікування більше допустимого часу  $P(\gamma > t_\partial)$ ;

- середній час очікування стосовно будь-якого виклику, що надійшов,  $\bar{\gamma}$  і стосовно затриманих викликів  $\bar{\gamma}_3$ ;
- середня довжина черги  $\bar{S}$ ;
- імовірність перевищення довжиною черги заданого значення  $n$   $P(S > n)$ .

### 3.3.3 Системи з повторенням викликів

В системах з повторенням викликів основними характеристиками якості є:

- імовірність втрати первинного виклику, що надійшов  $P_{e1}(t_1, t_2)$ ;
- імовірність явної втрати повідомлення, що надійшло  $\pi(t_1, t_2)$  при наявності обмеження на число повторень або на число джерел, що повторюють виклики);
- середній час очікування з'єднання  $\bar{\gamma}$ ;

Допоміжними характеристиками якості є:

- імовірність втрати повторного  $P_{e2}(t_1, t_2)$  або будь-якого виклику  $P_e(t_1, t_2)$ ;
- середнє число повторних спроб на одне встановлене з'єднання  $Q_1(t_1, t_2)$  або на один первинний виклик, що надійшов  $Q_2(t_1, t_2)$ ;
- імовірність втрат за часом і за навантаженням.

Визначення імовірностей втрат виклику і повідомлення, а також втрат за часом і за навантаженням даються аналогічно системам з втратами. Величини  $Q_1(t_1, t_2)$  та  $Q_2(t_1, t_2)$  знаходяться як відношення інтенсивності навантаження, що надходить, створеного потоком повторних викликів, до інтенсивності відповідно обслугованого навантаження або первинного навантаження, що надходить.

$$Q_1(t_1, t_2) = \frac{\Lambda_2(t_1, t_2)}{Y(t_1, t_2)}. \quad (3.16)$$

$$Q_1(t_1, t_2) = \frac{\Lambda_2(t_1, t_2)}{\Lambda(t_1, t_2)}. \quad (3.17)$$

Якщо явних втрат повідомлень нема, то  $Y(t_1, t_2) = \Lambda(t_1, t_2)$  (тобто обслуговуються всі первинні виклики) і відповідно  $Q_1(t_1, t_2) = Q_2(t_1, t_2)$ . При наявності явних втрат  $Q_1(t_1, t_2) > Q_2(t_1, t_2)$ . Середній час очікування з'єднання визначається через інтенсивність повторювання викликів джерелом  $\beta$ :

$$\bar{\gamma} = \frac{Q_1(t_1, t_2)}{\beta}. \quad (3.18)$$

### 3.3.4 Загальні характеристики якості

Для порівняння і аналізу СМО, зокрема комутаційних систем (КС), і окремих пучків ліній вводиться поняття *пропускної здатності* системи (пучка).

*Пропускна здатність* КС – інтенсивність обслугованого цією системою навантаження в розглянутому інтервалі часу при заданих показниках якості обслуговування. При обслуговуванні з явними втратами нормується імовірність втрати виклику, з повторенням – імовірність втрати первинного виклику, з очікуванням – імовірність очікування.

*Пропускна здатність* КС в загальному випадку залежить від:

- властивостей потоку викликів, що надходить,
- закону розподілу часу обслуговування,
- структури і ємності КС і способу включення її виходів,
- дисципліни обслуговування викликів,
- встановленої норми якості обслуговування.

Разом з пропускною здатністю всієї системи розглядають пропускну здатність окремих ліній і середню пропускну здатність однієї лінії (каналу).

## 3.4 Контрольні питання

1. Види навантажень в СМО.

2. Визначення, практичне вимірювання обслугованого навантаження, роботи в СМО.
3. Дати визначення навантаження, що надходить в систему. Що характеризує ця величина? Від чого залежить?
4. Які характеристики якості є основними для:
  - a) систем з втратами;
  - b) систем з очікуванням;
  - c) систем з повторенням викликів?
5. Які характеристики якості є допоміжними для цих систем?
6. Як на практиці оцінюється:
  - a) імовірність втрати виклику;
  - b) імовірність втрати за часом;
  - c) імовірність втрати за навантаженням
7. Коли імовірності втрати виклику та втрат за часом співпадають? У якому випадку відрізняються?
8. Яке співвідношення між потенційним навантаженням та навантаженням, що надходить у системах з втратами:
  - a) якщо в систему надходить найпростіший потік?
  - b) якщо в систему надходить примітивний потік?
9. Яке співвідношення між потенційним навантаженням та навантаженням, що надходить у системах з очікуванням:
  - a) якщо в систему надходить найпростіший потік?
  - b) якщо в систему надходить примітивний потік?
10. Від чого залежить пропускна здатність системи?

### 3.5 Завдання для самостійної роботи

1. В 4-лінійній системі протягом 3 годин обслуговано 500 викликів, при цьому лінії були зайняті відповідно 100 хв, 120 хв, 95 хв, 110 хв. Визначити, скільки ліній, в середньому, зайнято в системі і середню тривалість обслуговування одного виклику.

2. Над системою  $M/M/5/L$  із середнім часом обслуговування 100 с протягом години здійснювались спостереження за числом зайнятих каналів. Були отримані наступні результати:

Число зайнятих каналів	0	1	2	3	4	5
Частка часу	0,086	0,214	0,268	0,222	0,140	0,070

Визначити:

- інтенсивність обслугованого навантаження;
  - імовірність втрат за часом;
  - інтенсивність навантаження, що надходить (вважати, що втрати за навантаженням співпадають з втратами за часом)
  - скільки викликів отримали відмову протягом цієї години?
3. Лічильник зайнятості в системі встановлено так, що він видає імпульс кожні 6 секунд, якщо в системі зайнято всі канали. Протягом певної години значення лічильника зросли з 2430 до 2439. Чому дорівнюють втрати за часом в цій системі?
4. В систему  $M/M/5/L$  надходить потік з параметром 120 викл/год, середній час обслуговування 1 виклику – 15 с. Чому дорівнює інтенсивність навантаження, що надходить в систему? Як зміниться ця величина, якщо:
- середній час обслуговування 1 виклику зросте вдвічі;
  - параметр потоку зменшиться вдвічі;
  - кількість каналів системи зросте вдвічі?



## 4 МОДЕЛЮВАННЯ СМО ЗА СХЕМОЮ МАРКІВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

### 4.1 Марківський ланцюг з дискретним часом

Випадковий процес, що відбувається в системі  $S$ , називається *марківським (процесом без післядії)*, якщо для деякого моменту часу  $t_0$  імовірність будь-якого стану в майбутньому ( $t_0 > 0$ ) залежить тільки від її теперішнього стану ( $t_0 = 0$ ) і не залежить від того, коли і як система попала в цей стан (тобто від попередніх подій).

Випадковий процес називається *марківським ланцюгом (процесом з дискретними станами)*, якщо всі можливі стани системи можна перелічити  $S_1, S_2, S_3, \dots$ , а сам процес полягає в тому, що час від часу система миттєво (стрибком) переходить з одного стану в інший.

Тоді процес можна подати у вигляді *графу станів*:

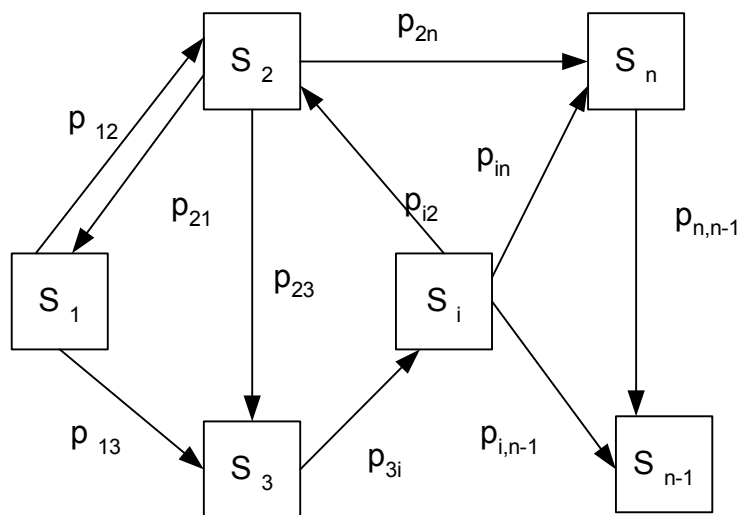


Рисунок 4.1. Граф станів

Якщо переходи системи з  $S_i$  в  $S_j$  можливі тільки в чітко визначені, заздалегідь фіксовані моменти  $t_1, t_2, \dots$  маємо *марківський ланцюг з дискретним часом*.

Розглянемо марківський ланцюг з дискретним часом як функцію цілочисельного аргументу  $1, 2, \dots, k$  (номер крока). Позначимо  $S_i^{(k)}$  – після  $k$  кроків система знаходиться в стані  $S_i$ . Звичайно, для будь-якого  $k$  система має знаходитися в одному з можливих станів, тобто події  $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, \dots, S_i^{(k)}, \dots, S_n^{(k)}$  утворюють повну групу подій.

Позначимо  $p_{ij}^{(k)}$  – імовірність того, що на  $k$  кроці система перейде із стану  $S_i$  в стан  $S_j$ . Оскільки ми розглядаємо марківський ланцюг, то для будь-якого кроку перехідна імовірність  $p_{ij}^{(k)}$  не залежить від попередніх подій, тобто через які стани система попала в стан  $S_i$ .

Якщо **перехідна імовірність**  $p_{ij}^{(k)}$  не залежить також від номеру кроку  $k$ , тобто  $p_{ij}^{(k)} = p_{ij} = \text{const}$ , то маємо **однорідний** марківський ланцюг, інакше – **неоднорідний**.

Розглянемо однорідний марківський ланцюг, заданий матрицею переходу:

$$\begin{aligned}
 & p_{11} \quad p_{12} \quad \dots \quad p_{1j} \quad \dots \quad p_{1n} \\
 & p_{21} \quad p_{22} \quad \dots \quad p_{2j} \quad \dots \quad p_{2n} \\
 [p_{ij}] = & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$p_{ij}$  – імовірність того, що за 1 крок система перейде із стану  $S_i$  в стан  $S_j$ . Фактично, це – умовна імовірність того, що на  $k$  кроці система опиниться в стані  $S_j$  при умові, що на  $(k-1)$  кроці вона була в стані  $S_i$ .

$$p_{ij} = P \left( \frac{S_j^{(k)}}{S_i^{(k-1)}} \right),$$

$p_{ii}$  - імовірність того, що за 1 крок система залишиться в стані  $S_i$

Деякі з елементів матриці можуть дорівнювати нулю. Це означає, що відповідні переходи неможливі (якщо  $p_{ij} = 0$ , за 1 крок система не може перейти із стану  $S_i$  в стан  $S_j$ ).

Для кожного рядка матриці переходу сума всіх імовірностей повинна дорівнювати 1 (оскільки на кожному кроці система має або перейти в якийсь стан, або залишитися в початковому):

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \text{ для } i = 1, n \quad (4.2)$$

Рівняння (4.2) називається **умовою нормування**.

Поставимо задачу:

знайти  $P_i(k)$  – імовірності будь-якого  $i$  – ого стану системи після  $k$  – го кроку.

Якщо в початковий момент система знаходиться у стані  $S_m$ , то імовірність цього стану на нульовому кроці дорівнює 1, а всіх інших – 0:

$$P_1(0) = 0, P_2(0) = 0, \dots, P_n(0) = 0, P_m(0) = 1.$$

За перший шаг система може перейти в один із станів  $S_1, S_2, \dots, S_n$  з імовірностями, заданими відповідним  $(m - m)$  рядком матриці переходу:

$$\begin{matrix} S_1 & S_2 & \dots & S_m & \dots & S_n \\ P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mm} & \dots & P_{mn} \end{matrix} .$$

Отже, імовірності після першого кроку марківського ланцюга:

$$P_1(1) = p_{m1}, P_2(1) = p_{m2}, \dots, P_n(1) = p_{mn}, P_m(1) = p_{mm} . \quad (4.3)$$

Обчислення імовірностей на наступному кроці є більш складною задачею, оскільки нам невідомий точний стан системи на першому кроці, а є тільки припущення щодо цього і відповідні імовірності можливих станів системи (4.3). Скористаємося формулою повної імовірності [5]: якщо деяка подія  $A$  може відбутися тільки сумісно з якимись подіями (гіпотезами)  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , що утворюють повну групу подій, то

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P\left(\frac{A}{H_i}\right).$$

В нашому випадку умовні імовірності дає матриця переходу (4.1), а гіпотезами виступають припущення, що система на першому кроці була в тому або іншому стані, ці імовірності дає рівняння (4.3).

Таким чином для обчислення імовірності того, що система на другому кроці буде, наприклад, в стані  $S_1$ , ми маємо розглянути всі можливі комбінації. Система на попередньому (першому) кроці могла бути в першому стані з імовірністю  $P_1(1)$  і за другий крок не здійснити ніяких переходів, тобто лишитися в цьому ж стані з імовірністю  $p_{11}$ , або бути в другому стані з імовірністю  $P_2(1)$  і за другий крок перейти в перший з імовірністю  $p_{21}$  і т.д.:

$$P_1(2) = P_1(1) \cdot p_{11} + P_2(1) \cdot p_{11} + P_2(1) \cdot p_{21} + \dots + P_n(1) \cdot p_{n1} = \sum_{j=1}^n P_j(1) \cdot p_{j1}.$$

Для стану  $S_i$

$$P_i(2) = \sum_{j=1}^n P_j(1) \cdot p_{ji}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для 3 кроку усі імовірності обчислюються через розраховані на другому кроці:

$$P_i(3) = \sum_{j=1}^n P_j(2) \cdot p_{ji}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для  $k$ -го кроку використовується рекурентна формула через  $(k-1)$ -й крок:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^n P_j(k-1) \cdot p_{ji}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

#### Приклад 4.1.

По мішені здійснюється 4 постріли у фіксовані моменти часу  $t_1, t_2, t_3, t_4$ .

Можливі наступні стани мішені:

$S_1$  – мішень не ушкоджено,  $S_2$  - мішень незначно ушкоджено

$S_3$  - мішень значно ушкоджено,  $S_4$  – мішень зруйновано

Імовірності переходу між станами за 1 крок задано розміченим графом:

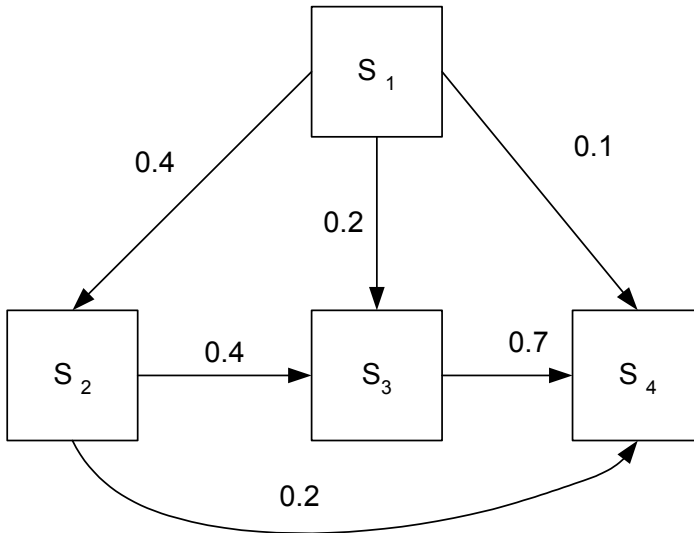


Рисунок 4.2.

В початковий момент часу мішень неушкоджена ( $S_1$ ). Визначити імовірності станів після 4 пострілів.

Рішення.

За графом станів заповнимо матрицю перехідних імовірностей.

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В початковий момент система знаходиться у стані  $S_1$ , тобто  $P_1(0) = 1$

Тому імовірності системи після першого пострілу (першого кроку марківського ланцюга) дає перший рядок матриці переходу:

$$P_1(1) = 0,3 \quad P_2(1) = 0,4 \quad P_3(1) = 0,2 \quad P_4(1) = 0,1$$

Для обчислення імовірностей системи **після другого кроку** розглядаємо всі можливі випадки за формулою (4.4):

$$P_1(2) = P_1(1) \cdot p_{11} + P_2(1) \cdot p_{21} + P_3(1) \cdot p_{31} + P_4(1) \cdot p_{41} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09.$$

$$P_2(2) = P_1(1) \cdot p_{12} + P_2(1) \cdot p_{22} + P_3(1) \cdot p_{32} + P_4(1) \cdot p_{42} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,28.$$

$$P_3(2) = P_1(1) \cdot p_{13} + P_2(1) \cdot p_{23} + P_3(1) \cdot p_{33} + P_4(1) \cdot p_{43} = 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,28.$$

$$P_4(2) = P_1(1) \cdot p_{14} + P_2(1) \cdot p_{24} + P_3(1) \cdot p_{34} + P_4(1) \cdot p_{44} = 0,3 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 1 = 0,35.$$

Перевірка:

$$0,09 + 0,28 + 0,28 + 0,35 = 1$$

Третій крок:

$$P_1(3) = P_1(2) \cdot p_{11} + P_2(2) \cdot p_{21} + P_3(2) \cdot p_{31} + P_4(2) \cdot p_{41} = 0,09 \cdot 0,3 = 0,027.$$

$$P_2(3) = P_1(2) \cdot p_{12} + P_2(2) \cdot p_{22} + P_3(2) \cdot p_{32} + P_4(2) \cdot p_{42} = 0,09 \cdot 0,4 + 0,28 \cdot 0,4 = 0,148.$$

Аналогічно

$$P_3(3) = 0,214$$

$$P_4(3) = 0,611$$

$$0,027 + 0,148 + 0,214 + 0,611 = 1$$

Для **4 кроку** використовуємо імовірності станів, обчислені на третьому кроці:

$$P_1(4) = 0,0081$$

$$P_2(4) = 0,0700$$

$$P_3(4) = 0,1288$$

$$P_4(4) = 0,7931$$

$$0,0081 + 0,0700 + 0,1288 + 0,7931 = 1$$

Розглянемо більш загальний випадок – неоднорідного марківського ланцюга, для якого перехідні імовірності змінюються, тобто матриця

переходу задана у вигляді  $[p_{ij}^{(k)}]$ , де  $p_{ij}^{(k)} = P\left(\frac{S_j^{(k)}}{S_i^{(k-1)}}\right)$ . В цьому випадку

рівняння (4.3) матиме вигляд:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^n P_j(k-1) \cdot p_{ji}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

## 4.2 Марківський ланцюг з безперервним часом. Система диференційних рівнянь Колмогорова

Якщо переходи системи з  $S_i$  в  $S_j$  можливі в довільний момент  $t$  маємо *марківський ланцюг з безперервним часом*. Поставимо задачу аналогічно дискретному випадку: знайти імовірності всіх станів системи для довільного моменту  $t$ :  $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ .

В цьому випадку задаються не імовірності переходу (оскільки точно не відомі моменти переходу), а *щільність імовірності переходу*  $\lambda_{ij}$  – границя відношення імовірності переходу системи за елементарний інтервал  $\Delta t$  з  $S_i$  в  $S_j$ , якщо система в момент  $t$  знаходиться у стані  $S_i$ , до довжини цього інтервалу:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}. \quad (4.5)$$

З (4.5) при невеликих  $\Delta t$  з точністю до безкінечно малої впливає:

$$P_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}(t) \cdot \Delta t. \quad (4.6)$$

Якщо всі  $\lambda_{ij}(t) = c_{ijnst}$  (не залежать від  $t$ ), маємо *однорідний* марківський ланцюг, інакше – *неоднорідний*.

Якщо нам відомі щільності імовірностей переходу  $\lambda_{ij}$  для усіх пар  $(S_i, S_j)$  (задано розмічений граф станів), то імовірності станів  $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$  є функціями часу, що задовольняють системі диференційних рівнянь (СДР) Колмогорова. Виведемо СДР на прикладі системи, зображеної на рис. 4.3:

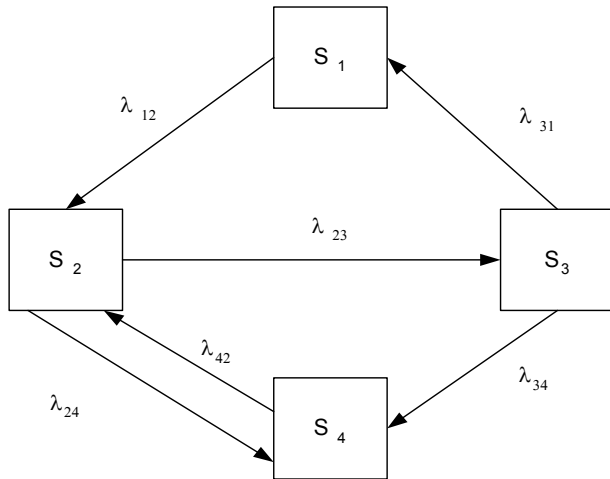


Рисунок 4.3

Нехай стан системи в момент  $t$  невідомий, дамо  $t$  приріст  $\Delta t$  і знайдемо імовірність того, що система в момент  $t + \Delta t$  знаходиться в стані  $S_1$ , тобто

$$P_1(t + \Delta t).$$

При цьому враховуємо умову нормування: для будь-якого моменту часу  $t$  сума усіх імовірностей станів дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^n P_i(t) = 1 \quad (4.7)$$

Тоді імовірність переходу між станами за  $\Delta t$  обчислюється за (4.6), а імовірність того, що система не перейде за цей час в інший стан, витікає з (4.7) і дорівнює  $(1 - \text{сума усіх імовірностей переходу})$ .

З рисунку 4.3 видно, що система в момент  $t + \Delta t$  може бути в стані  $S_1$  в результаті двох незалежних подій: система була в  $S_1$  в момент  $t$  і не здійснила ніякого переходу за  $\Delta t$  або була в стані  $S_3$  і здійснила за  $\Delta t$  перехід у  $S_1$ :

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t) \cdot (1 - \lambda_{12}\Delta t) + P_3(t) \cdot \lambda_{31}\Delta t = P_1(t) - P_1(t) \cdot \lambda_{12}\Delta t + P_3(t) \cdot \lambda_{31}\Delta t.$$

Здійснимо деякі елементарні перетворення:

$$P_1(t + \Delta t) - P_1(t) = -P_1(t) \times \lambda_{12}\Delta t + P_3(t) \times \lambda_{31}\Delta t.$$



$$\frac{\{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)\}}{\Delta t} = -P_1(t) \cdot \lambda_{12} + P_3(t) \cdot \lambda_{31}.$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -P_1(t) \cdot \lambda_{12} + P_3(t) \cdot \lambda_{31}.$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t).$$

Аналогічні рівняння можна вивести для інших станів системи:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t).$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda_{23}P_2(t) - \lambda_{23}P_2(t) - \lambda_{24}P_2(t). \quad (4.8)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -\lambda_{31}P_3(t) - \lambda_{34}P_3(t) + \lambda_{23}P_2(t).$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = -\lambda_{42}P_4(t) + \lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{34}P_3(t).$$

Інтегрування дає нам потрібні імовірності як функції часу. Початкові умови беруться з початкового стану системи. Якщо при  $t=0$  система знаходиться в  $S_1$ , то

$$P_1(0) = 1, P_2(0) = 0, P_3(0) = 0, P_4(0) = 0.$$

З (4.8) витікає загальне правило запису СДР Колмогорова:

*Ліва частина кожного рівняння – похідна відповідної імовірності стану за часом; права частина має стільки доданків, скільки стрілок пов'язано з цим станом. Кожний доданок дорівнює добутку щільності переходу по стрілці на імовірність того стану, з якого виходить стрілка, і береться з “+” або “-” залежно від напрямку стрілки.*

Приклад 4.2.

Задано розмічений граф станів системи (рис. 4.4). Записати СДР Колмогорова, якщо відомо, що система в початковий момент часу знаходиться в стані  $S_1$ .

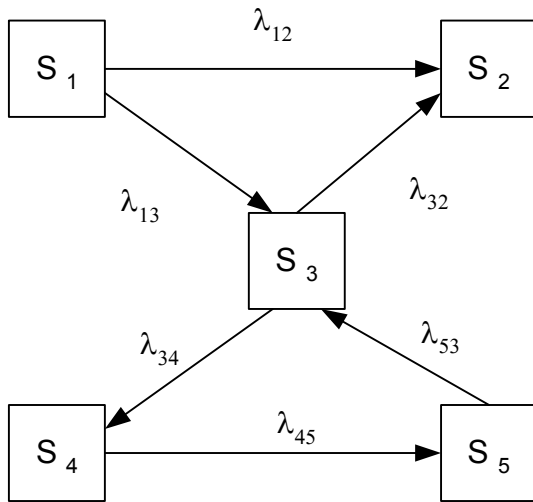


Рисунок 4.4

СДР Колмогорова для такої системи має вигляд:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{12}P_1(t) - \lambda_{13}P_1(t).$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{32}P_3(t) + \lambda_{12}P_1(t).$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_{13}P_1(t) + \lambda_{53}P_5(t) - \lambda_{32}P_3(t) - \lambda_{34}P_3(t).$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = \lambda_{34}P_3(t) - \lambda_{45}P_4(t).$$

$$\frac{dP_5(t)}{dt} = \lambda_{45}P_4(t) - \lambda_{53}P_5(t).$$

Початкові умови (враховуючи, що в початковий момент часу система знаходиться в стані  $S_1$ ):

$$P_1(0) = 1, P_2(0) = 0, P_3(0) = 0, P_4(0) = 0, P_5(0) = 0.$$

Граничні імовірності. Умови існування усталеного режиму.

Вирішення системи диференціальних рівнянь для відшукування імовірностей станів – це досить складна задача. Для більшості реальних

систем, що моделюються марківськими ланцюгами, цю задачу можна суттєво спростити і замінити вирішення системи диференціальних рівнянь розв'язанням системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Якщо для деякої системи, що описується марківським ланцюгом з безперервним часом, знайдено імовірності станів  $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$  і для цих імовірностей існують границі при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t) = P_i = \text{const} \quad (4.9)$$

то така система функціонує в *усталеному* режимі, а постійні імовірності (4.9) називаються *граничними* імовірностями. Граничні імовірності показують частку часу на великому інтервалі, яку система знаходиться у відповідному стані.

Те, що система перебуває в усталеному режимі не означає, що в ній перестає відбуватися випадковий процес. Система випадковим чином переходить з одного стану до іншого, але імовірності всіх станів перестають змінюватися з часом.

*Умовою існування усталеного режиму* (і, відповідно, існування граничних імовірностей) для системи, де відбувається марківський процес з безперервним часом, є можливість переходу з будь-якого одного стану системи в будь-який інший за те чи інше число кроків.

Наприклад, система, зображена на рис. 4.3 може функціонувати в усталеному режимі – для неї можливі переходи між будь-якими станами системи (за те чи інше число кроків). А для системи з рис. 4.4 усталеного режиму не існує: система не може перейти в стан  $S_1$  з інших станів, крім того, потрапивши у стан  $S_2$ , систем не може вийти з нього.

Формальною ознакою існування усталеного режиму є наявність бодай однієї вхідної та вихідної стрілки для кожного стану системи. Як видно із розглянутих прикладів, для системи з рис.4.3 ця ознака має місце, а для системи з рис.4.4 – ні. Для неї стан  $S_1$  має тільки вихідні стрілки і жодної вхідної, а стан  $S_2$  – тільки вхідні стрілки і жодної вихідної.

Для того, щоб знайти значення граничних імовірностей треба в СДР Колмогорова прирівняти усі похідні до 0 і розв'язати отриману систему однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь, враховуючи умову нормування, яка для постійних граничних імовірностей матиме вигляд:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad (4.10)$$

### Приклад 4.3

Для системи, зображеної на рис.4.3, знайти граничні імовірності.

Рішення:

Як ми тільки що з'ясували, в такій системі існує усталений режим, а отже можна знайти граничні імовірності. СДР Колмогорова для цієї системи дає (4.8). Прирівняємо до 0 усі похідні, отримаємо:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t) . \\ 0 &= -\lambda_{23}P_2(t) - \lambda_{24}P_1(t) + \lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{42}P_4(t) . \\ 0 &= -\lambda_{31}P_3(t) - \lambda_{34}P_3(t) + \lambda_{23}P_2(t) . \\ 0 &= -\lambda_{42}P_4(t) + \lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{34}P_3(t) . \end{aligned}$$

Перенесемо усі від'ємні складові у ліву частину рівнянь:

$$\begin{aligned} \lambda_{12}P_1(t) &= \lambda_{31}P_3(t) . \\ \lambda_{23}P_2(t) + \lambda_{24}P_1(t) &= \lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{42}P_4(t) . \\ \lambda_{31}P_3(t) + \lambda_{34}P_3(t) &= \lambda_{23}P_2(t) . \\ \lambda_{42}P_4(t) &= \lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{34}P_3(t) . \\ P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) &= 1 . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Вирішення системи (4.11) (останнє рівняння – це умова нормування) дає граничні імовірності. Крім того, з (4.11) впливає правило запису системи алгебраїчних рівнянь для граничних імовірностей:

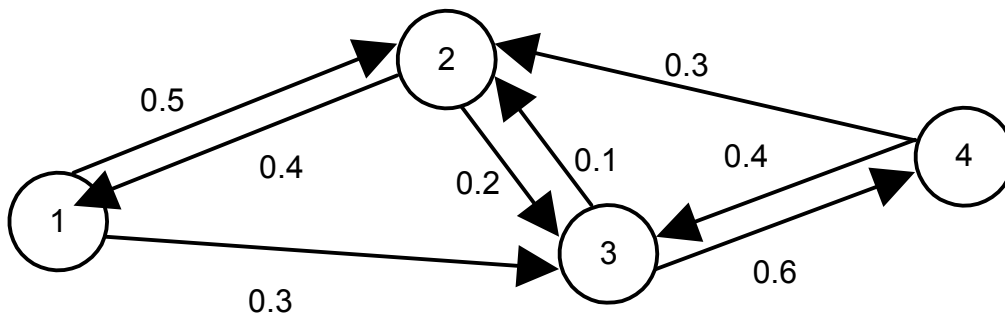
для кожного стану системи сума усіх вихідних інтенсивностей, помножених на імовірність цього стану, дорівнює сумі усіх вхідних інтенсивностей, помножених на імовірності станів, з яких здійснено відповідний перехід

### 4.3 Контрольні питання

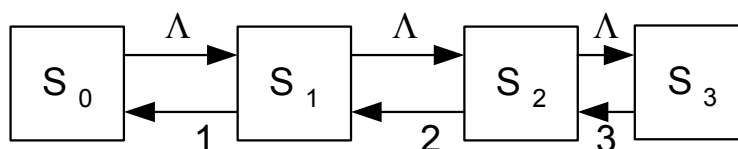
1. Дати визначення марківському ланцюгу з дискретним часом.
2. Навести правило запису СДР Колмогорова.
3. Дати визначення граничним імовірностям.
4. Навести умову існування усталеного режиму.
5. Навести правило запису системи алгебраїчних рівнянь для граничних імовірностей.

### 4.4 Завдання для самостійної роботи

1. В системі відбувається марківський процес з дискретним часом. Визначити імовірності усіх станів системи, якщо на початку система знаходилась у першому стані.



2. В системі відбувається марківський процес з безперервним часом. Визначити, чи існує в ній усталений режим. Записати систему алгебраїчних рівнянь для граничних імовірностей.



## 5 СИСТЕМИ З ЯВНИМИ ВТРАТАМИ

### 5.1 Система $M/M/V/L$ . Перший розподіл Ерланга

Розглядається наступна модель: на вхід  $v$ -канальної системи з явними втратами надходить найпростіший потік викликів з параметром  $\lambda$ . Час обслуговування викликів – випадкова величина, розподілена за експоненціальним законом, з середнім часом обслуговування, прийнятим за 1 умовну одиницю часу ( $h=1 \text{ у.о.ч.}$ ) В цьому разі можна параметр потоку, виражений у викликах за 1 умовну одиницю часу, трактувати як інтенсивність навантаження, що надходить в систему:

$$\Lambda = \lambda \cdot h, \text{Ерл} .$$

Виклик, що надійшов в систему в момент зайнятості усіх каналів, отримує відмову і втрачається для системи.

Поставимо задачу:

знайти імовірності зайнятості будь-якого числа каналів системи.

Розглянемо всі можливі стани системи і переходи між ними. За стан системи прийmemo кількість зайнятих каналів  $i = 0, 1, \dots, v$ . Переходи в системі здійснюються під впливом надходження потоку викликів з постійною інтенсивністю  $\Lambda$  (кількість зайнятих каналів збільшується) та закінчення їх обслуговування (кількість зайнятих каналів зменшується). Оскільки (п. 2.8) інтенсивність потоку звільнень  $\mu_{зв} = \frac{i}{h}$ , а ми прийняли  $h=1 \text{ у.о.ч.}$ , то зворотні переходи в системі здійснюються з інтенсивністю, рівною кількості зайнятих каналів  $i$ . Граф станів системи має вигляд (рис.5.1):

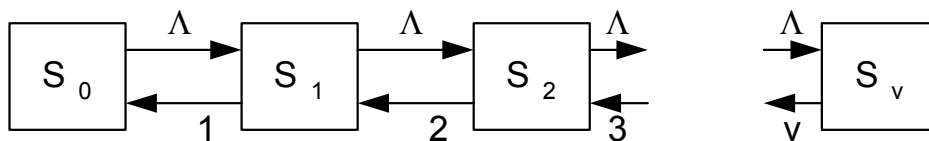


Рисунок 5.1 Граф станів системи з втратами

В даній системі діють найпростіший та примітивний (з простою післядією) потоки, таким чином випадковий процес, що відбувається в системі, являє собою марківський ланцюг з безперервним часом (п. 4.2). Крім того, в системі існує усталений режим (п.4.3). Отже можна записувати рівняння для граничних імовірностей.

Для стану  $S_0$

$$\Lambda \cdot P_0 = 1 \cdot P_1 \quad \Rightarrow P_1 = \frac{\Lambda}{1} \cdot P_0 .$$

Для стану  $S_1$

$$\Lambda \cdot P_0 + 2 \cdot P_2 = (1 + \Lambda) \cdot P_1 .$$

$$\Lambda \cdot P_0 + 2 \cdot P_2 = 1 \cdot P_1 + \Lambda \cdot P_1 .$$

Скорочуючи на рівні складові з попереднього рівняння, отримуємо

$$2 \cdot P_2 = \Lambda \cdot P_1 \quad \Rightarrow P_2 = \frac{\Lambda}{2} \cdot P_1 = \frac{\Lambda^2}{2!} \cdot P_0 .$$

Для стану  $S_i$

$$\Lambda \cdot P_{i-1} + (i+1) \cdot P_{i+1} = (i + \Lambda) \cdot P_i .$$

$$(i+1) \cdot P_{i+1} = \Lambda \cdot P_i . \quad (5.1)$$

Після відповідних перетворень:

$$P_i = \frac{\Lambda}{i} \cdot P_{i-1} = \frac{\Lambda^i}{i!} \cdot P_0 . \quad (5.2)$$

Підставляючи (5.2) в умову нормування для цієї системи, яка має вид

$$P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_v = 1,$$

отримуємо:

$$P_0 + \frac{\Lambda}{1} \cdot P_0 + \Lambda^2 \cdot 2! \cdot P_0 + \dots + \frac{\Lambda^v}{v!} \cdot P_0 = 1 .$$

$$P_0 \cdot \left[ 1 + \frac{\Lambda}{1} + \frac{\Lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\Lambda^v}{v!} \right] = 1 .$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[ 1 + \frac{\Lambda}{1} + \frac{\Lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\Lambda^v}{v!} \right]} = \frac{1}{\sum_{j=0}^v \frac{\Lambda^j}{j!}} . \quad (5.3)$$

Підставляючи (5.3) в (5.2), отримуємо:

$$P_i = \frac{\Lambda^i / i!}{\sum_{j=0}^v \Lambda^j / j!} \quad (5.4)$$

Формула (5.4) дає *перший розподіл Ерланга*.

### Приклад 5.1.

Для системи  $M/M/3/L$  обчислити імовірності усіх станів системи при інтенсивності вхідного потоку 5 викл/хв і середньому часі обслуговування 24 с.

### Рішення

Граф станів системи зображений на рис. 5.2.

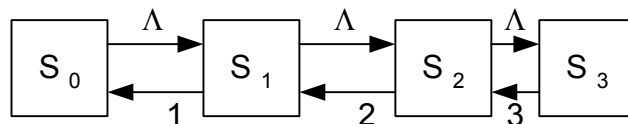


Рисунок 5.2

Інтенсивність навантаження, що надходить:

$$\Lambda = \lambda \cdot h = 5 \cdot \frac{24}{60} = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2(\text{Ерл}) .$$

Імовірності станів обчислюємо за першим розподілом Ерланга (5.4):

$$P_0 = \frac{1}{\left[ 1 + \frac{\Lambda}{1} + \frac{\Lambda^2}{2!} + \frac{\Lambda^3}{3!} \right]} = \frac{1}{\left( 1 + 2 + 2 + \frac{8}{6} \right)} = \frac{3}{19} = 0,158 .$$



$$P_1 = \frac{2}{\left[1 + \frac{\Lambda}{1} + \frac{\Lambda^2}{2!} + \frac{\Lambda^3}{3!}\right]} = \frac{2}{\left(1 + 2 + 2 + \frac{8}{6}\right)} = \frac{6}{19} = 0,316 .$$

$$P_2 = \frac{\frac{2^2}{2!}}{\left[1 + \frac{\Lambda}{1} + \frac{\Lambda^2}{2!} + \frac{\Lambda^3}{3!}\right]} = \frac{2}{\left(1 + 2 + 2 + \frac{8}{6}\right)} = \frac{6}{19} = 0,316 .$$

$$P_3 = \frac{\frac{2^3}{3!}}{\left[1 + \frac{\Lambda}{1} + \frac{\Lambda^2}{2!} + \frac{\Lambda^3}{3!}\right]} = \frac{\frac{4}{3}}{\left(1 + 2 + 2 + \frac{8}{6}\right)} = \frac{4}{19} = 0,211 .$$

Перевірка:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \frac{3}{19} + \frac{6}{19} + \frac{6}{19} + \frac{4}{19} = \frac{19}{19} = 1 .$$

Графік розподілу приведено на рисунку 5.3.

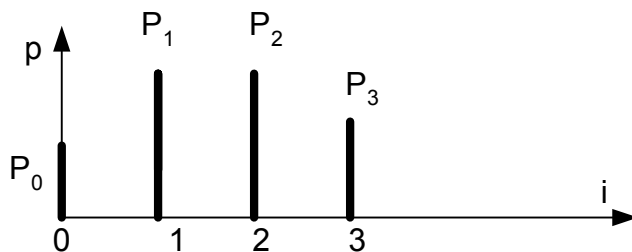


Рисунок 5.3.

Отриманий збіг значень  $P_2$  і  $P_3$  – не випадковість. Перший розподіл Ерланга має такі максимуми:

1. Якщо  $\Lambda > \nu$ , то максимум один:  $P_{\max} = P_\nu$ . Дійсно, якщо навантаження, що надходить в систему, виміряне в ерлангах, перевищує кількість каналів, то максимальну імовірність буде мати стан зайнятості усіх каналів.

2. Якщо  $\Lambda \leq \nu$ , то залежно від того, ціле чи дробове  $\Lambda$ , максимумів два або один:

- a. при  $\Lambda$  цілому маємо 2 максимуми  $P_{\max 1} = \Lambda, P_{\max 2} = \Lambda - 1$
- b. при  $\Lambda$  дробовому маємо 1 максимум  $P_{\max} = [\Lambda]$

### Приклад 5.2

Яку кількість каналів зайнято з максимальною імовірністю в системі  $M/M/3/L$ , якщо виклики надходять у систему, в середньому, через 10 с і обслуговуються, в середньому, 20 с? Рішення:

Максимуми першого розподілу Ерланга залежать від  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \lambda \cdot h = \frac{1}{z} \cdot h = \frac{h}{z} = \frac{20}{10} = 2(E_{pl}).$$

Відповідь: з максимальною імовірністю (найчастіше) в такій системі зайнято 2 або 1 канал.

## 5.2 Характеристики якості системи $M/M/\nu/L$

### 5.2.1 Імовірність втрат за часом

Згідно з визначенням (п.3.1.1) імовірність втрат за часом визначається як імовірність зайнятості усіх каналів, доступних виклику. Тобто,  $P_t = P_\nu$ .

Використовуючи (5.4), отримуємо

$$P_{\nu} = \frac{\frac{\Lambda^\nu}{\nu!}}{\sum_{j=0}^{\nu} \frac{\Lambda^j}{j!}} = E_\nu(\Lambda). \quad (5.5)$$

Ця формула була отримана Ерлангом в 1917 р. Вона відома під назвою *першої формули Ерланга (B-формули Ерланга)* і символічно позначається  $E_\nu(\Lambda)$ . При її виводі Ерланг використовував допущення про пуассонівський (найпростіший) вхідний потік і експоненціальний розподіл

тривалості обслуговування заявок. Пізніше Б.А. Севастьянов довів, що (5.5) виконується для будь-якого закону розподілу тривалості обслуговування викликів.

Оскільки  $E_v(\Lambda)$  – це імовірність, то, звісно, її значення знаходяться в межах:

$$0 \leq E_v(\Lambda) \leq 1.$$

Слід зазначити, що при  $v = \text{const}$   $E_v(\Lambda)$  зростає по  $\Lambda$  (чим більше навантаження надходить в систему, тим більші втрати). І навпаки, при  $\Lambda = \text{const}$   $E_v(\Lambda)$  зменшується по  $v$  (чим більше каналів обслуговує навантаження, тим менші втрати).

Формула Ерланга табульована (додаток 1). Ця таблиця дозволяє розрахувати одну зі змінних у (5.5) з певним дискретним кроком. Для ємності пучка це природно. Для інших величин (імовірність втрат і навантаження) це не завжди зручно. Тому іноді доцільно використовувати таке рекурентне співвідношення:

$$E_v(\Lambda) = \frac{\Lambda E_{v-1}(\Lambda)}{v + \Lambda E_{v-1}(\Lambda)}.$$

### 5.2.2 Інтенсивність обслугованого навантаження

Згідно визначення (3.1), інтенсивність обслугованого навантаження:

$$Y(t) = M[i(t)] = \sum_{i=1}^v iP_i(t).$$

Використовуючи рекурентні співвідношення (5.1), одержуємо

$$Y = \sum_{i=1}^v iP_i = \Lambda \sum_{i=1}^v P_{i-1} = \Lambda \sum_{i=0}^{v-1} P_i = \Lambda(1 - P_v) = \Lambda[1 - E_v(\Lambda)]. \quad (5.6)$$

### 5.2.3 Інтенсивність потенційного навантаження

Згідно визначення (п. 3.2) потенційне – навантаження розраховане для ідеальної системи, де кожному виклику надається негайне обслуговування. Для цього кількість каналів обслуговування повинна дорівнювати кількості джерел викликів. Найпростіший потік створює безкінечна кількість джерел викликів. Отже:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} iP_i = \Lambda \sum_{i=1}^{\infty} P_{i-1} = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} P_i = \Lambda . \quad (5.7)$$

В (5.7) імовірності  $P_i$  визначаються за розподілом Пуассона.

### 5.2.4 Інтенсивність втраченого навантаження

Рівність інтенсивностей потенційного навантаження та навантаження, що надходить, призводить до рівності інтенсивностей втраченого та надлишкового навантаження:

$$Y_{втр} = R = \Lambda \cdot E_v(\Lambda) . \quad (5.8)$$

### 5.2.5 Імовірність втрати виклику

Для найпростішого потоку згідно (3.9):

$$P_в = \frac{R}{\Lambda} = \Lambda \cdot \frac{P_v}{\Lambda} = P_v = E_v(\Lambda) .$$

Таким чином, імовірність втрати виклику співпадає з імовірністю втрат за часом. Але ці імовірності визначені для усталеного процесу, тобто для безкінечного інтервалу часу. Для кінцевого інтервалу це співпадіння необов'язкове.

### 5.2.6 Імовірність втрат за навантаженням

Імовірність втрат за навантаженням (п.3.3) є відношення інтенсивностей втраченого та потенційного навантаження. За формулами (5.8) та (5.7) маємо:

$$P_n = \frac{Y_{втр}}{A} = \frac{R}{\Lambda} = \Lambda \cdot \frac{P_v}{\Lambda} = P_v = E_v(\Lambda) . \quad (5.9)$$

Таким чином, *для найпростішого потоку усі три види втрат дорівнюють між собою*. Обумовлено це двома основними властивостями найпростішого потоку: стаціонарністю та відсутністю післядії.

#### Приклад 5.3

Розрахувати частку втрачених викликів в системі  $M/M/2/L$  при  $L = 1E_{рл}$ . Як зміниться це значення при збільшенні  $m$  на 50 %

Рішення

Частку втрачених викликів дає  $E_v(L)$ :

$$E_2(1) = \frac{\frac{1^2}{2!}}{1 + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!}} = \frac{0,5}{2,5} = 0,2 .$$

При збільшенні кількості каналів на 50 % отримуємо 3-канальну систему.

$$E_3(1) = \frac{\frac{1^3}{3!}}{1 + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{16} = 0,0625 .$$

Знайдемо, наскільки покращалась якість обслуговування при збільшенні кількості каналів на 50 %:

$$\frac{E_2(1) - E_3(1)}{E_2(1)} = \frac{0,2 - 0,0625}{0,2} = 68,75\% .$$

Таке суттєве покращання якості обслуговування спостерігається при невеликій кількості каналів. Якщо збільшити  $\nu$  на 100 % (4 канали в системі), то якість обслуговування зміниться на **92,31%**:

$$E_4(1) = \frac{0,01538(E_2(1) - E_4(1))}{E_2(1)} = \frac{0,2 - 0,01538}{0,2} = 92,31\% .$$

Якщо збільшити  $\nu$  на 200 % (6 каналів в системі), то якість обслуговування зміниться на **99,75%**:

$$E_6(1) = \frac{0,00051(E_2(1) - E_6(1))}{E_2(1)} = \frac{0,2 - 0,00051}{0,2} = 99,75\% .$$

Отже, залежність якості обслуговування від кількості каналів має вигляд, як приведено на рис. 5.4, де показано графіки  $P_g(\Lambda)$  при 5 значеннях  $\Lambda$ :

$$\Lambda_1 = 10E_{рл}, \Lambda_2 = 20E_{рл}, \Lambda_3 = 30E_{рл}, \Lambda_4 = 40E_{рл}, \Lambda_5 = 50E_{рл} .$$

Звичайно, чим більше значення  $\Lambda$ , тим більша кількість каналів потрібна для забезпечення заданої якості обслуговування (на рис. 5.4  $P_g(\Lambda) = 0,001$ ). Крім того, з рисунку видно, що при невеликих значеннях  $\nu$  спостерігається суттєве зниження  $P_g(\Lambda)$  при збільшенні  $\nu$ , а потім криві асимптотично наближуються до 0.

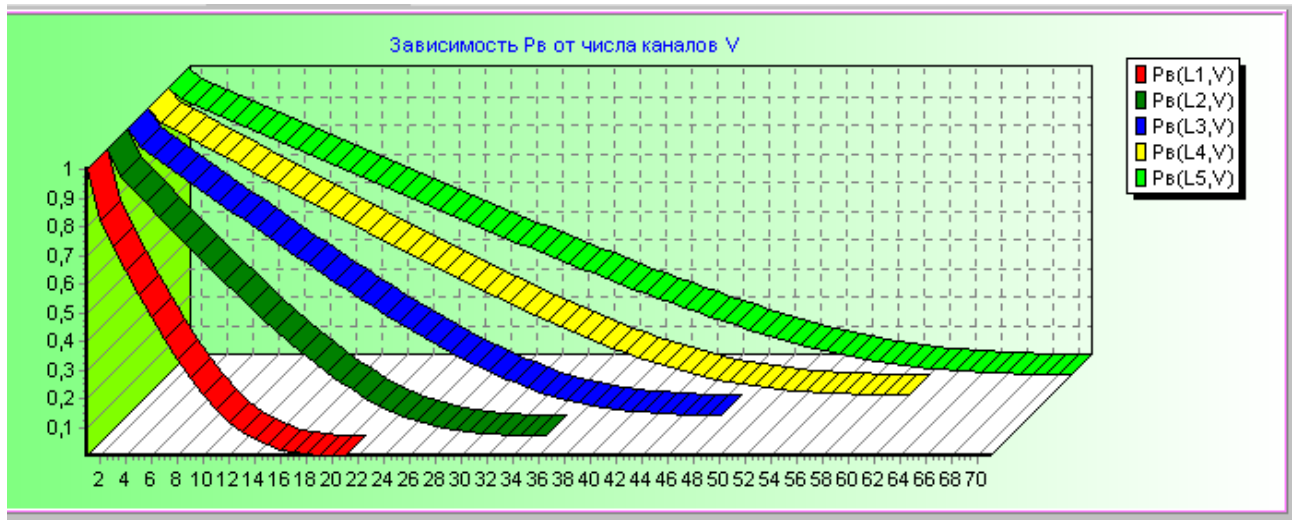


Рисунок 5.4. Залежність  $P_v(\Lambda)$  від кількості каналів для різних значень  $\Lambda$

### 5.3 Синтез систем з втратами

Використовуючи першу формулу Ерланга (5.5), можна здійснювати структурний та параметричний синтез систем з втратами за заданими показниками якості. **Структурний синтез**

При структурному синтезі задача ставиться наступним чином:  
*для найпростішого потоку заданої інтенсивності при відомій середній тривалості зайняття знайти кількість каналів, що забезпечать обслуговування цього потоку із заданими показниками якості.*

Як правило, задається (нормується) імовірність втрати виклику або частка втрачених викликів  $P_{внорм}$ , тобто – значення першої формули Ерланга. Тоді для вирішення поставленої задачі треба знайти кількість каналів системи  $v$ , яка забезпечить показник якості обслуговування не нижче заданого рівня:

$$E_v(\Lambda) \leq P_{внорм} \quad (5.10)$$

Оскільки явно виразити значення  $v$  з формули (5.5) неможливо, використовується наступний підхід, який досить легко запрограмувати:

значення  $\nu$  послідовно збільшується на 1 і кожний раз обчислюється  $E_\nu(\Lambda)$ . Як тільки умова (5.10) виконується, цикл завершується. Таким чином побудовано графіки на рис.5.4.

Крім того, значення першої формули Ерланга табульовано і приведено в довідковій літературі. Відповідними таблицями також можна користуватися для вирішення поставленої задачі.

### 5.3.2 Параметричний синтез

При параметричному синтезі задача ставиться наступним чином:

*для найпростішого потоку заданої інтенсивності знайти середню тривалість зайняття, що забезпечить обслуговування цього потоку системою з визначеною кількістю каналів із заданими показниками якості.*

Нормується імовірність втрати виклику або пропускну здатність системи.

Вирішення такої задачі можна проілюструвати наступним прикладом.

#### Приклад 5.4

Який середній час обслуговування має бути в системі  $M/M/1/L$ , щоб при обслуговуванні потоку з параметром 20 викл/хв в ній втрачалось не більше 3 % викликів?

Рішення

За формулою (5.5):

$$E_1(\Lambda) = \frac{\Lambda}{1 + \Lambda} = \frac{\lambda h}{1 + \lambda h} .$$

Отже потрібно знайти таке значення  $h$ , при якому  $E_1(\Lambda) \leq 0,03$

Вирішення рівняння  $E_1(\Lambda) = 0,03$  дасть максимально допустиме значення середнього часу обслуговування в такій системі:

$$\frac{20h}{1 + 20h} = 0,03 .$$

$$20h = 0,03 + 0,6h .$$

$$19,4h = 0,03 .$$



$$h = 0,0015(\text{хв.}) = 0,09(\text{с}).$$

#### 5.4 Пропускна здатність окремих каналів системи з втратами

Пропускна здатність окремих каналів системи з втратами залежить від способу зайняття каналу.

##### 5.4.1 Пропускна здатність окремих каналів системи

$$M / M / v / L // R$$

При випадковому зайнятті кожний канал завантажується приблизно рівномірно, пропорційно загальному обслугованому навантаженню:

$$\eta_i = \frac{Y}{v} = \frac{\Lambda [1 - E_v(\Lambda)]}{v} = \text{const} . \quad (5.11)$$

##### 5.4.2 Пропускна здатність окремих каналів системи

$$M / M / v / L // S$$

Для послідовного зайняття каналів (система  $M / M / v / L // S$ ) пропускна здатність  $i$ -го каналу дорівнює різниці інтенсивностей надлишкового навантаження для групи з  $(i-1)$  каналу та  $i$  каналів, як видно з рисунку 5.5.

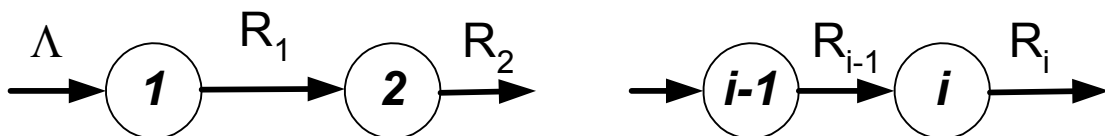


Рисунок 5.5. Обслуговування найпростішого потоку системою з послідовним зайняттям каналів

Інтенсивність надлишкового навантаження обчислюється за (5.8), тоді:

$$\eta_i = R_{i-1} - R_i = [E_{i-1}(\Lambda) - E_i(\Lambda)] \quad (5.12)$$

$$E_0(\Lambda) = 1$$

З (5.12) випливає, що пропускна здатність  $i$ -го каналу при послідовному занятті не залежить від кількості каналів системи, а залежить лише від номеру каналу та інтенсивності навантаження, що надходить.

Вигляд залежності пропускної здатності  $i$ -го каналу від номеру каналу для 10 каналної СМО приведений на рис. 5.6 ( $\Lambda = 9E_{рл}$ ).

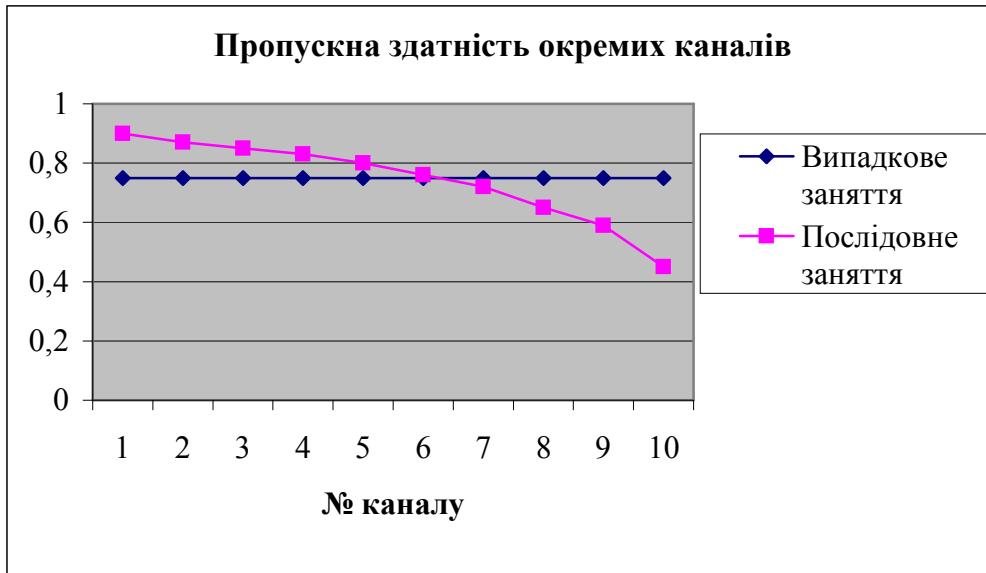


Рисунок 5.6. Пропускна здатність  $i$ -го каналу

Приклад 5.5

Визначити пропускну здатність першого каналу при випадковому и послідовному занятті каналів в системі  $M / M / 4 / L$ .  $\lambda = 180 \text{ викл} / \text{год}$ ,  $h = 20 \text{ с}$ .

Рішення

Спочатку знаходимо інтенсивність навантаження, що надходить:

$$\Lambda = \lambda \cdot h = \frac{180}{60} \text{ викл} / \text{хв} \cdot \frac{1}{3} \text{ хв} = 1E_{рл} .$$

Пропускну здатність першого каналу при випадковому занятті каналів визначаємо за (5.11). Для чого спочатку розрахуємо  $E_4(\Lambda)$

$$E_4 = \frac{\frac{1^4}{4!}}{\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!}} = \frac{\frac{1}{24}}{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}} = \frac{0,042}{2,71} = 0,015 .$$

Тоді,

$$\eta_1 = \frac{Y}{4} = \frac{1[1 - 0,015]}{4} = 0,246(E_{рл}) .$$

Пропускнну здатність першого каналу при послідовному занятті каналів визначаємо за (5.11). Для чого спочатку розрахуємо  $E_1(\Lambda)$ , адже ( $E_0(\Lambda) = 1$ ):

$$E_1(1) = \frac{\frac{1^1}{1!}}{\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!}} = 0,5 .$$

$$\eta_1 = 1 \cdot (1 - 0,5) = 0,5(E_{рл}) .$$

Таким чином пропускна здатність першого каналу при послідовному занятті каналів більше, ніж при випадковому.

Взагалі пропускна здатність першого каналу при послідовному занятті каналів і інтенсивності навантаження, що надходить,  $1E_{рл}$ , завжди дорівнює  $0,5E_{рл}$ .

### Приклад 5.6

В системі  $M/M/40/L//R$  в середньому зайнято 30 каналів. Визначити пропускнну здатність одного каналу.

### Рішення

Оскільки при випадковому занятті пропускна здатність одного каналу (5.11) дорівнює  $\frac{Y}{v}$ , а за умовою задачі  $Y = 30E_{рл}$  (середня кількість зайнятих каналів і є інтенсивність обслугованого навантаження), то  $\eta = \frac{30}{40} = 0,75E_{рл}$ .

## 5.5 Система $M_r/M/V/L$

### 5.5.1 Розподіл імовірностей станів системи $M_r/M/V/L$

Розглянемо більш складний випадок обслуговування системою з втратами потоку з простою післядією, тобто систему  $M_r/M/v/L$ .

Розглядається така математична модель. На  $v$ -канальну систему надходить потік викликів із простою післядією. Час обслуговування одного виклику – випадкова величина, розподілена за експоненціальним законом із середнім значенням, прийнятим за одиницю часу ( $h=1$  у.о.ч.). Дисципліна обслуговування - з явними втратами повідомлень. Число зайнятих каналів  $i$  ( $i = \overline{0, V}$ ) назвемо станом досліджуваної системи. Параметр потоку викликів  $\Lambda_i$  виражений у викл/у.о.ч. (*Ерл*); його можна також трактувати як інтенсивність вхідного навантаження у стані системи  $i$ , тоді інтенсивність потоку звільнення дорівнює числу зайнятих каналів  $i$ . При надходженні виклику або закінченні його обслуговування система стрибкоподібно переходить з одного стану в інший (рис.5.7). Припустимо, що в момент часу  $t=0$  відомий стан  $i$  системи, або розподіл імовірностей станів  $P_i(0)$ .

Виникає задача: знайти розподіл імовірностей  $P_i(t)$  в момент  $t$ .

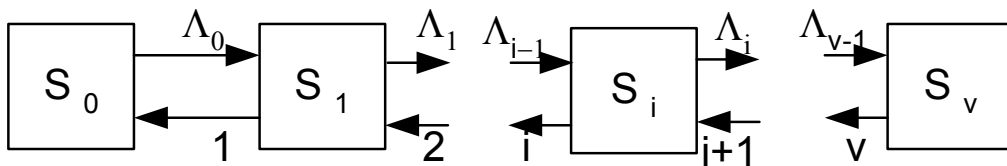


Рисунок 5.7. Граф станів системи  $M_r/M/v/L$

Результат впливає з рішення системи диференціальних рівнянь

$$P_i'(t) = \Lambda_{i-1} \cdot P_{i-1}(t) + (i+1) \cdot P_{i+1}(t) - (\Lambda_i + i) \cdot P_i(t), \quad i = \overline{0, V} \quad (5.13)$$

Імовірності  $P_{-1}(t) \equiv 0$  та  $P_{V+1}(t) \equiv 0$  як імовірності неіснуючих станів.

Система рівнянь (5.13) описує перехідний режим роботи досліджуваної системи обслуговування. Імовірності  $P_i(t)$ , що є рішенням системи рівнянь (5.13), залежать від початкових умов, тобто від розподілу  $P_i(0)$ . Проте для більшості практичних задач можна обмежитися дослідженням усталеного режиму, що досягається системою обслуговування при  $t \rightarrow \infty$ .

При цьому імовірності  $P_i(t) \rightarrow \lim = const$ , які не залежить від  $t$  та початкового розподілу  $P_i(0)$ . Відповідно  $P_i' \rightarrow 0$ . Система (5.13), як було показано в розділі 4, перетворюється в лінійну систему однорідних рівнянь:

$$(\Lambda_i + i) \cdot P_i = \Lambda_{i-1} \cdot P_{i-1} + (i+1) \cdot P_{i+1} \quad (5.14)$$

Граничний розподіл імовірності  $P_i$  характеризує роботу системи обслуговування в стані статистичної рівноваги. В цих умовах в системі обслуговування, як і раніше, відбуваються випадкові зміни, проте імовірності, що описують поведінку СМО, не змінюються з часом. Систему (5.14) можна одержати безпосередньо, якщо скористатися таким правилом (п. 4.3), справедливим для стану статистичної рівноваги: сума інтенсивностей виходу зі стану системи  $i$ , зважена імовірністю  $P_i$ , дорівнює сумі зважених імовірностями відповідних станів інтенсивностей входу в цей стан.

Позначимо через

$$F_i = \Lambda_i \cdot P_i - (i+1) \cdot P_{i+1}, \quad (5.15)$$

тоді з (5.14):

$$F_i = F_{i-1} = F_{i-2} = \dots = F_0 = 0.$$

Звідси одержуємо просте рекурентне співвідношення для обчислення імовірностей  $P_i$ :

$$(i+1) \cdot P_{i+1} = \Lambda_i \cdot P_i, \quad i = \overline{0, V-1}. \quad (5.16)$$

Задаючи значення  $i$ , рівними 0, 1, 2, ..., одержуємо:

$$P_i = \frac{\Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_{i-1}}{i!} P_0 = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\Lambda_k P_0}{i!} . \quad (5.17)$$

Для визначення  $P_0$  скористаємося умовою нормування:

$$\sum_{j=0}^V P_j = 1.$$

Тоді

$$P_0 = \left[ \sum_{j=0}^V \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\Lambda_k}{j!} \right]^{-1}, \quad (5.18)$$

і остаточно:

$$P_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \frac{\Lambda_k}{i!}}{\sum_{j=0}^V \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\Lambda_k}{j!}}, \quad i = \overline{0, V}. \quad (5.19)$$

Формула (5.19) виражає розподіл імовірностей для усталеного режиму. Вона визначає імовірність зайнятості в довільний момент  $i$  каналів системи, яка обслуговує з явними втратами потік викликів із простою післядією. Імовірність  $P_i$  можна трактувати як частку часу, протягом якої в досліджуваній системі зайнято  $i$  виходів.

### 5.5.2 Основні випадки розподілу станів системи $M_r/M/V/L$

1. Потік викликів примітивний із параметром

$$\Lambda_i = \alpha(N - i)$$

дисципліна обслуговування з явними втратами. Тобто маємо систему  $M_i/M/V/L$ . У цьому випадку можна здійснити елементарні перетворення для чисельника і знаменника (5.19):

$$\frac{\Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_{i-1}}{i!} = \frac{\alpha N \alpha (N-1) \alpha (N-2) \dots \alpha (N+1-i)}{i!} = C_N^i \cdot \alpha^i.$$

Підставивши отриманий вираз у (5.19) отримаємо **розподіл Енгсета**:

$$P_i = \frac{C_N^i \cdot \alpha^i}{\sum_{j=0}^V C_N^j \cdot \alpha^j}. \quad (5.20)$$

2. Потік викликів найпростіший із параметром  $\Lambda$ , дисципліна обслуговування з явними втратами – тобто система  $M/M/V/L$ . З (5.19) безпосередньо впливає перший розподіл Ерланга:

$$P_i = \frac{\frac{\Lambda^i}{i!}}{\sum_{j=0}^V \frac{\Lambda^j}{j!}}.$$

Розподіл Ерланга можна одержати також із розподілу Енгсета (5.20), якщо

$$N \rightarrow \infty, \text{ а } \alpha \rightarrow 0, \text{ але так, що } N\alpha = \Lambda = \text{const}.$$

3. Потік викликів примітивний з параметром

$$\Lambda_i = \alpha(N-i),$$

дисципліна обслуговування без втрат – система  $M_i/M/V/LL$ . Для обслуговування  $N$  джерел викликів без втрат необхідно, щоб число виходів у системі

$$V = N.$$

При цьому вираз (5.20) з урахуванням бінома Ньютона

$$\sum_{j=0}^N C_N^j a^j b^{N-j} = (a+b)^N$$

приймає вигляд (якщо  $a = \alpha, b = 1$ ):

$$P_i = \frac{C_N^i \alpha^i}{\sum_{j=0}^N \frac{C_N^j \alpha^j}{(1+\alpha)^N}}. \quad (5.21)$$

Позначивши

$$f = \frac{\alpha}{1 + \alpha},$$

після нескладного перетворення маємо **розподіл Бернуллі**:

$$P_i = C_N^i f^i (1 - f)^{N-i} \quad (5.22)$$

4. Потік викликів найпростіший з параметром  $\Lambda$ , дисципліна обслуговування без втрат – система  $M/M/V/LL$ . В цьому випадку число виходів у системі повинно бути необмеженим, тобто  $V \rightarrow \infty$ .

З розподілу (5.21), з урахуванням розкладання функції  $e^\Lambda$  в ряд

Маклорена  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Lambda^j}{j!}$  одержуємо **розподіл Пуассона**:

$$P_i = \frac{\frac{\Lambda^i}{i!}}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Lambda^j}{j!}} = \frac{\Lambda^i}{i!} e^{-\Lambda}. \quad (5.23)$$

Розподіл Пуассона (5.23) можна також одержати з розподілу Бернуллі (5.22) при  $N \rightarrow \infty$  та  $\alpha \rightarrow 0$ , але так що  $N\alpha \rightarrow \Lambda$ .

Таким чином, найбільш загальним із розглянутих чотирьох розподілів є розподіл Енгсета. З нього випливає, з одного боку, перший розподіл Ерланга, а з іншого боку - розподіл Бернуллі. З останніх двох, різними засобами, можна одержати розподіл Пуассона.

Необхідно відзначити, що у всіх розглянутих розподілах параметри  $\Lambda, \alpha, f$ , що характеризують потік викликів, виражені у викл./у.о.ч. (Ерл).

### 5.5.3 Характеристики якості систем $M_i/M/v/L$

Імовірність втрат за часом знаходиться з розподілу Енгсета (5.20) як імовірність зайнятості усіх  $v$  каналів системи:



$$P_t = P_v = \frac{C_N^v \cdot \alpha^v}{\sum_{j=0}^v C_N^j \cdot \alpha^j} = \xi(N, v, \alpha) . \quad (5.24)$$

Формула (5.24) носить назву **формули Енгсета**. Значення цієї формули також табульовані у довідковій літературі [1].

Імовірність втрати виклику знаходиться згідно визначенню (3.9):

$$P_g = \frac{R}{\Lambda} = \frac{\Lambda_v P_v}{\sum_{j=0}^v \Lambda_j P_j} = \frac{C_{N-1}^v \cdot \alpha^v}{\sum_{j=0}^v C_{N-1}^j \cdot \alpha^j} . \quad (5.25)$$

Порівняння формул (5.24) і (5.25) показує, що завжди має місце нерівність:

$$P_t > P_g$$

Рівність досягається тільки у граничному випадку при  $N \rightarrow \infty$ , коли примітивний потік переходить у найпростіший. Вираз (5.25) можна отримати безпосередньо з (5.24), керуючись наступними міркуваннями: виклик, що надійшов від конкретного  $N - g_0$  вільного джерела, буде втраченим, якщо в цей момент зайняті усі  $v$  канали. Ця зайнятість забезпечується рештою  $N - 1$  джерелом. Тобто

$$P_g(N, v, \alpha) = P_t(N - 1, v, \alpha)$$

Інтенсивність обслугованого навантаження:

$$Y = \sum_{i=1}^v iP_i = \sum_{i=0}^{v-1} \Lambda_i P_i = \frac{\alpha N \sum_{i=0}^{v-1} C_{N-1}^i \cdot \alpha^i}{\sum_{j=0}^v C_N^j \cdot \alpha^j} = \frac{\alpha N (1 - P_g)}{[1 + \alpha (1 - P_g)]} . \quad (5.26)$$

Інтенсивність вхідного навантаження (математичне очікування параметру примітивного потоку викликів):

$$\Lambda = \sum_{i=0}^v iP_i = \sum_{i=0}^v \alpha(N-i)P_i = \alpha(N-Y) = \frac{\alpha N}{[1 + \alpha(1 - P_g)]} \quad (5.27)$$

Інтенсивність потенційного навантаження

$$A = \sum_{i=1}^N iP_i = \sum_{i=0}^{N-1} \Lambda_i P_i = \sum_{i=0}^{N-1} (N-i)C_N^i f^i (1-f)^{N-i} = Nf, \quad (5.28)$$

де імовірність  $P_i$  визначається за розподілом Бернуллі (5.22). Таким чином,  $f$  – інтенсивність потенційного навантаження від одного джерела.

Імовірність втрат за навантаженням знаходимо з урахуванням (5.28) і (5.26):

$$P_n = \frac{Y_{nom}}{A} = \frac{P_g}{1 + \alpha(1 - P_g)} = \frac{N - v}{N} \cdot P_t. \quad (5.29)$$

З (5.29) випливає, що при кінцевому  $\alpha$  завжди має місце нерівність:

$$P_n < P_g$$

Рівними ці види втрат можуть бути тільки у граничному випадку, коли  $\alpha \rightarrow 0$  і примітивний потік переходить у найпростіший. Враховуючи вищенаведене співвідношення між  $P_t$  і  $P_g$ , можна записати загальний вираз:

$$P_n \leq P_g \leq P_t$$

Розглянемо різницю:

$$\Lambda - A = \frac{\alpha \cdot N}{1 + \alpha(1 - P_g)} - \frac{\alpha \cdot N}{(1 + \alpha)} = \alpha \cdot A \cdot P_n$$

Ця різниця між інтенсивностями потенційного та вхідного навантаження обумовлена наступною особливістю розглянутої моделі. При отриманні відмови у з'єднанні джерело одразу стає вільним і разом з іншими вільними джерелами може надсилати нові виклики. Параметр потоку  $i$ , відповідно, інтенсивність вхідного навантаження зростають на величину

$\alpha AP_n$ . При цьому добуток  $AP_n$  визначає інтенсивність втраченого навантаження або середнє число джерел, що стали вільними після отримання відмови, а  $\alpha$  є інтенсивність потоку від одного вільного джерела. Якщо припустити, що джерело після отримання відмови блокується на час обслуговування, то збільшення інтенсивності вхідного навантаження не відбудеться і буде мати місце рівність  $\Lambda = A$ .

Характерно, що в цьому випадку імовірності кількості зайнятих джерел (тих, що обслуговуються і блокуються) розподілені за законом Бернуллі, а розподіл імовірності кількості зайнятих ліній відрізняється від розподілу Енгсета.

Таким чином, при обслуговуванні примітивного потоку взаємодія джерела з системою обслуговування характеризується чотирма типами навантаження, фізичний зміст яких треба чітко розрізняти, оскільки їх чисельні значення неоднакові. Розглянемо ці типи:

1. Інтенсивність потоку викликів від вільного джерела в одну умовну одиницю часу  $\alpha \overline{(0, \infty)}$ , викл/у.о.ч. (Ерл)
2. Середня інтенсивність потоку викликів в одну умовну одиницю часу або інтенсивність навантаження, що надходить від джерела  $\nu \overline{(0, \infty)}$ , викл/у.о.ч. (Ерл). З (5.27):

$$\nu = \frac{\Lambda}{N} = \frac{\alpha}{1 + \alpha(1 - P_g)}. \quad (5.30)$$

3. Інтенсивність потенційного навантаження від джерела  $f \overline{(0, 1)}$ , Ерл.

$$f = \frac{\alpha}{1 + \alpha}. \quad (5.31)$$

4. Інтенсивність обслугованого навантаження, віднесена до одного джерела  $y \overline{(0, \nu/N)}$ , Ерл. З (5.26):

$$y = \frac{Y}{N} = \frac{\alpha(1 - P_g)}{1 + \alpha(1 - P_g)} \quad (5.32)$$

Порівнюючи (5.30) – (5.32), маємо:

$$y \leq f \leq v \leq \alpha$$

Для зручності розрахунків, крім вищенаведених формул можна використовувати також наступні:

$$v = \alpha(1 - y) \cdot Y = v(1 - P_g) = f(1 - P_n) \cdot \alpha P_n = v P_g \cdot \alpha = \frac{Y}{(1 - Y)(1 - P_g)} =$$

$$\frac{v}{[1 - v(1 - P_g)]} \cdot P_n = \left(1 - \frac{V}{N}\right) \cdot P_t = (1 - Y) P_g \quad .$$

Отже, якщо при заданих значеннях кількості каналів  $v$  та одного з вищенаведених параметрів навантаження відома одна з характеристик якості обслуговування, наприклад  $P_g$ , то решту характеристик досить легко визначити.

#### Приклад 5.7

Розрахувати основні характеристики якості для системи  $M_i/M/v/L$ , для якої відома імовірність втрати виклику  $P_g = 0,03$ , якщо:

$$N = 30, v = 6, \alpha = 3 \text{ викл/год}, h = 120 \text{ с}$$

#### Рішення

Виразимо інтенсивність джерела у вільному стані в ерлангах:

$$\alpha = \alpha h = 3 \cdot \frac{120}{3600} = 0,1 \text{ Ерл.}$$

Інтенсивність обслугованого навантаження за (5.26):

$$Y = 0,1 \cdot 30 \cdot \frac{(1 - 0,03)}{[1 + 0,1 \cdot (1 - 0,03)]} = 2,65 \text{ Ерл} \quad .$$

$$y = \frac{Y}{N} = 0,0884 \text{ Ерл} \quad .$$

Інтенсивність потенційного навантаження для одного джерела (5.31):

$$f = \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{0,1}{1,1} = 0,0909 \text{ Ерл} \quad .$$

$$A = fN = 2,73 \text{ Ерл} \quad .$$

Інтенсивність вхідного навантаження за (5.27):

$$\Lambda = 0,1 \cdot \frac{30}{[1 + 0,1 \cdot (1 - 0,03)]} = 2,734 \text{ Ерл} .$$

Середня інтенсивність джерела(5.30):

$$v = \frac{\Lambda}{N} = \frac{2,734}{30} = 0,091 \text{ Ерл} .$$

Таким чином, виконується співвідношення

$$y \leq f \leq v \leq \alpha$$

$$0,0884 < 0,0909 < 0,091 < 0,1$$

### 5.6 Імовірність зайнятості визначених каналів

Знайдемо тепер імовірність зайняття визначених, заздалегідь обраних каналів обслуговування. Ця задача часто зустрічається при визначенні навантаження на певні виходи в комутаторах телефонних мереж, особливо при неповнодоступному включенні або при визначені способу зайняття каналів. Будемо виходити з того, що в результаті використання моделей Ерланга (Енгсета або Бернуллі) знайдені імовірності зайняття будь-яких  $k$  ліній  $P_k$ .

Зафіксуємо певні  $i$  каналів з  $v$  доступних. Вважаємо, що зайняття каналів відбувається рівноімовірно. Тоді якщо в системі з імовірністю  $P_{i+j}$  зайнято рівно  $i+j$  каналів, то імовірність зайнятості однієї конкретної комбінації буде менше в число сполучень з  $v$  по  $i+j$ , тобто  $\frac{P_{i+j}}{C_v^{i+j}}$

Оскільки зафіксовані  $i$  каналів можуть бути зайняті сумісно з будь-якими іншими  $j$  каналами у відповідних кількості сполучень з  $v$  по  $j$  комбінаціях, де  $j$  - будь-яке число від 0 до  $v-i$ , то можна отримати формулу для імовірності зайняття фіксованих  $i$  каналів в системі з втратами:

$$P_{\phi_i} = \sum_{j=0}^{v-i} \frac{C_{v-i}^j}{C_v^{i+j}} P_{i+j} \quad (5.33)$$

Для системи  $M/M/v/L$  (модель Ерланга) тоді отримаємо:

$$P_{\phi_i} = \sum_{j=0}^{v-i} \frac{C_{v-i}^j}{C_v^{i+j}} \frac{\Lambda^{i+j}}{(i+j)!} = \frac{E_v(\Lambda)}{E_{v-i}(\Lambda)} \quad (5.34)$$

Для системи  $M_i/M/v/L$  (модель Енгсета) формула буде відрізнятися:

$$P_{\phi_i} = \sum_{j=0}^{v-i} \frac{C_{v-i}^j}{C_v^{i+j}} \frac{C_N^{i+j} \cdot \alpha^{i+j}}{\sum_{k=0}^N C_N^k \cdot \alpha^k} = \frac{\xi(N, v, \alpha)}{\xi(N-i, v-i, \alpha)} \quad (5.35)$$

У формулі (5.35)  $N$  – кількість джерел викликів у примітивному потоці,  $\alpha$  – інтенсивність одного джерела, виражена в ерлангах.

Для системи  $M_i/M/v/LL$  з однаковим числом входів і виходів (джерел викликів та каналів обслуговування) має місце модель Бернуллі та формула:

$$P_{\phi_i} = \sum_{j=0}^{v-i} \frac{C_{v-i}^j}{C_v^{i+j}} f^{i+j} (1-f)^{v-i-j} = f^i \quad (5.36)$$

### 5.7 Порівняння моделей $M/M/v/L$ та $M_i/M/v/L$ для рішення задачі структурного синтезу

Розглянемо вузол мережі з комутацією каналів, наприклад телефонної мережі загального користування. Це може бути транзитна АТС, яка комутує з'єднувальні лінії різних напрямків, кінцева АТС, вхідні лінії якої є як з'єднувальними, так і абонентськими. Це може бути також відомча АТС або виносний концентратор міської станції.

Як було показано вище, моделлю такого вузла є система масового обслуговування з втратами, причому час обслуговування можна вважати розподіленим за експоненціальним законом (рис.2.3).

Вважатимемо, що комутатор має  $N$  вхідних та  $v$  вихідних ліній.

Опишемо потік викликів наступними параметрами. Нехай кожний абонент в середньому здійснює 1 виклик що 30 хвилин, займаючи лінію в середньому на 3 хвилини.

Прийемо загальне число абонентів  $N = 120$ . Основною задачею при проектуванні є визначення числа  $\nu$  вихідних ліній, достатнього для забезпечення заданого рівня якості обслуговування – тобто задача структурного синтезу.

Для систем з втратами найважливішою характеристикою якості є імовірність втрат за часом (п.3.4).

Одним з підходів до рішення задачі структурного синтезу в цьому випадку може бути використання моделі Ерланга, тобто системи  $M/M/\nu/L$ .

Будемо розглядати усі виклики, що надходять від абонентів, як загальний найпростіший потік з параметром:

$$\lambda = N \cdot \alpha = 120 \cdot \frac{1}{30} = 4 \text{ викл / хв.}$$

Знайдемо вхідне навантаження:

$$\Lambda = \lambda \cdot h = 4 \cdot 3 = 12 (E_{ерл})$$

Скориставшись першою формулою Ерланга (5.6), можна знайти наступні значення імовірність втрат (або блокування) при різній кількості вихідних ліній для розрахованого навантаження:

$P_{\epsilon}, \%$	$\nu$	$\frac{\Lambda}{\nu}$
1	20	0.6
4	17	0.7
8	15	0.8
19	12	1.0
30	7	1.7

При помірних навантаженнях ( $5E_{ерл} < \Lambda < 50E_{ерл}$ ), можна користуватися наближеними формулами:

$$P_g = 1\%, v = 5,5 + 1,17\Lambda .$$

Іншим підходом є використання моделі Енгсета, тобто вхідний потік розглядається як примітивний. При цьому імовірність блокування знаходиться за формулою Енгсета (5.24) як значення функції  $\xi(N, v, \alpha)$ . Врахуємо, що  $\alpha = 0,1E_{рл}$ .

Знайдемо кілька значень цієї функції.

$P_g, \%$	$v$	$\frac{N\alpha}{v}$
1	18	0.7
4	16	0.75
8	14	0.86
19	11	1.1
30	9	1.3

Як видно з вищенаведених таблиць, різниця у використанні моделей Ерланга й Енгсета несуттєва при незначному питомому вхідному навантаженні, розходження стають помітними лише для великих значень. Звичайно на практиці розглядаються пучки вихідних каналів, причому виклики на кожний з пучків вважають найпростішими потоками. Відповідно, до кожного пучка приміняють формулу Ерланга. А імовірності станів цих пучків описують розподілом Енгсета.

### 5.8 Контрольні питання

1. Що характеризує перший розподіл та перша формула Ерланга?
2. Які максимуми має перший розподіл Ерланга?
3. Від чого залежить імовірність втрати виклику в системі  $M/M/v/L$ ?
4. Чому дорівнює обслуговане навантаження в системі  $M/M/v/L$ ?
5. Чому дорівнює потенційне навантаження в системі  $M/M/v/L$ ?



6. Чому дорівнює надлишкове навантаження в системі  $M/M/v/L$ ?
7. Чому дорівнює втрачене навантаження в системі  $M/M/v/L$ ?
8. Навести приклад задачі структурного синтезу системи з втратами.
9. Навести приклад задачі параметричного синтезу системи з втратами.
10. Від чого залежить пропускна здатність 1 каналу в системі  $M/M/v/L//S$ ?
11. Від чого залежить пропускна здатність 1 каналу в системі  $M/M/v/L//R$ ?
12. Для якого типу зайняття каналів пропускна здатність 1 каналу в системі з втратами не змінюється при збільшенні числа каналів?
13. Для якого типу зайняття каналів пропускна здатність 1 каналу в системі з втратами не залежить від номеру каналу?

### 5.9 Завдання для самостійної роботи

1. Розрахувати долю втрачених викликів в системі  $M/M/4/L$  при  $\Lambda = 2E_{рл}$ .
2. Розрахувати долю простою в системі  $M/M/2/L$  при  $\Lambda = 1E_{рл}$ .
3. Визначити  $\eta_1$  при випадковому і послідовному занятті каналів в системі  $M/M/3/L$ .  $\lambda = 180 \text{ викл/год}$ ,  $h = 20 \text{ с}$ . В системі  $M/M/50/L//R$  в середньому зайнято 35 каналів. Визначити пропускну здатність одного каналу.
4. Визначити пропускну здатність першого каналу і імовірність зайняття 1 каналу в системі  $M/M/4/L//S$ .  $\lambda = 120 \text{ викл/год}$ ,  $h = 30 \text{ с}$ . Який середній час обслуговування має бути в системі  $M/M/1/L$ , щоб при обслуговуванні потоку з параметром 10 викл/хв в ній втрачалось щонайбільше 5 % викликів?

5. Яку кількість каналів зайнято з максимальною імовірністю в системі  $M/M/3/L$ , якщо виклики надходять у систему, в середньому, через 10 с і обслуговуються, в середньому, 20 с?

## 6 СМО З ОЧІКУВАННЯМ.

### 6.1 Другий розподіл Ерланга

Розглянута нижче модель багато в чому аналогічна першій задачі Ерланга.  $\nu$ -канальна СМО обслуговує найпростіший потік викликів. Час обслуговування одного виклику – випадкова величина з експоненціальним розподілом та середнім значенням, прийнятим за одиницю часу ( $h = 1 \text{ у.о.ч.}$ ) Тоді параметр потоку виклику  $\Lambda$ , виражений у викликах за у.о.ч. (тобто, ерлангах), можна розглядати як інтенсивність вхідного навантаження. При зайнятості всіх  $\nu$  каналів виклик, що надійшов, стає в чергу й обслуговується після деякого очікування. Загальне число викликів, що знаходяться в системі на обслуговуванні та в черзі, позначимо  $i$  ( $i = \overline{0, \infty}$ ) та назовемо станом системи. При  $i = \overline{0, \nu}$  величина  $i$  характеризує число зайнятих виходів у системі, при  $i = \overline{\nu, \infty}$  число зайнятих виходів дорівнює  $\nu$ , а різниця  $(i - \nu)$  є довжина черги. Параметр потоку звільнень визначається числом зайнятих виходів  $i$  в першому випадку, при  $i = \overline{0, \nu}$ , залежить від стану системи  $i$  (тобто є **примітивним**), а в другому, при  $i = \overline{\nu, \infty}$ , має постійне значення  $\nu$ , (тобто є **найпростішим**):

$$\mu_{зв} = \begin{cases} i, & i = \overline{0, \nu} \\ \nu, & i = \overline{\nu, \infty} \end{cases} .$$

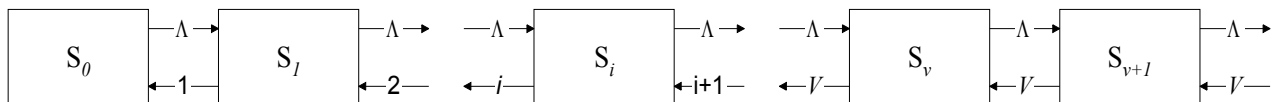


Рисунок 6.1. Граф станів СМО з очікуванням

Імовірність того, що система в усталеному режимі знаходиться в стані  $i$  позначимо через  $P_i$ . Залежно від номеру стану та відповідного типу потоку

звільнень (найпростішого або примітивного) система рівнянь для стану статистичної рівноваги (усталеного режиму) має такий вид:

$$\left. \begin{aligned} (\Lambda + i)P_i &= \Lambda P_{i-1} + (i+1)P_{i+1}, & i = \overline{0, v-1}; \\ (\Lambda + v)P_i &= \Lambda P_{i-1} + vP_{i+1}, & i = \overline{v, \infty}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Позначимо  $F_i = \Lambda P_{i-1} + (i+1)P_{i+1}$  для  $i = \overline{0, v-1}$  і  $F_i = \Lambda P_{i-1} + vP_{i+1}$  при  $i = \overline{v, \infty}$ . Тоді з (6.1) одержуємо  $F_i = F_{i-1} = \dots = F_0 = 0$ , звідки випливають два рекурентних співвідношення для обчислення імовірностей  $P_i$ :

$$\left. \begin{aligned} (i+1)P_{i+1} &= \Lambda P_i, & i = \overline{0, v-1}; \\ vP_{i+1} &= \Lambda P_i, & i = \overline{v, \infty}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Приймаючи значення  $i$  послідовно рівними  $0, 1, 2, \dots$ , одержуємо:

$$i = 0 \quad P_1 = \frac{\Lambda}{1} \cdot P_0 \cdot$$

$$i = 1 \quad P_2 = \frac{\Lambda}{2} \cdot P_1 = \frac{\Lambda^2}{2!} \cdot P_0 \cdot$$

...

$$i = v-1 \quad P_v = \frac{\Lambda}{2} \cdot P_{v-1} = \frac{\Lambda^v}{v!} \cdot P_0 \cdot$$

$$i = v \quad P_{v+1} = \frac{\Lambda}{v} \cdot P_v = \frac{\Lambda}{v} \cdot \frac{\Lambda^v}{v!} \cdot P_0 = \frac{\Lambda^{v+1}}{v \cdot v!} P_0 \cdot$$

$$i = v+1 \quad P_{v+2} = \frac{\Lambda}{v} \cdot P_{v+1} = \frac{\Lambda^{v+2}}{v^2 \cdot v!} P_0 = \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{i-v} \cdot \left(\frac{\Lambda^v}{v!}\right) \cdot P_0 \cdot$$

Таким чином,

$$\left. \begin{aligned} P_i &= \frac{\Lambda^i}{i!} P_0, & i = \overline{1, v} \\ P_i &= \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{i-v} \frac{\Lambda^v}{v!} P_0, & i = \overline{v, \infty} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Для визначення імовірності  $P_0$  скористаємося умовою нормування

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1 \text{ з урахуванням (6.3)}$$

$$P_0 + \frac{\Lambda}{1} \cdot P_0 + \frac{\Lambda^2}{2!} \cdot P_0 + \dots + \frac{\Lambda^v}{v!} \cdot P_0 + \frac{\Lambda}{v} \cdot \frac{\Lambda^v}{v!} \cdot P_0 + \dots + \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{i-v} \cdot \left(\frac{\Lambda^v}{v!}\right) \cdot P_0 = P_0 \left[ \sum_{j=0}^{v-1} \frac{\Lambda^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^j \right] = 1 \quad .$$

Звідки

$$P_0 = \left[ \sum_{j=0}^{v-1} \left(\frac{\Lambda^j}{j!}\right) + \frac{\Lambda^v}{v!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^j \right]^{-1} \quad (6.4)$$

Вираз  $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^j$  в (6.4) є сума нескінченної геометричної прогресії. При

$\Lambda \geq v$  ряд  $\left(\frac{\Lambda}{v}\right)^j$  розходиться. Відповідно  $P_0 \rightarrow 0$ , і всі імовірності  $P_i \rightarrow 0$  при кінцевому значенні  $i$ . Можна показати, що  $\lim_{i \rightarrow \infty} P_i = 1 \Rightarrow P_{\infty} \rightarrow 1$ . Це означає,

що при інтенсивності навантаження  $\Lambda$ , яка дорівнює або перевищує число виходів системи  $v$ , з імовірністю 1 постійно будуть зайняті усі виходи, а довжина черги буде нескінченною. Тому, щоб система могла функціонувати нормально, а черга не зростала нескінченно, необхідно виконати умову

$\Lambda < v$ . У цьому випадку прогресія  $\left(\frac{\Lambda}{v}\right)^j$  буде убувати, а сума її

$$\sum \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^j = \frac{v}{v - \Lambda} \quad .$$

Відповідно

$$P_0 = \left\{ \sum_{j=0}^{v-1} \frac{\Lambda^j}{j!} + \frac{\Lambda^v}{[(v-\Lambda)(v-1)!]} \right\}^{-1} \quad (6.5)$$

З урахуванням (6.3) і (6.5) одержуємо **другий розподіл Ерланга**:

$$P_i = \frac{\frac{\Lambda^i}{i!}}{\sum_{j=0}^{v-1} \frac{\Lambda^j}{j!} + \frac{\Lambda^v}{[(v-\Lambda)(v-1)!]}}, \quad i = \overline{0, v} \quad (6.6)$$

$$P_i = \frac{\left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{i-v} \cdot \frac{\Lambda^v}{v!}}{\sum_{j=0}^{v-1} \frac{\Lambda^j}{j!} + \frac{\Lambda^v}{[(v-\Lambda)(v-1)!]}}, \quad i = \overline{v, \infty}$$

Слід запам'ятати: цей вираз можна використовувати тільки при дотриманні умови існування усталеного режиму:  $\Lambda < v$ .

Приклад 6.1.

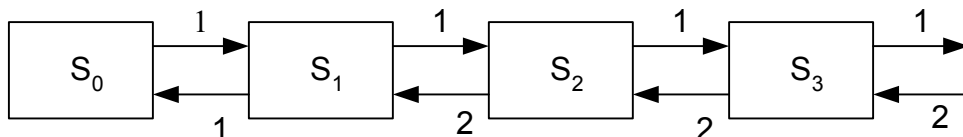
Для системи  $M/M/2/W$ , на вхід якої надходить навантаження з інтенсивністю 1 Ерл. обчислити:

- 1) частку часу, який система простоє
- 2) імовірність зайнятості 1 каналу в системі
- 3) імовірність знаходження у черзі 1 виклику.

Побудувати граф станів системи

Рішення

Маємо двоканальну систему з очікуванням, на вхід якої надходить найпростіший потік викликів, час обслуговування розподілено за експоненційним законом. Граф станів представлено на рисунку:



1. Оскільки граничні імовірності характеризують частку часу, яку система знаходиться у відповідному стані, то для обчислення частки часу, який система простоє, треба знайти  $P_0$  за першою частиною (6.6):

$$P_0 = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.$$

Імовірність зайнятості 1 каналу в системі – це  $P_1$ . Використовуючи те, що в усіх виразах (6.6) знаменник однаковий:

$$P_1 = \frac{1}{3}.$$

2. Імовірність знаходження у черзі 1 виклику – це  $P_3$ , обчислюється за другою частиною (6.6):

$$P_3 = \frac{\left[ \frac{1}{2!} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{3-2} \right]}{3} = \frac{1}{12}.$$

## 6.2 Характеристики якості обслуговування

### 6.2.1 Імовірність очікування для виклику, що надійшов

Для найпростішого потоку викликів імовірність очікування співпадає з імовірністю зайнятості усіх виходів у системі, тобто з імовірністю втрат за часом. Всі канали в системі зайняті в станах, починаючи з  $P_v$ . Отже для обчислення потрібної імовірності треба знайти суму імовірностей усіх станів, починаючи з  $P_v$ . Враховуючи другу частину (6.6):

$$P(\gamma > 0) = P_t = \sum_{k=v}^{\infty} P_k = \frac{\Lambda^v}{\sum_{j=0}^{v-1} \frac{\Lambda^j}{j!} + \frac{\Lambda^v}{[(v-\Lambda)(v-1)!]}} = D_v(\Lambda). \quad (6.7)$$

Вираз (6.7) називається *другою формулою Ерланга*.

Слід зазначити, що завжди  $D_v(\Lambda) > E_v(\Lambda)$ ; тобто при однаковій інтенсивності вхідного навантаження імовірність очікування в системі  $M/M/v/W$  вище, ніж імовірність втрати виклику в системі  $M/M/v/L$ . Зазначене перевищення втрат пояснюється тим, що при звільненні виходу в системі з явними втратами він дається виклику, що надходить, а в системі з очікуванням при наявності черги – виклику, що очікує. Виклик, що знову надійшов, у цьому випадку вимушений ставати в чергу. Але зазвичай абоненти значно спокійніше ставляться до невеличкого чекання, ніж до відмов. Тому при нормуванні якості обслуговування можна припускати більше значення імовірності  $P(\gamma > 0)$  в порівнянні з величиною  $P_0$  системи з явними втратами.

Друга формула Ерланга використовується для структурного синтезу систем з очікуванням: при заданому  $\Lambda$  та  $P(\gamma > 0)$  в формулу (6.7) підставляють, послідовно збільшуючи, різні значення  $v$ , поки не отримають прийнятний рівень якості. При цьому, враховуючи необхідність дотримання умови існування усталеного режиму  $\Lambda < v$  кількість каналів беруть, не менше ніж  $v = [\Lambda] + 1$

### 6.2.2 Інтенсивність обслугованого навантаження.

Відповідно до визначення інтенсивності обслугованого навантаження, використовуючи рекурентні співвідношення (6.2), одержуємо:

$$Y = \sum_{i=1}^v iP_i + \sum_{i=v+1}^{\infty} vP_i = \Lambda \sum_{i=1}^v P_{i-1} + \Lambda \sum_{i=v+1}^{\infty} P_{i-1} = \Lambda \sum_{i=1}^{\infty} P_i = \Lambda. \quad (6.8)$$

Через відсутність явних втрат повідомлень (при дотриманні умови існування усталеного режиму) інтенсивність навантаження, що надходить, збігається з інтенсивністю обслугованого навантаження і надлишкове навантаження відсутнє.



$$Y = \Lambda, \quad R = 0.$$

Оскільки для найпростішого потоку інтенсивність потенційного навантаження дорівнює інтенсивності вхідного, втрачене навантаження також відсутнє. Відповідно, втрати по навантаженню дорівнюють нулю.

$$A = \Lambda, \quad Y_{втр} = 0, \quad P_H = 0.$$

Проте не завжди в системі з очікуванням втрати по навантаженню дорівнюють нулю. При обслуговуванні *примітивного потоку* джерело, за рахунок очікування, в середньому менше знаходиться у вільному стані, чим у системі без втрат. Це призводить до зниження інтенсивності потоку викликів і навантаження, що надходить, стає менше потенційного навантаження. І хоча усі виклики, що надходять, обслуговуються (рівність (6.8) вірна), втрати по навантаженню мають місце.

$$Y = \Lambda, \quad R = 0, \quad A > \Lambda, \quad Y_{втр} \neq 0, \quad P_H \neq 0.$$

### 6.2.3 Середня довжина черги

Як видно з рис. 6.1, черга в системі утворюється в станах, починаючи з  $(v+1)$ -го, в якому довжина черги дорівнює 1. Отже, довжина черги є випадкова величина з поточним значенням

$$s = i - v,$$

де  $i$  – номер стану.

Середня довжина черги (середня кількість викликів, що очікують початку обслуговування) знаходиться як математичне очікування цієї випадкової величини:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \sum_{i=v}^{\infty} (i - v)P_i = \sum_{i=0}^{\infty} iP_{i+v} = P_v \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^i = \\ &= \frac{P_v \Lambda}{v} \left(1 - \frac{\Lambda}{v}\right)^2 = \frac{\Lambda D_v(\Lambda)}{v - \Lambda}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Формула (6.9) отримана з урахуванням другої половини (6.2), а також виразу для суми нескінченної геометричної прогресії  $\sum_{i=0}^{\infty} iq^i = \frac{q}{(1-q)^2}$ .

#### 6.2.4 Середня тривалість очікування початку обслуговування

Для будь-якого виклику, що надходить в систему, середня тривалість очікування  $\bar{\gamma}$  може розглядатися як відношення сумарної тривалості очікування всіх викликів до кількості викликів, що надійшли в систему. Аналогічно, середня тривалість очікування затриманих в черзі викликів  $\bar{\gamma}_3$  може розглядатися як відношення сумарної тривалості очікування всіх викликів до кількості затриманих викликів. Таким чином,  $\bar{\gamma}_3 > \bar{\gamma}$ .

Величина  $\Lambda P(\gamma > 0)$  - це інтенсивність потоку затриманих викликів, що створюють чергу середньою довжиною  $\bar{S}$ , де кожний затриманий виклик у середньому очікує  $\bar{\gamma}_3$ . Тоді:

$$\bar{S} = \Lambda P(\gamma > 0) \bar{\gamma}_3 \quad (6.10)$$

З (6.10) і (6.9) можна отримати значення  $\bar{\gamma}_3$ , виражене в умовних одиницях часу, тобто в одиницях середньої тривалості обслуговування:

$$\bar{\gamma}_3 = \frac{\bar{S}}{\Lambda P(\gamma > 0)} = \frac{1}{\nu - \Lambda} \quad (6.11)$$

Враховуючи, що  $1 \text{ у.о.ч.} = h$ , маємо формулу для обчислення середньої тривалості очікування затриманого виклику в звичайних часових одиницях:

$$\bar{\gamma}_3 = \frac{h}{\nu - \Lambda} \quad .$$

Для оцінки середньої тривалості очікування будь-якого виклику, що надійшов в систему, треба врахувати імовірність очікування. Отже, в умовних та звичайних одиницях часу відповідно:

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_3 P(\gamma > 0) = \frac{D_v(\Lambda)}{v - \Lambda} \quad (6.12)$$

$$\bar{\gamma} = h\bar{\gamma}_3 P(\gamma > 0) = \frac{hD_v(\Lambda)}{v - \Lambda} \quad .$$

Порівнюючи (6.12) і (6.9), отримуємо формулу, відому як **формула Літла**:

$$\bar{S} = \bar{\gamma} \cdot \Lambda \quad (6.13)$$

Ця формула пов'язує середню довжину черги, середній час очікування в умовних одиницях часу та інтенсивність навантаження, що надходить в систему. Подібна формула має місце і для зв'язку середньої довжини черги із середнім часом очікування в звичайних часових одиницях та параметру потоку, що надходить в систему:

$$\bar{S} = \bar{\gamma} \cdot \lambda$$

### 6.2.5 Імовірність перевищення довжиною черги заданої величини $n$

Використовуючи послідовно  $n + 1$  разів друге рекурентне співвідношення (6.2), одержуємо:

$$P(S > n) = \sum_{i=v+n+1}^{\infty} P_i = \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{n+1} \sum_{i=v+n+1}^{\infty} P_{i-n-1} = \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{n+1} \sum_{i=v+n+1}^{\infty} P = \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{n+1} D_v(\Lambda). \quad (6.14)$$

Слід зазначити, що всі вищезазнані характеристики не залежать від дисципліни обслуговування черги.

### 6.2.6 Імовірність очікування більше припустимого часу $t_{np}$

Величину  $P(\gamma > t_{np})$  часто називають умовними втратами. На відміну від попередніх характеристик, імовірність  $P(\gamma > t_{np})$  залежить від вигляду черги. Найбільш простий вираз  $P(\gamma > t_{np})$  утворюється при

демократичній черзі (FIFO). Розглянемо цей випадок. Імовірність  $P(\gamma > t_{np})$  можна уявити у вигляді такої суми:

$$P(\gamma > t_{np}) = \sum_{i=v}^{\infty} P_i(\gamma > t_{np}) P_i, \quad (6.15)$$

де  $P_i(\gamma > t_{np})$ - імовірність очікування понад  $t_{np}$  при надходженні виклику в стані системи  $i$ . Очевидно,  $P_i(\gamma > t_{np}) > 0$  тільки при  $i = \overline{v, \infty}$ . Для того щоб виклик, що надійшов у стані системи  $i$  (довжина черги дорівнює  $i - v$ ), чекав початку обслуговування більше часу  $t_{np}$ , необхідно, щоб за час  $t_{np}$ , звільнилося не більш ніж  $(i - v)$  ліній. Параметр потоку звільнень при наявності черги постійний і дорівнює  $v$ . У цьому випадку потік звільнень є найпростішим і імовірність звільнення  $k$  ліній за час  $t_{np}$  є

$$P_k(t_{np}) = \frac{(vt_{np})^k e^{-vt_{np}}}{k!}. \quad (6.16)$$

Тоді

$$P_i(\gamma > t_{np}) = \sum_{k=0}^{i-v} P_k(t_{np}) = \sum_{k=0}^{i-v} \frac{(vt_{np})^k}{k!} \cdot e^{-vt_{np}}. \quad (6.17)$$

Підставивши (6.16) і (6.17) у (6.15), після ряду перетворень одержуємо:

$$P(\gamma > t_{np}) = D_v(\Lambda) e^{-(v-\Lambda)t_{np}}. \quad (6.18)$$

Величина  $t_{np}$  у (6.18) виражена в умовних одиницях часу.

### 6.3 Одноканальна система з очікуванням

Розглянемо систему  $M/M/1/W$  та визначимо її основні характеристики.

Для такої системи основна умова існування усталеного режиму  $\Lambda < v$  приймає вид  $\Lambda < 1$ .

Імовірність очікування для будь-якого виклику, що надійшов, за другою формулою Ерланга (6.7) має вигляд:

$$P(\gamma > 0) = D_1(\Lambda) = \frac{\left[ \frac{\Lambda}{1-\Lambda} \right]}{\left[ \frac{1+\Lambda}{1-\Lambda} \right]} = \Lambda. \quad (6.19)$$

Середня довжина черги з (6.9) з урахуванням (6.19)

$$\bar{S} = \frac{\Lambda \cdot D_v(\Lambda)}{v - \Lambda} = \frac{\Lambda \cdot \Lambda}{1 - \Lambda} = \frac{\Lambda^2}{1 - \Lambda}. \quad (6.20)$$

Імовірність перевищення чергою заданого значення знаходимо за (6.14) з урахуванням (6.19):

$$P(S > n) = \left( \frac{\Lambda}{v} \right)^{n+1} \cdot D_v(\Lambda) = \Lambda^{n+2}. \quad (6.21)$$

Середній час очікування для будь-якого та затриманого виклику, відповідно:

$$\bar{\gamma} = \frac{\Lambda}{1 - \Lambda}. \quad (6.22)$$

$$\bar{\gamma}_z = \frac{1}{1 - \Lambda}. \quad (6.23)$$

Імовірність перевищення часу очікування заданої величини для будь-якого виклику, що надійшов в систему:

$$P(\gamma > t_{np}) = \Lambda e^{-(1-\Lambda)t_{np}}. \quad (6.24)$$

#### 6.4 Система з обмеженим числом місць в черзі

Відмінності в постановці задачі порівняно з другим розподілом Ерланга полягають в наступному:

- 1) кількість місць для очікування обмежена  $r = const$ ;

- 2) виклик, що надійшов в момент зайнятості усіх каналів і всіх місць очікування, втрачається і в подальшому не впливає на систему

Тобто, маємо модель  $M/M/v/W, r < \infty$ . З неї як часткові випадки можна отримати перший (при  $r=0$ ) та другий (при  $r \rightarrow \infty$ ) розподіли Ерланга.

Така система є комбінованою – з очікуванням і втратами, або з умовними втратами. Детально вона розглянута в [3].

Наведемо її основні характеристики якості.

Імовірність того, що виклик, який надійшов в систему в будь-який момент часу, застане усі лінії зайнятими, але є бодай одне вільне місце в черзі, і відповідно виклик буде очікувати початку обслуговування протягом деякого часу  $\gamma > 0$

$$P(\gamma > 0) = \frac{v[1 - (\frac{\Lambda}{v})^r]}{\frac{(v - \Lambda)}{E_v(\Lambda)} + \Lambda \left[ 1 - \left( \frac{\Lambda}{v} \right)^r \right]} \quad (6.25)$$

Імовірність того, що виклик, який надійшов в систему в будь-який момент часу, застане усі лінії і всі місця для очікування зайнятими і отримає відмову, визначається:

$$P_g = \frac{(v - \Lambda) \cdot \left( \frac{\Lambda}{v} \right)^r}{\left[ \frac{v - \Lambda}{E_v(\Lambda)} + \Lambda \left( 1 - \left( \frac{\Lambda}{v} \right)^r \right) \right]} \quad (6.26)$$

При заданих кількості ліній  $v$  та величині втрат  $P_g$  необхідну кількість місць для очікування  $r$  можна розрахувати за формулою:

$$\left( \frac{\Lambda}{v} \right)^r = \frac{P_g}{E_v(\Lambda)} \frac{v - \Lambda(1 - E_v(\Lambda))}{v - \Lambda(1 - P_g)} \quad (6.27)$$

Середня тривалість очікування затриманих викликів:

$$\bar{\gamma}_3 = \frac{h}{v - \Lambda} - \frac{hr \left( \frac{\Lambda}{v} \right)^r}{v - v \left( \frac{\Lambda}{v} \right)^r} . \quad (6.28)$$

### 6.5 Контрольні питання

1. Що характеризує другий розподіл та друга формула Ерланга?
2. Наведіть умову існування усталеного режиму для системи  $M/M/v/W$ .
3. Які потоки мають місце в системі  $M/M/v/W$ ?
4. Чому дорівнює обслуговане навантаження в системі  $M/M/v/W$ ?
5. Чому дорівнює надлишкове навантаження в системі  $M/M/v/W$ ?
6. Наведіть основні та додаткові характеристики якості для системи  $M/M/v/W$ .
7. В чому полягають особливості функціонування системи  $M/M/1/W$ ?

### 6.6 Завдання для самостійної роботи

1. Розрахувати долю викликів, що обслуговуються без черги, в системі  $M/M/4/L$  при  $\Lambda = 2E_{рл}$ .
2. Розрахувати долю простою в системі  $M/M/1/W$  при  $\Lambda = 0,8E_{рл}$ .
3. Визначити імовірності зайнятості 2 каналів і 3 викликів в черзі для системи  $M/M/2/W$ .  $\lambda = 120 \text{ викл/год}$ ,  $h = 30 \text{ с}$ . Побудувати граф станів і позначити на графі відповідні стани.
4. Визначити середнє число зайнятих каналів в системі  $M/M/6/W$ , якщо виклики надходять в систему в середньому через 30 с, а обслуговування одного виклику триває в середньому 2 хв.

5. Визначити пропускну здатність першого каналу і імовірність заняття 1 каналу в системі  $M/M/4/L/S$ .  $\lambda = 120 \text{ викл/год}$ ,  $h = 30 \text{ с}$ .
6. Який середній час обслуговування має бути в системі  $M/M/1/W$ , щоб при обслуговуванні потоку з параметром 10 викл/хв в черзі чекало в середньому максимум 5 викликів?
7. Який середній час обслуговування має бути в системі  $M/M/1/W$ , щоб при обслуговуванні потоку з параметром 5 викл/хв середній час очікування затриманого в черзі виклику не перевищував 15 с?
8. Потік якої інтенсивності може нормально обслужити система  $M/M/20/W$  з  $h = 10 \text{ с}$ ?



## 7 ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СМО

### 7.1 Загальні відомості

Багато задач теорії телетрафіку, як було показано вище, можуть бути вирішені аналітичним шляхом за допомогою марківських процесів. Але іноді процеси в системах масового обслуговування мають виражену післядію, або кількість станів досліджуваного процесу завелика. Так, наприклад, неповнодоступні схеми мають  $2^v$  станів, що при ємності пучка ліній  $v = 50$  (а в сучасних комутаційних системах це значення набагато більше) дає більше  $10^{15}$  рівнянь. Навіть запис системи такого порядку викликає певні труднощі, не кажучи про її розв'язання. Найбільш ефективним засобом рішення таких задач є метод імітаційного (статистичного) моделювання.

Цей метод полягає в імітації процесів надходження та обслуговування викликів в СМО, в результаті якої можна отримати потрібні статистичні характеристики досліджуваного процесу. Підкреслимо, що процес моделювання і отримані результати відповідають досліджуваній системі не абсолютно точно, а в статистичному сенсі. Саме тому таке моделювання і називається *статистичним*. Порівняно з безпосереднім (натурним) експериментом на комутаційному вузлі або мережі зв'язку моделювання має низку переваг: воно може бути застосовано для нових систем, що тільки розробляються, роботу впроваджуваних СМО можна дослідити у різноманітних умовах, процес дослідження зазвичай проводиться у прискореному темпі за рахунок зміни масштабу часу.

Кожний окремий експеримент дозволяє отримати числові значення шуканих характеристик тільки для визначеної структури системи, певного набору параметрів та при заданих властивостях і числових характеристиках потоку викликів. Оскільки для повноцінного дослідження необхідні загальні результати, то слід здійснювати багаторазову імітацію роботи СМО, змінюючи структуру та параметри моделі. Суттєвого скорочення обсягу

моделювання можна досягнути, якщо його поєднувати з аналітичними дослідженнями, використовуючи моделювання для уточнення отриманих аналітичних залежностей, перевірки зроблених при цьому припущень, отримання поправочних коефіцієнтів та допоміжних розрахункових величин.

Для досягнення максимальної ефективності моделювання необхідно правильно розробити завдання на його проведення, в якому формулюють ціль і задачі досліджень, визначають вимоги до точності і обсягу планованих результатів, а також детально описують всі елементи моделі: структуру та параметри СМО, властивості й числові характеристики вхідного потоку викликів, дисципліну і закон розподілу часу обслуговування викликів. Важливо задати вихідні дані оптимальним чином, визначивши межі та крок зміни усіх параметрів, що вводяться. Для цього доцільно виконати попередній теоретичний аналіз досліджуваної моделі.

За матеріалами завдання розробляється алгоритм і пишеться програма моделювання. Оскільки алгоритм має відбивати випадкову природу імітованого процесу обслуговування, в його реалізації використовуються випадкові числа і події.

Вхідний потік викликів необхідного типу моделюється за допомогою генерування випадкових величин з відповідним законом розподілу, алгоритмічно задається структура СМО та дисципліна обслуговування викликів, час обслуговування також імітується відповідною випадковою величиною.

При імітаційному моделюванні можна з будь-якою точністю відтворити перебіг усього досліджуваного процесу і отримати потрібні статистичні характеристики. Звичайно, чим більша необхідна точність, тим більший необхідний обсяг моделювання та (або) складніша структура моделі. Для спрощення алгоритму моделювання при збереженні необхідної точності результатів безпосередня імітація реальної СМО замінюється моделюванням відповідних марківських процесів, що описують процес надходження та обслуговування викликів у такій системі.

## 7.2 Структура імітаційної моделі СМО

У складі імітаційної моделі СМО можна виділити дві частини: інформаційну та алгоритмічну. *Інформаційна* частина відбиває структуру та поточний стан системи обслуговування, містить відомості про викликах, що перебувають у системі, та накопичених статистичних характеристиках. Вона являє собою сукупність змінних, окремих або поєднаних у масиви постійної та змінної довжини. *Алгоритмічна* частина моделі – це комплекс алгоритмів, який забезпечує в процесі свого функціонування зміну значень змінних інформаційної частини. Комплекс містить:

- початковий алгоритм, необхідний для завдання початкових умов (вихідного стану) процесу моделювання;
- алгоритм моделювання з підпрограмами випадкових величин для безпосередньої імітації роботи СМО;
- алгоритм обробки та виводу статистичної інформації;
- алгоритм управління, який забезпечує взаємодію усіх алгоритмів.

Звичайно моделювання проводиться кількома ( $n = 5 \dots 20$ ) серіями по  $M$  ( $M = 10000 \dots 20000$ ) викликів в кожній. Крім того, для приведення системи в стаціонарний (усталений) режим і отримання незміщених оцінок характеристик якості обслуговування задається вихідна серія з  $M_0$  ( $M_0 < M$ ) викликів без збирання статистичної інформації. По закінченню кожної робочої серії моделювання призупиняється і вся інформація, що стосується даної серії, обробляється та виводиться. Одночасно обробляється та виводиться накопичена інформація по усіх викликах минулих серій разом з останньою. Це дозволяє прослідити сходимість отриманих результатів.

Потім для усіх  $n$  серій підраховуються статистичні оцінки математичного очікування та дисперсії отриманих характеристик і за критерієм Стюдента [5] при заданій довірчій імовірності  $P$  (зазвичай приймають  $P = 0,95$ ) для кожної отриманої характеристики визначають довірчі інтервали. Детальніше ці питання розглянуті нижче (п. 7.7)

### 7.3 Моделювання випадкових величин. Метод Монте-Карло

Імітація перебігу випадкових процесів у СМО здійснюється за допомогою моделювання випадкових величин з різними законами розподілу. Для отримання таких величин використовується випадкова величина  $R$ , рівномірно розподілена на інтервалі  $[0, 1]$ , з якої відповідними перетвореннями отримують випадкову величину з потрібним законом розподілу.

Нагадаємо [5], що випадкова величина  $R$  називається рівномірно розподіленою на інтервалі  $[0, 1]$ , якщо її щільність імовірності  $f(r)$  на цьому інтервалі постійна і дорівнює одиниці:

$$f(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq r \leq 1; \\ 0 & \text{при } 0 > r > 1. \end{cases}$$

Функція розподілу такої величини має вигляд:

$$F(R) = P(R < r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq 0; \\ r & \text{при } 0 \leq r \leq 1; \\ 1 & \text{при } r \geq 1. \end{cases}$$

Випадкову величину  $R$ , рівномірно розподілену на інтервалі  $[0, 1]$ , можна отримати з дискретної випадкової величини, що з рівною імовірністю приймає значення 0 та 1. Дійсно, двійковий дріб  $R = 0, a_1 a_2 \dots$ , де  $a_1 a_2 \dots$  є послідовність незалежних випадкових величин, кожна з яких з імовірністю 0,5 приймає значення 0 та з імовірністю 0,5 – одиницю, представляє собою випадкову величину, рівномірно розподілену на інтервалі  $[0, 1]$ .

Для того, щоб проміжки між сусідніми значеннями такої величини стрімилися до 0, необхідно мати безкінечну послідовність незалежних випадкових величин  $\{a_i, i = 1, 2, \dots\}$ , що з рівною імовірністю приймають значення 0 та 1. На практиці безперервна випадкова величина  $R$  моделюється наближено за допомогою дискретної випадкової величини, яка

з рівною імовірністю приймає значення  $0, \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \dots, 2^k - \frac{1}{2^k}$  з інтервалом між сусідніми значеннями  $\frac{1}{2^k}$ .

Представимо відрізок  $[0, 1]$  лінією, що утворює коло. Тоді випадкова величина  $R$ , рівномірно розподілена на інтервалі  $[0, 1]$  виявиться рівномірно розподіленою по довжині кола. Маємо аналогію з грою в рулетку, що й спричинило назву методу – Монте-Карло.

При ручних обчисленнях значення величини  $R$  беруть з таблиць випадкових чисел (додаток Д), при моделюванні на ЕОМ використовують відповідні функції генерації псевдовипадкових чисел. Ці числа називаються не випадковими, а *псевдовипадковими*, оскільки послідовність таких чисел виробляється рекурентним способом за допомогою спеціальних арифметичних та логічних операцій, отже є періодичною, а не випадковою в чистому вигляді.

Сучасні мови програмування високого рівня (C++, PASCAL, тощо) або спеціалізовані математичні пакети (MatLab, MatCad) мають такі вбудовані функції (RANDOM). Зокрема, Microsoft Excel дозволяє генерувати значення величини  $R$  за допомогою функції СлЧис.

Метод Монте-Карло дозволяє на базі послідовності згенерованих псевдовипадкових чисел отримувати значення дискретної або безперервної випадкової величини з будь-яким заданим законом розподілу. Підходи щодо дискретних та безперервних величин дещо різні [5]. В теорії телетрафіку процес надходження та обслуговування викликів описується безперервними випадковими величинами – інтервалом між сусідніми викликами у вхідному потоці, часом обслуговування одного виклика або часом очікування виклика в черзі.

В цьому випадку моделювання послідовності значень безперервної випадкової величини ґрунтується на наступній теоремі:

**Теорема:** якщо  $r_i$  – випадкові числа (рівномірно розподілені на інтервалі  $[0, 1]$ ), то можливе значення  $x_i$  безперервної випадкової величини  $X$  з заданою функцією розподілу  $F(x)$ , що відповідає  $r_i$ , є коренем рівняння

$$F(x_i) = r_i. \quad (7.1)$$

Згідно до цієї теореми, для одержання послідовності випадкових значень, розподілених за заданим законом, потрібно для кожного псевдовипадкового числа  $r_i$ , що генерується відповідною функцією, розв'язати рівняння (7.1). Розглянемо використання методу для моделювання процесів надходження викликів найпростішого потоку та обслуговування викликів системою з втратами.

#### 7.4 Моделювання найпростішого потоку

Як було показано в розділі 2, в найпростішому потоці викликів з параметром  $\lambda$  довжини інтервалів часу  $z_i = t_i - t_{i-1} > 0$  між послідовними викликами потоку розподілені за експоненціальним законом з тим же параметром  $\lambda$

$$P(z < t) = F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Ця обставина дозволяє сформулювати процес надходження найпростішого потоку викликів на заданому проміжку часу за допомогою методу Монте-Карло. Згідно до вищеприведеної теореми, для одержання випадкових значень, що відповідають інтервалам між викликами, потрібно згенерувати послідовність псевдовипадкових чисел  $r_i$ , для кожного з них розв'язати рівняння:

$$1 - e^{-\lambda z_i} = r_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно  $z_i$ , маємо:

$$z_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i). \quad (7.4)$$

Оскільки випадкові числа  $r_i$  належать інтервалу  $[0, 1]$ , то число  $(1 - r_i)$ , також є випадковим (із тим же рівномірним розподілом) з інтервалу  $[0, 1]$ . Тому для обчислення  $z_i$  можна використовувати простішу формулу:

$$z_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.5)$$

При цьому, якщо моделювання необхідно здійснити для проміжку часу  $[T_1, T_2]$ , то час  $t_k$  надходження чергового виклику найпростішого потоку слід визначати за співвідношенням:

$$\begin{cases} t_k = T_1 + \sum_{i=1}^k z_i, \quad i = 1, 2, \dots \\ t_k \leq T_2 \end{cases} \quad (7.6)$$

Результати прикладу імітаційного моделювання для найпростішого потоку з параметром представлено в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

## Результати імітаційного моделювання

$r_i$	$z_i$	$t_i$
$r_1$	$z_1$	$t_1$
$r_2$	$z_2$	$t_2$
...	...	...

Отримані значення можна перевірити на відповідність заданим умовам моделювання наступним чином. Весь інтервал моделювання  $[T_1, T_2]$  розбивається на кілька проміжків довжиною  $\tau$  і підраховується кількість викликів  $X(\tau)$ , що потрапили в кожний з інтервалів. Оскільки моделювався найпростіший потік, величина  $X(\tau)$  розподілена за законом Пуассона. Отже, можна висунути і перевірити, використовуючи відповідні статистичні критерії [5], гіпотезу про пуассонівський розподіл. Крім того, можна

порівняти із заданим значенням параметра потоку  $\lambda$  значення параметра змодельованого потоку  $\lambda_{\text{мод}}$ , яке обчислити як відношення середнього значення кількості викликів в інтервалі до довжини цього інтервалу:

$$\lambda_{\text{мод}} = \frac{\overline{X(\tau)}}{\tau}. \quad (7.5)$$

При досить близькому співпадінні  $\lambda_{\text{мод}}$  і  $\lambda$  моделювання можна вважати успішним.

Розглянутий підхід можна використовувати для імітації доволі широкого класу марківських розподілів випадкових величин, оснований на комбінації та змішуванні експоненціальних розподілів (див. п. 2.10). Ці величини можуть визначати інтервали між викликами, проміжки вільності й зайнятості джерела, повторення викликів, тривалості обслуговування. Як приклад розглянемо моделювання випадкової величини  $z$  з гіперекспоненціальним розподілом (2.49) при  $n = 3$ :

$$\begin{aligned} P(z < t) &= 1 - q_1 e^{-\lambda t} - q_2 e^{-\lambda t} - q_3 e^{-\lambda t}, \\ q_1 + q_2 + q_3 &= 1. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Для отримання послідовності значень необхідні два типи випадкових величин:  $X$  – рівномірно розподіленої в інтервалі  $[0,1]$  та  $Z$  – експоненціально розподіленої з параметром  $\lambda_i$ . На початку кожного цикла генерується число  $x$  і перевіряється умова  $x < q_1$ . При виконанні умови виробляється число  $z$  з параметром  $\lambda_1$ . Якщо перша умова не виконується, перевіряється наступна:  $x < q_1 + q_2$ . За результатами перевірки виробляється число  $z$  з параметром  $\lambda_2$  при виконанні умови або  $\lambda_3$  у протилежному випадку.

## 7.5 Моделювання процесу обслуговування

Алгоритм моделювання розглянемо на прикладі СМО з явними втратами – системи  $GI/G/v/L$ .



Функція розподілу інтервалу між викликами  $P(z < t) = A(t)$ , а функція розподілу тривалості обслуговування  $P(\xi < t) = B(t)$ . Програма моделювання містить два генератори випадкових величин  $z$  і  $\xi$  у відповідності з заданими функціями  $A(t)$  і  $B(t)$ , змінну  $t_0$  збереження моменту надходження чергового виклику та змінні  $t_1, t_2, \dots, t_v$  для збереження моменту звільнення  $i$ -го ( $i = \overline{1, v}$ ) каналу.

Для спрощення пояснень прийmemo  $v = 3$  та проаналізуємо роботу алгоритму з моменту надходження п'ятого виклику (рис.8.1). Перший генератор формує чергове випадкове число  $z_5$ , що відповідає надходженню п'ятого виклику  $t_0 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5$ . Припустимо що до моменту  $t_0$  перший канал був зайнятий четвертим викликом, а другий та третій, відповідно другим і третім. Тоді:

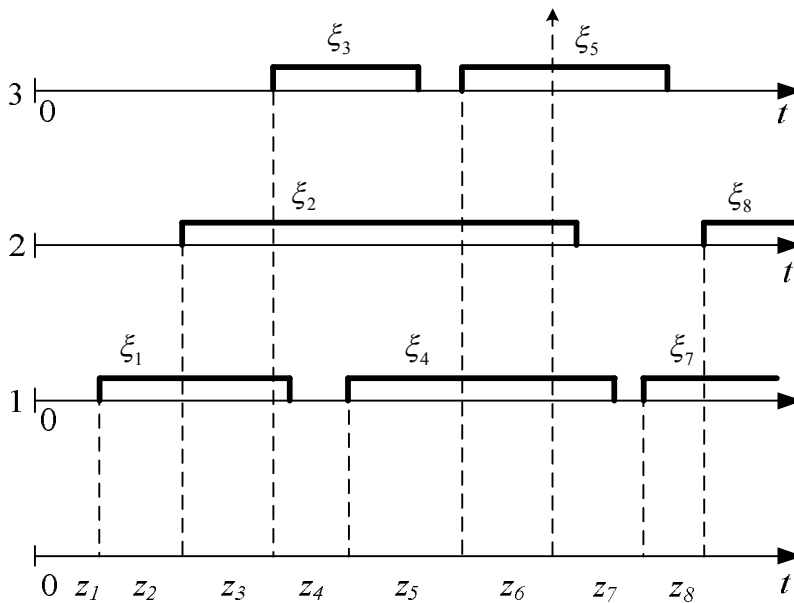


Рисунок 7.1 – Часова діаграма роботи системи  $G1/G/3/L$

$t_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \xi_4$ ,  $t_2 = z_1 + z_2 + \xi_2$ ,  $t_3 = z_1 + z_2 + z_3 + \xi_3$ . Кожне з чисел  $t_1, t_2, t_3$  визначає момент звільнення відповідного каналу.

При послідовному занятті каналів значення  $t_0$  по черзі порівнюється з  $t_1, t_2, \dots, t_v$ , поки не виявиться канал із моментом звільнення  $t_i < t_0$  ( $i = \overline{1, v}$ ). Припустимо, що  $t_1 > t_0$  та  $t_2 > t_0$ , а  $t_3 < t_0$ . Це означає, що до моменту

надходження п'ятого виклику перший і другий канал залишалися зайнятими, а третій вже звільнився і може прийняти на обслуговування п'ятий виклик, що надійшов. Тоді  $t_3$  присвоюється  $t_0$ . Потім генерується випадкове число  $\xi_5$ , що визначає тривалість обслуговування п'ятого виклику. Додаванням числа  $\xi_5$  до  $t_3$  завершується п'ятий цикл.

Шостий цикл починається з генерації випадкового числа  $z_6$ . Як і колись,  $t_0 = t_0 + z_6$ . Потім здійснюється почергове порівняння. Якщо тепер виявиться що,  $t_1 > t_0, t_2 > t_0$  і  $t_3 > t_0$ , то шостий виклик буде втрачений і на цьому цикл закінчиться.

Для підрахунку числа викликів, що надійшли  $N$ , та втрачених  $N_{втр}$  викликів використовуються два лічильники. До першого додається одиниця при кожній генерації числа  $z$ , а до другого – при кожній втраті виклику.

Відношення  $\frac{N_{втр}}{N}$  надає по закінченні чергової серії статистичну оцінку втрат викликів.

Алгоритм можна дещо спростити за рахунок скорочення число логічних операцій порівняння, якщо змінити алгоритм пошуку вільної лінії. Для цього необхідно впорядковувати (перенумеровувати) лінії після кожного зайняття однієї з них за моментами звільнення:  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_v$ . Тоді при надходженні чергового виклику значення  $t_0$  досить порівняти тільки з  $t_1$ . Якщо  $t_0 < t_1$ , усі лінії зайняті і виклик втрачається. А якщо  $t_0 > t_1$ , як мінімум перша лінія вільна і може надати обслуговування.

Обидва розглянутих алгоритма основані на впорядкованому пошуку вільної лінії. Ознакою вибору лінії є або її номер, або час звільнення. Відповідно, в першому випадку використання ліній буде різним (рис.5.6), а в другому – однаковим (при достатньо великій кількості обслужених викликів).

Таким чином, при моделюванні процесу обслуговування можна використовувати два способи впорядкування ліній – за номерами або

часом звільнення. Перший більш ефективний при послідовному зайнятті каналів (система  $GI/G/v//S$ ), другий – при випадковому (система  $GI/G/v/L//R$ ).

### 7.6 Моделювання марківського процесу

Нехай випадкові величини  $z$  і  $\xi$  розподілені за експоненціальним законом з параметрами відповідно  $\lambda$  і  $1$  (середній час обслуговування прийнятий за 1 у.о.ч.). Тоді  $v$ -канальна СМО з явними втратами описується марківським процесом  $S_i(t)$ . Стан процесу  $S_i$  нумерується за числом зайнятих каналів. В момент виходу зі стану  $S_i$  здійснюється перехід в стан  $S_{i+1}$  з імовірністю  $p_i = \frac{\lambda}{\lambda + i}$  при надходженні нового виклику, та в стан  $S_{i-1}$  з імовірністю  $p_i = \frac{\lambda}{\lambda + i}$  при звільненні одного з  $i$  зайнятих каналів. Зі стану насичення ( $i = v$ ) можливий перехід тільки в стан  $S_{v-1}$  з імовірністю одиниця. Тривалість стану насичення  $\eta$  розподілена за експоненціальним законом з параметром  $v$ .

Для відтворення даного процесу на комп'ютері необхідні експоненціально розподілені числа, рівномірно розподілені в інтервалі  $[0,1]$  числа  $x$ , змінна  $i$  для запису стану процесу (числа зайнятих ліній), змінні  $T$  і  $T_n$  для підрахунку загального часу функціонування системи та часу перебування системи в стані насичення. Відношення  $\frac{T_n}{T}$  надасть після закінчення серії статистичну оцінку імовірності втрат за часом.

Алгоритм моделювання полягає в наступному. При переході процесу в стан  $i$  генерується випадкове число  $z_i$ , що відповідає інтервалу між викликами. Його значення додається до  $T$ . Якщо  $i = v$ , то воно одночасно додається до  $T_n$ . Потім генерується число  $x$  і порівнюється з  $p_i$ . При  $x < p_i$  процес переходить у стан  $i + 1$ , інакше – в стан  $i - 1$ .

Якщо для дисципліни обслуговування, що моделюється, необхідно враховувати номери зайнятих або звільнених ліній, то додатково задіюється один або декілька масивів обсягом  $\nu$ . Вільній  $i$ -й лінії відповідає одиниця в  $i$ -му елементі масиву, а зайнятій – 0.

Заміна моделювання реального процесу обслуговування на марківський процес суттєво спрощує модель. Подальшого спрощення можна досягти при заміні марківського процесу з безперервним часом на марківський ланцюг (процес з дискретним часом). В цьому випадку модель відтворює тільки моменти переходу з одного стану в інший. Час перебування СМО в різних станах в явному виді не враховується. Відповідно випадкові величини  $z$  і  $\xi$  не генеруються.

Реалізація випадкової рівномірно розподіленої в інтервалі  $[0,1]$  величини  $x$  імітує або надходження виклику при  $x < \frac{\lambda}{\lambda + i}$ , або звільнення однієї зайнятої лінії при  $x > \frac{\lambda}{\lambda + i}$ . В цьому випадку підраховується не загальний час моделювання та перебування у стані насичення, а загальна кількість викликів, що надійшли  $N$  та були втрачені  $N_B$ . Відношення  $\frac{N_B}{N}$  надасть після закінчення серії статистичну оцінку імовірності втрати виклику. Використання марківського ланцюга дозволяє скоротити тривалість кожного цикла моделювання і одночасно зменшити дисперсію отриманих оцінок втрат та інших характеристик, оскільки зменшується кількість випадкових величин. Середні значення характеристик при цьому зберігаються.

Цей принцип моделювання можна приміняти не тільки при експоненціальному розподілі інтервалу між викликами та тривалості обслуговування, але і при більш загальних марківських розподілах цих величин. Як було показано в п. 2.10, марківські розподіли дозволяють при заданій точності апроксимувати практично будь-які емпіричні розподіли.

Розглянемо алгоритм моделювання для випадку, коли величини  $z$  і  $\xi$  розподілені за комбінованим експоненціальним законом (2.47). Проміжок між викликами  $z$  складається з випадкового числа фаз, кожна з яких розподілена за експоненціальним законом з параметром  $a_i$  ( $i=1,2,3$ ). Після  $i$ -ї фази з імовірністю  $q_1(a)$  надходить виклик, а з імовірністю  $p_1(a)=1-q_1(a)$  розпочинається наступна  $(i+1)$ -а фаза. Граничне число фаз  $n=3$ , відповідно  $q_3(a)=1$  і  $p_3(a)=0$ . Тривалість обслуговування  $\xi$  також складається з випадкового числа фаз, розподілених за експоненціальним законом з параметром  $b_j$  ( $j=1,2,3$ ). Після  $j$ -ї фази з імовірністю  $q_1(b)$  обслуговування закінчується, а з імовірністю  $p_1(b)=1-q_1(b)$  розпочинається наступна  $(j+1)$ -а фаза обслуговування. Граничне число фаз  $n=3$ , тобто  $q_3(b)=1$  і  $p_3(b)=0$ .

Стан модельованої  $v$ -канальної системи визначимо за допомогою чотирьох випадкових змінних:  $i, k_1, k_2, k_3$ . Змінна  $i=1, 2, 3$  відповідає номеру фази, в якій знаходиться проміжок між викликами  $z$ , змінні  $k_1, k_2, k_3$  – числу ліній, зайнятих на  $j$ -й фазі обслуговування. Очевидно, число вільних ліній  $k_0 = v - k_1 - k_2 - k_3$ . Інтенсивність виходу системи зі стану  $(i, k_1, k_2, k_3)$  дорівнює

$$\Lambda(i, k_1, k_2, k_3) = a_i + k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3.$$

Отже, імовірність закінчення  $i$ -ї фази проміжка  $z$  є

$$p_i(z) = \frac{a_i}{\Lambda(i, k_1, k_2, k_3)}.$$

А імовірність закінчення  $i$ -ї фази інтервала  $\xi$  є

$$p_i(\xi) = \frac{k_i \cdot b}{\Lambda(i, k_1, k_2, k_3)}.$$

Алгоритм моделювання приведений на рис. 8. 2.

## 7.7 Точність і достовірність результатів моделювання

Як вже згадувалось, після завершення усіх  $n$  серій підраховуються статистичні оцінки математичного очікування, дисперсії та середньо квадратичного відхилення досліджуваних параметрів. Математичне очікування оцінюється за допомогою вибіркового середнього  $\bar{x}$ , дисперсія та середньо квадратичне відхилення – відповідно за допомогою незміщеної вибіркової дисперсії  $S^2$  та незміщеного вибіркового середньо квадратичного відхилення  $S$ :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (7.7)$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Оцінка точності й достовірності отриманих результатів моделювання може бути виконана на основі центральної граничної теореми для стаціонарних послідовностей [5], згідно з якою досліджувані статистичні характеристики сходяться до нормального закону. При цьому оцінка точності й достовірності отриманих середніх значень досліджуваних характеристик за результатами моделювання здійснюється за критерієм Стюдента (оскільки дисперсії відповідних генеральних сукупностей невідомі).

При заданому рівні значимості  $\alpha$  можна побудувати довірчий інтервал  $[\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta]$ , який із довірчою імовірністю (або надійністю)  $\gamma = 1 - \alpha$  покриває невідоме дійсне значення оцінюваного параметра, тобто

$$p(\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta) = 1 - \alpha. \quad (7.8)$$

Згідно критерія Стюдента величина довірчого інтервалу може бути обчислена за формулою:

$$\delta = \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}, \quad (7.9)$$

де  $n$  – обсяг вибірки (кількість серій);

$S$  – незміщене вибіркове середньо квадратичне відхилення;

$t_\gamma$  – коефіцієнт розподілу Стюдента, значення табульовані в додатку Е залежно від  $n$  і  $\gamma$ .

### 7.8 Контрольні питання

1. В чому полягає метод імітаційного (статистичного) моделювання СМО?
2. На якому методі базується імітаційне моделювання СМО?
3. Які закони розподілу використовуються для моделювання процесу надходження викликів у СМО та процесу обслуговування заявки?
4. Як досягти необхідної точності моделювання?
5. Як оцінити точність і достовірність результатів моделювання?

## 8 АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ МЕРЕЖ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Останнім часом у зв'язку зі зростаючим ускладненням технологій і структури телекомунікаційних мереж, розвитком нових технологій стільникового зв'язку, підвищенням вимог до якості їх функціонування особливої актуальності набувають методи адекватного моделювання таких мереж, які б дозволяли досліджувати їх поведінку та знаходити оптимальні рішення при проектуванні або експлуатації телекомунікаційних мереж. Одним з найбільш поширених типів мережних моделей для дослідження пов'язаних у часі процесів функціонування множини вузлів різного класу, з яких складаються мережі зв'язку, є мережі масового обслуговування. Модель мережі МО розглядає вхідний потік вимог, що потребує обслуговування у кінцевому числі вузлів мережі. Подібно СМО, мережі МО також розглядають різні типи: вхідних потоків, розподілів часу обслуговування, способів обслуговування у вузлах, дисциплін черги тощо.

Спочатку мережі МО використовувались як моделі багатопроцесорних ЕОМ та обчислювальних мереж. Зараз сфера їх застосування охоплює локальні і корпоративні обчислювальні мережі, мережі передачі даних, транспортні та виробничі мережі [5, 10, 12].

Започаткована теорія МО була в 1957 р. роботою Джексона [34] щодо розімкнутих експоненціальних мереж МО з пуассонівським вхідним потоком та експоненційно розподіленою тривалістю обслуговування, в яких вимога після закінчення обслуговування в одному вузлі з певною ймовірністю переходила до іншого (марківська маршрутизація). В подальших роботах досліджувались замкнені мережі МО з різними класами вимог та детермінованою або марківською маршрутизацією. Важливу роль в розвитку теорії мереж МО відіграла теорема ВСМР (Baskett, Chandy, Muntz, Palacios) для мереж МО з марківською маршрутизацією, різними дисциплінами та



тривалостями обслуговування, перетворення Лапласа яких є дрібно-раціональними функціями [5].

### 8.1 Основні визначення

Під мережею МО розуміють сукупність кінцевого числа СМО, в якій циркулюють інформаційні потоки, що переходять з однієї СМО в іншу відповідно до маршрутної матриці. Розглянемо систему  $M/M/v/W$  в якості вузла мережі МО або *центра обслуговування*. Потік звільнень для однієї такої системи (пакети з вихідного порта маршрутизатора) є вхідним потоком для наступної СМО (чергового маршрутизатора). Інтенсивність обслуговування такої системи  $\mu_i(n_i)$ , як було зазначено в п.6.1, залежить від числа заявок  $n_i (i = \overline{1, M})$ , що знаходяться в системі (як на обслуговуванні, так і в черзі). Наприклад, інтенсивність обслуговування центра, що має  $A_i$  однакових каналів, визначається виразом:

$$\mu_i(n_i) = \begin{cases} n_i \mu_i, & 0 \leq n_i \leq A_i, \\ A_i \mu_i, & n_i > A_i, \quad i = \overline{1, M}. \end{cases} \quad (8.1)$$

Нехай  $\tau_k$  - тривалість обслуговування  $k$ -ої заявки. Якщо випадкові величини  $\tau_k (k \geq 1)$  незалежні у сукупності та мають однакову функцію розподілу  $F(t)$ , то таке обслуговування є рекурентним. Основні аналітичні результати в теорії мереж МО отримані для випадку [?], коли перетворення Лапласа функції розподілу часу обслуговування

$$\tilde{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t)$$

є раціональною функцією виду

$$\tilde{F}(s) = \tilde{E}(s) / \tilde{B}(s),$$

де:

$\tilde{E}(s)$  і  $\tilde{B}(s)$ - відповідно поліноми ступенів  $d$  и  $d_1$  ( $d_1 \geq d$ )

Клас функцій розподілу, що мають раціональне перетворення Лапласа, досить широкий і вміщує експоненціальний розподіл, розподіл Ерланга, гіперекспоненціальний розподіл тощо. Характеристики деяких з цих розподілів приведені в таблиці 8.1.

Таблиця 8.1

Тип розподілу	Експоненційний	Ерланга $k$ -го порядку	Гіперекспоненційний $k$ -го порядку
Функція розподілу	$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, t \geq 0$	$F(t) = 1 - e^{-k\mu t} \times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(k\mu t)^j}{j!}, t \geq 0$	$F(t) = 1 - \sum_{i=1}^k b_i \mu_i e^{-\mu_i t}, \sum_{i=1}^k b_i = 1, t \geq 0$
Математичне очікування	$\tau = \frac{1}{\mu}$	$\tau = \frac{1}{\mu}$	$\tau = \begin{cases} \frac{1}{\mu}, & \mu_i = \mu \\ \sum_{i=1}^k \frac{b_i}{\mu_i}, & \text{інакше} \end{cases}$
Дисперсія	$D = \frac{1}{\mu^2}$	$D = \frac{1}{k\mu^2}$	$D = \frac{1}{\mu^2} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_i b_j \times \left( \frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_j} \right)^2$
Перетворення Лапласа	$\tilde{F}(s) = \frac{\mu}{\mu + s}$	$\tilde{F}(s) = \left( \frac{k\mu}{k\mu + s} \right)^k$	$\tilde{F}(s) = \sum_{i=1}^k \frac{b_i \mu_i}{\mu_i + s}$

Вид перетворення Лапласа функції розподілу Ерланга  $k$ -го порядку свідчить, що воно є  $k$ -кратною згорткою експоненціального розподілу з середнім  $1/k\mu$ . Тому розподіл Ерланга  $k$ -го порядку можна інтерпретувати як розподіл тривалості обслуговування виклику на  $k$  послідовно з'єднаних одноканальних СМО (етапах), причому тривалість обслуговування в кожному етапі має експоненціальний розподіл з параметром  $k\mu$ .

Аналогічно гіперекспоненціальний розподіл може бути представлено за допомогою паралельних одноканальних центрів. На базі такого представлення реалізований один з найвідоміших методів точного і наближеного аналізу СМО – метод етапів. Через відсутність післядії експоненціального розподілу стохастичний процес, що описують за допомогою методу етапів, є марківським, так що можна застосовувати добре відомі методи аналізу. Використання методу етапів дозволяє отримати широкий клас функцій розподілу тривалості обслуговування, що мають раціональне перетворення Лапласа. На рис. 8.1 зображено представлення узагальненої функції розподілу Кокса за допомогою фіктивних етапів.

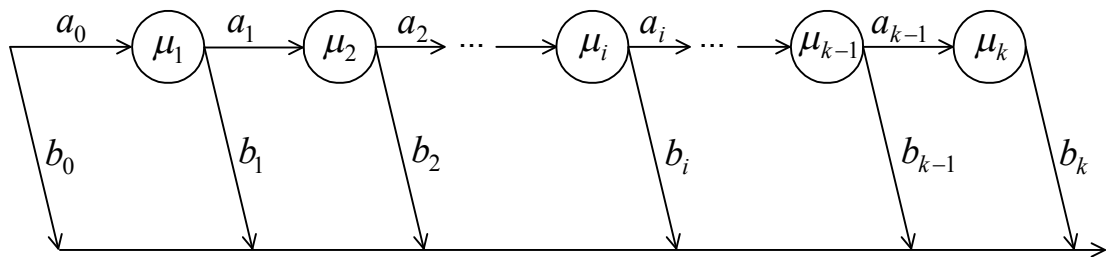


Рисунок 8.1. Представлення узагальненої функції розподілу Кокса за допомогою фіктивних етапів

Вхідна вимога з імовірністю  $p_0$  обслуговується на першому етапі та з імовірністю  $q_0 = 1 - p_0$  тривалість обслуговування дорівнює нулю. Після закінчення обслуговування на  $i$ -му етапі ( $i = 1, 2, \dots, k - 1$ ) вимога з імовірністю  $p_i$  надходить на  $(i+1)$ -й етап або з імовірністю  $q_i = 1 - p_i$  обслуговування завершується на  $i$ -му етапі. Враховуючи, що тривалість обслуговування на  $i$ -му етапі ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) розподілена за експоненціальним законом з параметром  $\mu_i$ , перетворення Лапласа розподілу Кокса має вигляд:

$$F(s) = b_0 + \sum_{i=1}^k a_0 \dots a_{i-1} b_i \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\mu_j + s} \quad (8.2)$$

Подібним чином можна отримати широкий клас функцій розподілу з раціональним перетворенням Лапласа, основна перевага яких полягає в тому,

що номеру етапу обслуговування достатньо для повного опису процесу обслуговування.

Важливу роль відіграє дисциплін обслуговування черги, тобто правило відбору заявки з буферу передачу. З розглянутих в першій главі основних дисциплін обслуговування черги в теорії мереж найбільш розповсюджені демократична (FIFO) і стекова (LIFO). Крім них ще можуть застосовуватися розподіл процесора (PS – Processor Sharing) та обслуговування без очікування (IS – Immediately Served). Дисципліна обслуговування PS відповідає граничній формі широко розповсюдженого в обчислювальних системах колективного використання розподіленого алгоритму опитування [42], коли всі кванти часу, що виділяються задачам в центральному процесорі, мають один і той же розмір, прагнучий до нуля. В одноканальних центрах с дисципліною PS кожна вимога незалежно від її місця в черзі обслуговується з інтенсивністю, зворотно пропорційній кількості  $n$  вимог.

Дисципліна IS фактично відповідає способу обслуговування без втрат (LL – Loss Less), бо вимагає кількості каналів обслуговування не менше, ніж максимально можлива кількість вимог. Такі мережі відповідають, наприклад, клієнт-серверним системам, де кожний користувач має свій термінал (тонкий клієнт).

Перехід вимоги з однієї СМО в іншу здійснюється відповідно до маршруту, тобто – послідовності центрів обслуговування, які ця вимога має пройти. Для цього використовується матриця маршрутів  $P$ , вид якої залежить від того, чи є мережа МО відкритою чи замкненою. У відкрити мережу МО вимоги надходять із зовнішнього джерела і залишають мережу після завершення обслуговування. Можна ввести фіктивний центр в мережу для зовнішнього джерела і позначити його індексом 0, тоді маршрут у відкритій мережі можна задати матрицею  $P = \|P_{ij}\|$ , де елементи нульового рядка та стовпчика  $P_{0j}$  и  $P_{j0}$  – імовірності відповідно надходження в  $j$ -й центр вимоги з джерела та залишення вимогою мережі після закінчення

обслуговування в  $j$ -му центрі.  $P_{ij}$  – імовірність того, що після обслуговування в  $i$ -му центрі вимога надійде в  $j$ -й центр. Очевидно, що виконується рівність:

$$\sum_{j=0}^M P_{ij} = 1 \quad (i = 0, 1, \dots, M)$$

$$P_{00} = 0$$

Вхідний з джерела потік визначається (див. п.2.1) сумісним розподілом випадкових величин  $Z_k = t_k - t_{k-1}$ , де  $t_k$  – моменти находження вимог ( $k \geq 1, t_0 = 0, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$ ). Якщо випадкові величини  $Z_k$  незалежні в сукупності, то такий потік є потоком з обмеженою післядією і для його визначення достатньо задати набір функцій розподілу  $H_k(t) = P\{Z_k < t\}, k \geq 1$ . Важливу роль в теорії мереж МО відіграє рекурентний потік, для якого  $H_1(t) = H_2(t) = \dots = H(t)$ . Окремий випадок рекурентного потоку був розглянутий в другій главі – для пуасонівського потоку  $H(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ .

Для визначення потоків, циркулюючих в стаціонарному режимі у відкритій мережі МО, введемо [10] коефіцієнти передачі  $e_i$  такі, що  $e_i \lambda$  будуть являти собою загальну інтенсивність потоку в  $i$ -й центр мережі ( $i = \overline{1, M}$ ), яка складається з інтенсивності надходження вимог у  $i$ -й центр з джерела  $P_{0i} \lambda$  та інтенсивностей надходження вимог від інших центрів  $e_j P_{ji} \lambda$ . Таким чином, величини  $e_i$  задовольняють наступній системі лінійних рівнянь:

$$e_i = P_{0i} + \sum_{j=1}^M e_j P_{ji}, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (8.3)$$

В замкнутій мережі МО вимоги ззовні не надходять і не залишають мережу; кількість вимог в ній постійна і дорівнює  $N$ . Матриця  $P$ , що визначає випадкові маршрути повідомлень не містить нульових рядка і стовпця:

$$\sum_{j=1}^M P_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, M})$$

З урахуванням цього (8.3) приймає вид:

$$e_i = \sum_{j=1}^M e_j P_{ji}. \quad (8.4)$$

Число незалежних рівнянь в системі (8.4) на одиницю менше кількості змінних, отже вона має одне рішення з точністю до мультиплікативної константи. Тобто, якщо  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$  – рішення системи рівнянь (8.4), то при  $\varepsilon \neq 0$  рішенням є і  $\varepsilon e = \{\varepsilon e_1, \varepsilon e_2, \dots, \varepsilon e_M\}$ . Для відшукування однозначного рішення системи рівнянь (8.4) достатньо довільно задати значення  $e_1$ , наприклад  $e_1 = 1$ . Тоді величину  $e_j$  можна вважати середнім числом відвідувань вимогою центра  $j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) між двома послідовними відвідуваннями ним першого центра.

Через статистичну однорідність вимог у відкритих та замкнених мережах МО, такі мережі вважають однорідними. При цьому однорідну мережу МО будемо називати експоненціальною, якщо функції розподілу  $H(t)$  і  $F_i(t)$  ( $i = \overline{1, M}$ ) є експоненціальними, та немарківською, якщо хоча б одна з цих функцій є довільною.

## 8.2 Однорідні експоненціальні мережі

### 8.2.1 Рівняння глобального балансу для замкнених мереж

Розглянемо однорідну замкнену мережу МО, що складається з  $M$  багатоканальних СМО  $M/M/v/W/FF$ , в якій циркулюють  $N$  вимог відповідно до матриці маршрутів  $P = \|P_{ij}\|$ . Тривалість обслуговування в каналі  $i$ -ї СМО розподілена за експоненціальним законом з параметром звільнення  $\mu_i$

( $i = \overline{1, M}$ ), так що загальна інтенсивність потоку звільнень будь-якої системи (центру) обслуговування визначається виразом (8.1).

Розглянемо багатовимірний випадковий процес

$$N(t) = \{n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)\}$$

де  $n_k(t)$  – число вимог в черзі  $i$  на обслуговуванні у  $k$ -му центрі ( $k = \overline{1, M}$ ) в момент  $t$ , та позначимо імовірність того, що в момент  $t$  мережа знаходиться у стані  $n = \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$  через

$$P(n, t) = P\{n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, \dots, n_M(t) = n_M, t\}.$$

Позначимо через  $S(N, M)$  множину  $M$ -вимірних векторів з невід'ємними цілочисловими координатами, кількість станів якої дорівнює  $C_{N+M-1}^{M-1}$

$$S(N, M) = \left\{ n; n_i \geq 0, \sum_{i=1}^M n_i = N \right\},$$

де  $N$  – загальна кількість вимог у системі (пакетів, повідомлень);

$M$  – кількість центрів обслуговування (СМО) замкненої мережі МО;

$n_k$  – кількість вимог у  $k$ -му центрі

Оскільки тривалості обслуговування в центрах мережі розподілені за експоненціальним законом, то випадковий процес  $N(t)$ , визначений на просторі станів  $S(N, M)$ , є марківським. За методикою, наданою в п. 4.2, запишемо для даного випадкового процесу систему диференціальних рівнянь Коломогорова: розглядаємо можливі переходи цього процесу за проміжок часу  $dt$  при  $dt \rightarrow 0$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dP(n, t)}{dt} = & - \left( \sum_{k=1}^M \gamma(n_k) \alpha(n_k) \mu_k \right) P(n, t) + \\ & + \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M \gamma(n_k) \alpha_i(n_i + 1) \mu_i P_{ik} P(n - 1_k + 1_i), \end{aligned} \quad (8.5)$$

де  $1_i$  – вектор,  $i$ -та координата якого 1, решта – 0;

$\alpha(n_k)$  – кількість вимог на обслуговуванні у  $k$ -му центрі при загальній кількості вимог у ньому  $n_k$ ;

$\mu_k$  – інтенсивність потоку звільнень  $k$ -го центру обслуговування;

$$\gamma(n_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } n_k = 0 \quad (\text{для вільного центру}) \\ 1 & \text{при } n_k \neq 0 \quad (\text{для зайнятого центру}) \end{cases}$$

Оскільки у замкненій мережі стаціонарний режим завжди існує (див. п.4.3), можна прирівняти похідні лівої частини (8.5) до нуля та перейти до системи алгебраїчних рівнянь для граничних ймовірностей стаціонарного розподілу марківського процесу  $N(t)$ :

$$P(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(n, t),$$

яку з урахуванням  $\gamma(n_k) \alpha(n_k) = \alpha(n_k)$  можна представити у вигляді системи лінійних різницевих рівнянь

$$\sum_{k=1}^M \alpha_k(n_k) \mu_k P(n) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M \gamma(n_k) \alpha_i(n_i + 1) \mu_i P_{ik} P(n - 1_k - 1_i), n \in S(N, M). \quad (8.6)$$

Ліва частина (8.6) – це швидкість переходів зі стану  $n$ , а права – швидкість переходів в цей стан. Це рівняння і називають рівнянням, глобального балансу.

### 8.2.2 Вид рішення в мультиплікативній формі

Для рішення (8.6) введемо функцію

$$\beta_k(n_k) = \begin{cases} n_k!, & n_k \leq A_k, \\ A_k! A_k^{n_k - A_k}, & n_k > A_k, \end{cases}$$

яка може бути представлена також рекурсивно

$$\begin{aligned} \beta_k(0) &= 1, \\ \beta_k(n_k) &= \alpha_k(n_k) \beta_k(n_k - 1), n_k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (8.7)$$



та здійснимо заміну перемінних в (8.6);

$$P(n) = \prod_{i=1}^M \beta_i^{-1}(n_i) Q(n) \quad (8.8)$$

Після підстановки (8.8) в (8.6) отримаємо нову систему рівнянь відносно  $Q(n)$ :

$$\sum_{k=1}^M \alpha_k(n_k) \mu_k Q(n) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M \alpha_k(n_k) \mu_i P_{ik} Q(n - 1_k + 1_i). \quad (8.9)$$

Якщо представити  $Q(n)$  у вигляді функції  $M$  невідомих параметрів  $x_i$ :

$$Q(n) = \prod_{i=1}^M x_i \text{ const} \quad (8.10)$$

та підставити (8.10) у (8.9), то (8.9) набуде наступного простого вигляду:

$$\sum_{k=1}^M \alpha_k(n_k) \left\{ \mu_k - \sum_{i=1}^M \mu_i P_{ik} Q(x_i/x_k) \right\} = 0. \quad (8.11)$$

З метою подальшого спрощення (8.11) припустимо, що всі  $N$  вимог знаходяться в  $j$ -му центрі ( $j = \overline{1, M}$ ) і, відповідно, в решті СМО вимоги відсутні. Враховуючи, що функція  $\alpha_k(n_k)$  в цьому випадку дорівнює нулю для всіх  $k \neq j$ , отримаємо:

$$\mu_k x_k = \sum_{i=1}^M (\mu_i x_i) P_{ik} \quad (8.12)$$

або, позначив  $e_i = \mu_i x_i$ ,

$$e_k = \sum_{i=1}^M e_i P_{ik}, k = \overline{1, M}$$

Отже, невідомі параметри  $x_k$  визначаються з системи лінійних рівнянь (8.4), рішення якої в силу припущень про вигляд маршрутної матриці  $P$  єдине з точністю до мультиплікативної константи  $\varepsilon$ .

Таким чином, отримано стаціонарний розподіл імовірностей станів замкненої однорідної експоненціальної мережі МО:

$$P(n) = \prod_{i=1}^M [x_i^{n_i} / \beta_i(n_i)] G_M^{-1}(N) \quad (8.13)$$

Константа  $G_M(N)$  визначається з умови нормування:

$$1 = \sum_{n \in S(N, M)} P(n) = G_M^{-1}(N) \sum_{n \in S(N, M)} \prod_{i=1}^M [x_i^{n_i} / \beta_i(n_i)] \quad (8.14)$$

де сума здійснюється по усіх можливих станах вектора  $n \in S(N, M)$ .

З (8.14) випливає, що

$$G_M(N) = \sum_{n \in S(N, M)} \prod_{i=1}^M [x_i^{n_i} / \beta_i(n_i)] \quad (8.15)$$

Підставляючи (8.15) в (8.13) та враховуючи, що  $x_i = e_i / \mu_i$ , отримуємо

$$P(n) = \frac{\prod_{i=1}^M e_i^{n_i} / [\mu_i^{n_i} \beta_i(n_i)]}{\sum_{n \in S(N, M)} \prod_{i=1}^M e_i^{n_i} / [\mu_i^{n_i} \beta_i(n_i)]} \quad (8.16)$$

Формули (8.15) і (8.16) дозволяють визначати різні ймовірнісні характеристики розглянутої мережі МО. Наприклад імовірність того, що кількість вимог в  $i$ -му одноканальному центрі (маршрутизаторі) більше або дорівнює  $n$ , має вид:

$$P(n_i \geq n, N) = \sum_{\substack{n \in S(N, M) \\ n_i \geq n}} P(n) = \frac{1}{G_M(N)} \sum_{\substack{n \in S(N, M) \\ n_i \geq n}} \prod_{j=1}^M x_j^{n_j}.$$

Звідки

$$P(n_i \geq n, N) = \frac{x_i^n}{G_M(N)} \sum_{n \in S(N-n, M)} \prod_{j=1}^M x_j^{n_j} = \frac{x_i^n G_M(N-n)}{G_M(N)}. \quad (8.17)$$

З (8.17) з урахуванням  $P_i(n, N) = P(n_i \geq n, N) - P(n_i \geq n + 1, N)$  легко визначається маргінальний розподіл числа вимог у  $i$ -му центрі:

$$P_i(n, N) = x_i^n [G_M(N - n) - x_i G_M(N - n - 1)] / G_M(N) \quad (8.18)$$

Формули (8.13), (8.18) і (8.16) справедливі відповідно для мереж, що не залежать від навантаження, і мереж, в яких залежність інтенсивності обслуговування центра від числа вимог в ньому визначається функцією (8.1).

### 8.2.3 Мережі, що залежать від навантаження

Більш загальним класом відкритих і замкнених мереж МО є мережі, що залежать від навантаження. Для них інтенсивність вхідного потоку і потоку звільнень є довільними функціями відповідно загального числа вимог у мережі та кількості вимог у центрі обслуговування. Для дослідження таких мереж використовують рівняння локального балансу.

Стационарні імовірності станів замкненої однорідної експоненціальної мережі, що залежить від навантаження, задовольняють наступну систему лінійних різницевих рівнянь:

$$\sum_{k=1}^M \mu_k(n_k) P(n) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M P_{ik} \mu_i(n_i + 1 - \delta_{ik}) P(n + 1_i - 1_k), \quad (8.19)$$

яка отримана аналогічно системі (8.6). Тут  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера ( $\delta_{ik} = 1$  при  $i = k$  і  $\delta_{ik} = 0$  в протилежному випадку). Підставляючи в (8.19) рівняння (8.4) у вигляді

$$\sum_{i=1}^M P_{ik} e_i / e_k = 1 \quad (k = \overline{1, M}),$$

отримуємо

$$\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M P_{ik} \{ \mu_i(n_i + 1 - \delta_{ik}) P(n + 1_i - 1_k) - \mu(n_k) P(n) e_i / e_k \} = 0, \quad n \in S(N, M) \quad (8.20)$$

Звичайно, рівняння глобального балансу (8.20) виконується, якщо вираз у фігурних дужках дорівнює нулю:

$$\mu_i(n_i + 1 + 1\delta_{ik})P(n + 1_i - 1_k) - \mu_k(n_k)P(n)e_i/e_k = 0, \quad n \in S(N, M) \quad (8.21)$$

Таким чином, формула (8.21), яку називають рівнянням локального балансу, є достатньою (але не необхідною) умовою глобального балансу (8.20). З рекурентного рівняння (8.21) безпосередньо випливає, що стаціонарні ймовірності  $P(n)$  розраховуються:

$$P(n) = \prod_{i=1}^M Z_i(n_i) / G_M(N) \quad (8.22)$$

де введено позначення

$$Z_i(n_i) = Z_i(n_i) / e_i^{n_i} \prod_{j=1}^{n_i} \mu_i(j),$$

а константа  $G_M(N)$  визначається з умови нормування  $\sum_{n \in S(N, M)} P(n) = 1$  і

дорівнює

$$G_M(N) = \sum_{n \in S(N, M)} \prod_{i=1}^M Z_i(n_i) \quad (8.23)$$

Таким чином, знову отримано рішення в мультиплікативній формі. При цьому, якщо функція  $\mu_i(n_i)$  визначається згідно з (8.1), то (8.22) приймає вид (8.16).

Для відкритої мережі МО з інтенсивністю вхідного потоку  $\Lambda(N)$  стаціонарні ймовірності  $P(n)$ , що визначені так же, як і для формул (8.6), (8.19), мають вид:

$$P(n) = \frac{\Lambda_*(N)}{G(N)} \prod_{i=1}^M Z_i(n_i), \quad (8.24)$$

де

$$\Lambda_*(N) = \prod_{k=1}^N \Lambda(k-1)$$

Відносні інтенсивності потоків  $e_i$ , що входять до  $Z_i(n_i)$ , задовольняють систему лінійних рівнянь (8.3):

$$e_i = P_{0i} + \sum_{j=1}^M e_j P_{ij}.$$

Стаціонарний розподіл  $P(n)$  існує та є єдиним, якщо сходиться ряд

$$G(n) = \sum_{n \in S(N, M)} \Lambda_*(N) \prod_{i=1}^M Z_i(n_i).$$

Зокрема, коли інтенсивність вхідного потоку не залежить від числа вимог в мережі і дорівнює  $\Lambda$ , маємо:

$$\Lambda_*(N) = \prod_{i=1}^M \Lambda^{n_i}.$$

В цьому випадку (8.24) приймає вигляд

$$P(n) = \prod_{i=1}^M P_i(n_i). \quad (8.25)$$

Тут  $P_i(n_i)$  – стаціонарна ймовірність того, що в  $i$ -му центрі, що розглядається ізольовано, знаходиться  $n_i$  вимог:  $P_i(0) \Lambda^{n_i} Z_i(n_i)$ .

Вираз (8.25), відомий під назвою теореми Джексона, свідчить, що розглянута мережа є сукупністю незалежних центрів обслуговування з пуасонівськими вхідними потоками з параметрами  $\Lambda^{n_i}$  та інтенсивностями обслуговування  $\mu_i(n_i)$ , що залежать від довжини черги.

Отже для відкритих і замкнених експоненціальних мереж МО рішення має мультиплікативну форму, що дозволяє здійснити декомпозицію мережі на ізольовані центри та використовувати для кожного з таких центрів математичний апарат, розглянутий у попередніх розділах.

### 8.2.4 Показники якості обслуговування однорідних мереж

Одна з характеристик якості – розподіл стаціонарних ймовірностей  $P(n)$  – була тільки що отримана у вигляді (8.24), (8.25). Також важливо знати маргінальний розподіл числа вимог у  $M$ -му (граничному) центрі.

Аналогічно (8.18) можна записати:

$$\begin{aligned} P_M(n, N) &= \sum_{n \in S(N, M), n_M = n} \prod_{i=1}^M Z_i(n_i) / G_M(N) = \\ &= Z_M(n) \sum_{n \in S(N-n, M-1)} \prod_{i=1}^M Z_i(n_i) / G_M(N), \quad n = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

С урахуванням (8.23) маємо:

$$P_M(n, N) = Z_M(n) G_{M-1}(N-n) / G_M(N) \quad (8.26)$$

Такий розподіл можна отримати для будь-якого центру  $i \neq M$  шляхом перенумерації центрів так, щоби потрібний центр став граничним.

Інтенсивність вихідного потоку вимог з  $i$ -го центру  $\lambda_i(N)$  дорівнює середньому числу вимог, що він обслуговує за одиницю часу. Отже,

$$\lambda_i(N) = \sum_{n=1}^N P_i(n, N) \mu_i(n). \quad (8.27)$$

З визначення  $Z_i(n)$  випливає

$$Z_i(n) \mu_i(n) = Z_i(n-1) e_i \quad (8.28)$$

Підставляючи (8.28) і (8.26) в (8.27), отримаємо для  $i = \overline{1, M}$

$$\lambda_i(N) = e_i \sum_{n=1}^N Z_i(n-1) G_{i-1}(N-n) / G_i(N) = e_i G_i(N-1) / G_i(N). \quad (8.29)$$

Для випадку, коли інтенсивність обслуговування в  $i$ -му центрі визначається (8.1),  $\lambda_i(N)$  можна визначити через середню кількість зайнятих каналів у  $i$ -му центрі  $u_i(N)$

$$\lambda_i(N) = \sum_{n=1}^N \mu_i(n) P_i(n, N) = \mu_i u_i(N), \quad i = \overline{1, M}, \quad (8.30)$$

де  $u_i(N)$  задовольняє умові:

$$u_i(N)/u_j(N) = e_i \mu_i^{-1} / (e_j \mu_j^{-1}) \quad (8.31)$$

Вираз (8.31) дозволяє визначити характеристики зайнятості і пропускної здатності для всіх центрів, якщо розраховані або виміряні характеристики одного вузла.

З (8.30) і (8.31) встановлюється рівність нормалізованих пропускних здатностей для кожного центру

$$\lambda_i(N)/e_i = \lambda_j(N)/e_j. \quad (8.32)$$

Зі співвідношення  $u_i(N) \leq u_i(N+1)$  ( $N = 0, 1, \dots$ ) випливає, що при  $N \rightarrow \infty$  один з центрів, наприклад  $j$ -й, виявиться насиченим, так що  $u_j(\infty) = A_j$ . Тоді пропускна здатність цього центру при  $N \rightarrow \infty$  буде  $\lambda_j(\infty)$  і значення  $u_i(\infty)$ ,  $\lambda_i(\infty)$  для решти центрів мережі можна визначити з (8.32). Цей підхід часто використовується при дослідженні деяких асимптотичних властивостей замкнених мереж масового обслуговування.

Математичне очікування числа вимог у  $M$ -у центрі з урахуванням (8.26):

$$L_M(N) = \sum_{n=1}^N n P_M(n, N) = \frac{1}{G_M(N)} \sum_{n=1}^N n Z_M(n) G_{M-1}(N-n). \quad (8.33)$$

Для вузла, що не залежить від навантаження, вираз для середньої довжини черги спрощується:

$$L_i(N) = \sum_{n=1}^N x_i^n G_M(N-n) / G_M(N), \quad i = \overline{1, M}. \quad (8.34)$$

Відповідно до формули Літла середній час перебування вимоги в  $i$ -му центрі  $T_i(N)$  дорівнює відношенню середньої довжини черги до середньої

інтенсивності вхідного потоку. В стаціонарному режимі інтенсивність вихідного потоку дорівнює інтенсивності вхідного, тому

$$T_i(N) = L_i(N)/\lambda_i(N), \quad i = \overline{1, M}. \quad (8.35)$$

Особливий інтерес для додатків складає час циклу  $V_i(N)$  – середній інтервал часу між моментом виходу вимоги з  $i$ -го центру до моменту повернення в цей центр ( $i = \overline{1, M}$ ). Якщо  $e_i = 1$ , то величину  $e_j$  можна вважати середнім числом відвідувань  $j$ -го центру між двома послідовними приходами до  $i$ -го центру. Отже, сумарний середній час, що вимога провела в  $j$ -му центрі за час циклу, складає  $e_j T_j(N)$ . Звідки

$$V_i(N) = \sum_{j=1}^M e_j T_j(N). \quad (8.36)$$

Підставляючи в (8.36) вираз (8.35) і враховуючи (8.32), отримуємо

$$V_i(N) = [N - L_i(N)]/\lambda_i(N).$$

Таким чином, час циклу  $V_i(N)$  однозначно визначається середньою довжиною черги і продуктивністю  $i$ -го центру.

### 8.3 Мережі масового обслуговування з різними класами вимог

Однорідні експоненціальні мережі МО мають низку обмежень, що суттєво звужують їх практичне застосування. До цих обмежень відносяться, зокрема, обмеження на дисципліну обслуговування черги FIFO, а також припущення про пуасонівський характер потоків, експоненціальний розподіл тривалості обслуговування в кожному центрі та статистичну однорідність вимог у мережі [10].

Розглянемо змішані мережі МО з декількома класами вимог та широким набором дисциплін обслуговування в центрах, тобто – мережі, вільні від зазначених обмежень.



### 8.3.1 Опис змішаної мережі

Змішана мережа МО складається з кінцевого числа  $M$  центрів обслуговування, між якими відповідно до маршрутної матриці  $P$  циркулює  $R$  різних класів вимог. При переході з одного центра в інший вимоги можуть змінювати клас, так що вимога  $r$ -го класу може стати вимогою  $s$ -го класу ( $1 \leq r, s \leq R$ ). Такі мережі МО дозволяють точніше відображати процеси інформаційного обміну у сучасних мультисервісних мережах, де циркулюють пакети різних протоколів.

Маршрут у змішаній мережі з декількома класами задається [9] матрицею  $P = \|P_{ir,ks}\|$ , де  $P_{ir,ks}$  – імовірність того, що вимога  $r$ -го класу, що закінчила обслуговування в  $i$ -му центрі, перейде у  $k$ -й центр і стане вимогою  $s$ -го класу.

На парах  $(i, r)$  визначається харківський ланцюг з матрицею переходів  $P$ , яку можна розкласти на  $L$  ергодичних підланцюгів, що не перетинаються. Множина станів для кожного такого підланцюга  $E_1, E_2, \dots, E_L$ .

Нехай  $n_{ir}$  – число вимог  $r$ -го класу в  $i$ -му центрі у стані мережі  $n$ ;  $N_j = M(n, E_j)$  і  $N = M(n)$  – відповідно число вимог у підланцюгу  $E_j$  і в мережі у стані  $n$ . Тоді мають виконуватися співвідношення

$$M(n, E_j) = \sum_{(ir) \in E_j} n_{ir}, \quad j = \overline{1, L}, \quad \text{Ц} \quad M(n) = \sum_{j=1}^L M(n, E_j),$$

причому, якщо  $N_j = M(n, E_j) = \text{const}$  при  $j = \overline{1, L}$ , розглянута мережа є замкненою.

Вхідний потік, що надходить у відкриту мережу із зовнішнього джерела, можна задати різними способами. В першому з джерела надходить один пуасонівський потік, інтенсивність якого  $\Lambda(M(n))$  є функцією загального числа вимог у мережі в стані  $n$ . Вхідна вимога надходить в  $i$ -й центр і стає вимогою класу  $r$  з імовірністю  $P_{0,ir}$ , що не залежить від стану

мережі. В другому випадку вхідний потік можна представити як сукупність  $L$  пуасонівських потоків, що надходять у відповідні підланцюги. Інтенсивність  $j$ -го потоку  $\Lambda_j(M(n, E_j))$  є функцією числа вимог у  $j$ -му підланцюзі  $j = \overline{1, L}$ . Згенерована джерелом вимога  $j$ -го потоку з імовірністю  $P_{j,ir}$  надходить в  $i$ -й центр і стає вимогою класу  $r$ , якщо  $(i, r) \in E_j$  і  $\sum_{(i,r) \in E_j} P_{j,ir} = 1$ . У відкритій мережі МО вимога класу  $r$ , що закінчила обслуговування в  $i$ -му центрі залишає мережу з імовірністю

$$P_{ir,j} = 1 - \sum_{(ks) \in E_j} P_{ir,ks}, \quad i, k = \overline{1, M}; \quad r, s = \overline{1, R}.$$

Для довільного підланцюга аналогічно (8.3) справедлива наступна система рівнянь:

$$\sum_{(ir) \in E_j} e_{ir} P_{ir,ks} + P_{j,ks} = e_{ks}, \quad (ks) \in E_j; \quad j = 1, 2, \dots, L,$$

де  $e_{ir}$  - відносна інтенсивність потоку вимог класу  $r$ , що проходить через центр  $i$ . Якщо  $P_{j,ks} = 0$  для усіх  $(ks) \in E_j$ , то мережа замкнена відносно підланцюга  $E_j$ . Тоді  $e_{ir}$  визначаються з точністю до мультиплікативної константи (8.4). Якщо  $P_{j,ks} \neq 0$  хоча б для однієї пари  $(ks) \in E_j$ , то  $e_{ir}$  визначаються однозначно.

Для завершення опису змішаної мережі МО задамо дисципліну і механізм обслуговування в центрах мережі. Вважаємо, що мережа складається з центрів наступних чотирьох типів.

1. Обслуговування повідомлень в центрі здійснюється відповідно дисципліні FIFO. Тривалість обслуговування вимог усіх класів має один і той же експоненціальний розподіл з інтенсивністю  $\mu_i(n_i)$  ( $i$  - номер центру в мережі,  $i = \overline{1, M}$ ), що залежить від числа вимог у центрі  $n_i$ . Стан  $n_i$  центру визначається вектором  $n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{in_i}$ , де  $n_{ij}$  - номер класу вимоги, що стоїть  $j$ -ю в черзі,  $j = \overline{1, n_i}$ ,  $n_{ij} = \overline{1, R}$ .

2. Обслуговування вимог в одноканальній СМО здійснюється відповідно дисципліні PS (розподіл процесору). Тривалість обслуговування вимоги класу  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, R$ ) розподілена за законом Кокса з параметрами  $a_{irl}, b_{irl}, \mu_{irl}, L_{irl}$   $l = \overline{1, L_{ir}}$  і середнім  $\sum_{i=1}^{L_{ir}} \left( \frac{A_{irl}}{\mu_{irl}} \right)$ , де  $A_{irl}$  - імовірність того, що вимога класу  $r$  досягне  $l$ -ої стадії обслуговування в  $i$ -му центрі. Стан центру визначається вектором  $n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{ir}$ , де кожна компонента  $n_{ir}$  - вектор  $n_{ir_1}, n_{ir_2}, \dots, n_{irL_{ir}}$ ,  $l$ -та координата якого  $n_{irl}$  означає число вимог класу  $r$  в  $i$ -му центрі, що знаходяться на  $l$ -тому етапі (стадії) обслуговування. Число вимог класу  $r$  в  $i$ -му центрі  $n_i = n_{i1} + n_{i2} + \dots + n_{iR}$ . Таким чином, швидкість завершення обслуговування вимоги  $r$ -го класу, що знаходиться на  $l$ -тому етапі у стані  $n_i$  центру, дорівнює  $n_{irl}/n_i$ . Після завершення обслуговування вимога залишає центр з імовірністю  $b_{irl}$  та переходить на наступну стадію з імовірністю  $a_{irl}$ .
3. Багатоканальна система з числом каналів, що дорівнює або перевищує максимальну кількість вимог у цьому центрі, що дозволяє організувати обслуговування без втрат(LL) або обслуговування без очікування (IS). Стан центру та розподіл тривалості обслуговування, що має раціональне перетворення Лапласа, описується аналогічно центру другого типу.
4. Одноканальний центр зі стековою чергою (LCFS). Подібно вузлам другого і третього типів розподіл тривалості обслуговування має раціональне перетворення Лапласа і може відрізнятися для вимог різних класів. Стан центру  $n_i$  визначається вектором  $r_1 l_1, r_2 l_2, \dots, r_{n_i} l_{n_i}$ , де  $n_i$  - число вимог в  $i$ -му центрі,  $r_j l_j$  - пара, що характеризує повідомлення під номером  $j$  в черзі;  $r_j$  - номер класу вимоги,  $l_j$  - номер етапу обслуговування.

### 8.3.2 Теорема ВСМР

Згідно зроблених припущень та визначень процес, що описує функціонування змішаної мережі МО, є марківським. Стан мережі можна представити у вигляді вектора  $n = n_1, n_2, \dots, n_M$ , де  $n_i$  характеризує стан  $i$ -го центру та залежить від вищеописаного типу центру.

Рівняння глобального балансу для стаціонарного розподілу ймовірностей  $P(n)$  по аналогії з (8.19) можна записати

$$\lambda(n)P(n) = \sum_{n'} \lambda(n', n)P(n') \quad (8.37)$$

для будь-якого стану  $n, n'$ , де  $\lambda(n)$  - інтенсивність виходу мережі зі стану  $n$ ;  $\lambda(n', n)$  - інтенсивність переходу мережі зі стану  $n'$  у стан  $n$ . Безпосереднє вирішення (8.37) являє собою досить складну задачу, тому звичайно переходять до рівнянь локального балансу, як було показано в 1.2.

Для змішаної мережі рівняння локального балансу записуються шляхом при рівняння інтенсивності входу мережі у стан, в якому вимога починає обслуговуватися з певного етапу, до інтенсивності виходу мережі зі стану, в якому вимога закінчує цей етап обслуговування.

Використання такого підходу дозволяє сформулювати наступну теорему ВСМР [35]: для змішаної мережі МО, кожний центр якої відноситься до одного з вище зазначених чотирьох типів, стаціонарний розподіл ймовірностей станів існує у мультиплікативному вигляді

$$P(n') = G^{-1} \Lambda * (n') \prod_{i=1}^M f_i(n_i'), \quad (8.38)$$

де

$$f_i(n_i) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\mu_i}\right)^{n_i} \prod_{j=1}^{n_i} e_j \cdot n_{ij}, & \text{якщо } i\text{-й центр першого типу,} \\ n_i! \prod_{r=1}^R \prod_{l=1}^{L_{ir}} \left\{ \left[ \frac{e_{ir} A_{irl}}{\mu_{irl}} \right]^{n_{irl}} / n_{irl} \right\}, & \text{якщо } i\text{-й центр другого типу,} \\ \prod_{r=1}^R \prod_{l=1}^{L_{ir}} \left\{ \left[ \frac{e_{ir} A_{irl}}{\mu_{irl}} \right]^{n_{irl}} / n_{irl} \right\}, & \text{якщо } i\text{-й центр третього типу,} \\ \prod_{j=1}^{n_i} [e_{ir_j} A_{ir_j l_j}], & \text{якщо } i\text{-й центр четвертого типу;} \end{cases}$$

$$\Lambda^*(n') = \begin{cases} \prod_{i=0}^{M(n')-1} \Lambda(i), & \text{якщо вхідний потік першого типу,} \\ \prod_{j=1}^L \prod_{i=0}^{M(n', E_j)-1} \Lambda_j(i), & \text{якщо вхідний потік другого типу,} \\ 1, & \text{якщо мережа замкнена.} \end{cases}$$

Стационарний розподіл існує у випадку сходимості ряду

$$G = \sum_n \Lambda^*(n') \prod_{i=1}^M f_i(n_i') < \infty,$$

де  $G$  – константа нормалізації.

В практичних задачах не завжди потрібний детальний опис стану вузлів, враховуючий етап обслуговування і порядок розташування вимог у вузлі. Важливіше знати агреговані стани вузлів  $n_i = (n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iR})$  і відповідні стани мережі  $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ . Імовірності стаціонарного агрегованого стану мережі  $P(n)$  можна отримати підсумовуванням  $P(n')$  по усіх станах  $n'$ . Оскільки  $P(n')$  – мультиплікативні, це можна здійснити шляхом складання множників  $f_i(n_i')$  по усіх станах вузлів  $n'$  при фіксованих  $(n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iR})$ . Якщо позначити отримані множники через  $Z_i(n_i)$ , то вираз для  $P(n)$  прийме вид

$$P(n) = G^{-1} \Lambda^*(n) \prod_{i=1}^M Z_i(n_i),$$

де  $G$  та  $\Lambda^*(n)$  визначаються аналогічно (8.31), а  $Z_i(n_i)$  залежить від типу вузла та має наступний вигляд:

для вузла першого типу

$$Z_i(n_i) = \frac{n_i!}{\mu_i^{n_i}} \prod_{r=1}^R \left( \frac{e_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}} \right), \quad n_i = \sum_{r=1}^R n_{ir};$$

для вузла другого або четвертого типу

$$Z_i(n_i) = n_i! \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} \left( \frac{e_{ir}}{\mu_{ir}} \right)^{n_{ir}};$$

для вузла третього типу

$$Z_i(n_i) = \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} \left( \frac{e_{ir}}{\mu_{ir}} \right)^{n_{ir}}.$$

Таким чином, стаціонарний розподіл агрегованого стану мережі  $P(n)$  має мультиплікативний вигляд і не залежить від функції розподілу тривалості обслуговування в центрах, а тільки від середніх значень.

### 8.3.3 Відкриті мережі МО з декількома класами вимог

У відкритих мережах інтенсивність вхідного потоку вимог від джерела не залежить від стану мережі. Якщо не враховувати класи вимог, то стан  $i$ -го центру характеризується тільки числом вимог в ньому  $n_i$ , а стан мережі – вектором  $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ . Тоді можна спростити вираз для  $P(n)$  наступним чином:

$$P(n) = G^{-1} \Lambda^*(n) \prod_{i=1}^M P_i(n_i),$$

де

$$P_i(n_i) = \begin{cases} \left( \sum_{r \in R(i)} e_{ir} \right)^{n_i} / \mu_i^{n_i} & \text{для центрів першого типу} \\ \left( \sum_{r \in R(i)} e_{ir} \right)^{n_i} & \text{для центрів другого або четвертого типу,} \\ \left( \sum_{r \in R(i)} e_{ir} / \mu_{ir} \right)^{n_i} / n_i! & \text{для центрів третього типу;} \end{cases}$$

$R(i)$  – множина номерів класів, вимоги яких можуть обслуговуватися в  $i$ -му центрі.

Для урахування класів вимог запишемо інтенсивність потоку вимог  $r$ -го класу як  $\lambda_{ir} = \Lambda e_{ir}$ , де  $\Lambda$  – інтенсивність обслуговування вимоги в центрі (вважаємо її незалежною від числа вимог у центрі), а  $e_{ir}$  ( $i = \overline{1, M}$ ,  $r = \overline{1, R}$ ) – рішення системи для відшукування відносних інтенсивностей потоків.

Введемо позначення

$$\rho_i = \begin{cases} \sum_{r \in R(i)} \Lambda e_{ir} / \mu_i & \text{якщо } i\text{-й центр } 1\text{-го типу} \\ \sum_{r \in R(i)} \Lambda e_{ir} / \mu_{iR} & \text{якщо } i\text{-й центр } 2\text{-го, } 3\text{-го або } 4\text{-го типу} \end{cases}$$

Тоді вираз для стаціонарного розподілу станів мережі прийме вид:

$$P(n) = P_1(n_1)P_2(n_2)\dots P_M(n_M)$$

Причому

$$P_i(n_i) = \begin{cases} (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} & \text{якщо } i\text{-й центр першого, другого або четвертого типу} \\ e^{\rho_i} \rho_i^{n_i} / n_i! & \text{якщо } i\text{-й центр третього типу} \end{cases}$$

Тобто, маргінальний стаціонарний розподіл числа повідомлень в  $i$ -му центрі першого, другого або четвертого типу таке ж, як і для системи М/М/1/В і так же потрібно виконання умови  $\rho_i < 1$ . У центрах третього типу цей розподіл аналогічний системі М/Г/в/LL при  $\rho_i = \lambda / \mu$ .

Якщо інтенсивність вхідних потоків залежить від стану мережі МО, теорема ВСМР розширюється за рахунок введення додаткових наборів

функцій:  $C_l[U(n)]$  і  $T_l[U(n)]$ , які приймають значення 1 або 0 для множини векторів агрегованих станів мережі

$$U(n) = \{U_1(n), \dots, U_L(n)\}, U_l(n) = \sum_{(ir)} n_{ir}, l = \overline{1, L}.$$

Вхідна вимога  $l$ -го підланцюга приймається на обслуговування, якщо функція втрат  $C_l[U(n)] = 1$ , і втрачається, якщо  $C_l[U(n)] = 0$ . Тригерна функція  $T_l[U(n)] = 0$ , якщо в момент уходу з мережі вимоги  $l$ -го підланцюга нова вимога миттєво вводиться в мережу, інакше  $T_l[U(n)] = 1$ .

Введемо позначення:

$$y = \{y_1, \dots, y_L\}, y_l \geq 0;$$

$$\varphi(V) = \bigcup_{y \in V} \varphi(y) = \{n \in D : U(n) = y\},$$

де  $D$  і  $V$  – відповідно, допустимі множини векторів  $n$  і  $U(n)$ . Тоді можна сформулювати наступну теорему: нехай функції втрат  $C_l[U(n)]$  і тригерні функції  $T_l[U(n)]$  задовольняють умові  $T_l(y) = 1 \Leftrightarrow C_l(y - 1_l) = 1$ ,  $l = \overline{1, L}$  для усіх пар  $y$  і  $y - 1_l$  з  $V$ . Тоді стаціонарний розподіл ймовірностей станів мережі МО має мультиплікативну форму:

$$P(n) = G^{-1} \Lambda * (n) \prod_{i=1}^M Z_i(n_i),$$

де

$$G = \sum_{y \in V} \sum_{n \in \varphi(y)} P(n) - \text{константа нормалізації.}$$

Саме така модель адекватно описує процес функціонування вузлів комутації в мережі передачі даних.

#### 8.4 Ітераційний метод аналізу середніх значень

Приведені вище рівняння глобального та локального балансу станів мережі МО дозволяють знаходити характеристики якості роботи мережі як



функції константи нормалізації, однак при зростанні числа вузлів  $i$ , відповідно, станів мережі ця задача стає занадто складною. Уникнуть цих труднощів дозволяє ітераційний метод аналізу середніх значень, що не вимагає попереднього обчислення константи нормалізації для визначення середньої довжини черги і часу очікування, продуктивності мережі та завантаженості центрів обслуговування.

Позначимо  $D(N)$  однорідну експоненціальну незалежну від навантаження мережу МО, що складається з  $N$  вузлів  $M/M/v/W/FF$ . Середній час очікування  $T_i(N)$  вимоги в  $i$ -му центрі складається з середньої тривалості обслуговування нової вимоги  $\tau_i$  і середньої тривалості обслуговування усіх вимог  $\tau_i v_i(N)$ , де  $v_i(N)$  – середня кількість вимог у  $i$ -му центрі в момент надходження нової вимоги. Таким чином

$$T_i(N) = \tau_i(1 + v_i(N)), \quad i = \overline{1, M} \quad (8.38)$$

Доказано [34], що стаціонарні ймовірності станів розглянутої мережі для  $N$  вузлів в момент надходження вимог до  $i$ -го центру співпадають зі стаціонарними ймовірностями станів мережі  $D(N-1)$  для  $(N-1)$  вузлів в довільний момент часу. Отже,  $v_i(N) = L_i(N-1)$ , де  $L_i(N-1)$  – середня кількість вимог у  $i$ -му центрі мережі  $D(N-1)$ , і (8.38) набуває виду

$$T_i(N) = \tau_i(1 + L_i(N-1)), \quad i = \overline{1, M}. \quad (8.39)$$

Якщо примінити формулу Літла до  $i$ -го центру, отримаємо співвідношення

$$L_i(N) = \lambda_i(N)T_i(N), \quad i = \overline{1, M}. \quad (8.40)$$

де  $\lambda_i(N)$  – інтенсивність потоку вимог, що надходять у  $i$ -й центр. Як було показано в п.1.1, для довільного виділеного центру мережі  $i^*$  можна записати:

$$\lambda_j(N) = e_j \lambda_{i^*}, \quad i = \overline{1, M}.$$

де  $e_j$  однозначно визначається рівняннями

$$e_j = \sum_{k=1}^M e_k P_{kj}, e_{i^*} = 1, j = \overline{1, M}.$$

Отже

$$L_i(N) = \lambda^*(N) e_i T_i(N), \quad (8.41)$$

де продуктивність виділеного центру  $\lambda_{i^*}(N) \equiv \lambda^*(N)$  з урахуванням формули Літла і виразу (8.36) для середнього часу циклу може бути записана:

$$\lambda^*(N) = N / \sum_{i=1}^M e_i T_i(N) \quad (8.42)$$

Таким чином, система рівнянь (8.40), (8.41), (8.42) з урахуванням початкових умов  $L_i = 0$  ( $i = \overline{1, M}$ ) дозволяє рекурентно по  $N$  розраховувати середні характеристики однорідної мережі МО, для якої інтенсивність обслуговування в центрах не залежить від вхідного навантаження.

За цим методом можна визначити також і маргінальний розподіл довжини черги в  $i$ -му центрі мережі:

$$P_i(n, N) = \tau_i \lambda_i(N) P_i(n-1, N-1), n \geq 1, \\ P_i(0, 0) = 0.$$

## 8.5 Задача синтезу замкнутих однорідних мереж МО

Для мережі масового обслуговування, як і для окремої системи МО, можна розглядати задачу структурного і параметричного синтезу. Структурний синтез передбачає визначення кількості і типу центрів обслуговування, які найкращим (згідно деякого критерію) чином забезпечать обслуговування заданого вхідного потоку вимог. Задача параметричного синтезу мережі МО вирішується для заданої структури мережі, кількості центрів обслуговування  $M$  та полягає в знаходженні її параметрів, основним з

яких є інтенсивність потоку звільнень  $i$ -го центру обслуговування  $\mu_i, i = \overline{1, M}$ . Слід зазначити, що теоретичні методи, які б досить повно описували рішення задач структурного синтезу мереж МО, ще не сформовані, тоді як параметричний синтез однорідних замкнених мереж МО вже досліджений і описаний в літературних джерелах [10, 12, 19].

В якості критерію оптимізації може бути вибрана вартість  $S$  або продуктивність  $\lambda$  мережі. В першому випадку задача оптимізації полягає в мінімізації вартості мережі як функції вектора  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_M)$  при продуктивності, не нижче заданої:  $S(\mu) \rightarrow \min, \lambda(\mu) \leq \lambda_{зад}$ . В другому – в максимізації продуктивності мережі при обмеженні на її вартість:  $\lambda(\mu) \rightarrow \max, S(\mu) \leq S_{зад}$ .

Залежність вартості мережі  $S$  від вектору  $\mu$  може виражатися за допомогою різних функцій, найбільш загальною може бути наступна:

$$S = \sum_{i=1}^M c_i \mu_i^{a_i}$$

де  $c_i$  - коефіцієнти вартості,  $a_i$  - невід'ємні коефіцієнти нелінійності.

Розглянемо замкнену мережу, в якій немає зовнішніх джерел вимог, отже продуктивності центрів обслуговування (інтенсивності вихідних потоків) пропорційні одна одній, тому замість продуктивності мережі  $\lambda(\mu)$  можна використовувати продуктивність будь-якого центру обслуговування, розраховану за (8.29). Тоді задачу оптимізації можна сформулювати:

$$\begin{aligned} \text{Знайти} \quad \max \lambda &= e_1 G_m(N-1)/G_m(N) \\ \text{при обмеженні} \quad S &= \sum_{i=1}^M c_i \mu_i^{a_i} \leq S_{зад} \end{aligned} \tag{8.43}$$

або

$$\begin{aligned} \text{Знайти} \quad \min S &= \sum_{i=1}^M c_i \mu_i^{a_i} \\ \text{при обмеженні} \quad \lambda &= e_1 G_m(N-1)/G_m(N) \leq \lambda_{зад} \end{aligned} \tag{8.44}$$

Доведено [5], що функції  $S(\mu)$  і  $\lambda(\mu)$  – опуклі, тому будь-який локальний максимум (8.43) також є і глобальним максимумом, будь-який локальний мінімум (8.44) також є і глобальним мінімумом.

Використовуючи метод невизначених множників Лагранжа, можна отримати систему нелінійних рівнянь відносно змінних  $\mu_i, i = \overline{1, M}$ :

$$\begin{aligned} \mu_1^{a_1} &= S^* / \left\{ c_1 \left[ 1 + \frac{1}{L_1(N) - L_1(N-1)} \sum_{i=2}^M \frac{a_1}{a_i} (L_i(N) - L_i(N-1)) \right] \right\} \\ \mu_i^{a_i} &= \frac{c_1 a_1}{c_i a_i} \mu_1^{a_1} \frac{L_i(N) - L_i(N-1)}{L_1(N) - L_1(N-1)}, \quad i = \overline{2, M}. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Вектор  $\mu^*$ , який задовольняє системі (8.45), є рішенням задачі оптимізації (8.43). Для задачі (8.44) аналогічно можна отримати систему:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \lambda^* / U_1(N) \\ \mu_i^{a_i} &= \frac{c_1 a_1}{c_i a_i} \mu_1^{a_1} \frac{L_i(N) - L_i(N-1)}{L_1(N) - L_1(N-1)}, \quad i = \overline{2, M}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Тобто, задача оптимізації замкненої однорідної мережі МО зведена до рішення систем нелінійних алгебраїчних рівнянь (8.45) або (8.46), яке можна віднайти відомими методами [30].

## 8.6 Контрольні питання

1. Дати визначення та навести приклад мережі МО.
2. Які функції розподілу використовуються для опису потоків у мережах МО? Наведіть для них формули для обчислення математичного очікування, дисперсії та перетворення Лапласа.
3. Дати визначення дисциплінам обслуговування черги у мережах МО.
4. Що характеризує рівняння глобального балансу для замкнених мереж?

5. Чим відрізняються мережі, що залежать від навантаження, від мереж, що не залежать від навантаження?
6. Дати визначення показникам якості обслуговування однорідних мереж.
7. Дати визначення змішаної мережі. Які показники входять до опису змішаної мережі? Як вони визначаються?
8. Дайте приклад практичного застосування теореми ВСМР:
9. Дати визначення відкритої мережі МО з декількома класами вимог.
10. У чому полягає задача синтезу замкнутих однорідних мереж МО?

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Башарин Г.П., Бочаров П.П., Коган Я.А. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
2. Башарин Г.П. Лекции по математической теории телетрафика. – М.: РУДН, 2004. – 190 с.
3. Бенеш В. Э. Математические основы теории телефонных сообщений. – М.: Связь, 1986. – 291 с.
4. Вентцель Е. С Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е стереотипное. Москва: Высшая школа, 2000. – 480с.
5. Вишнеvский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003. – 506 с.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике. - М.: Высшая школа, 2004. – 407 с.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
8. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. –М.: Наука, 1987. – 336 с.
9. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с корреляционными потоками. – Минск: БГУ, 2000. – 386 с.
10. Ивницкий В.А. Теория сетей массового обслуживания. – М.: Физматлит, 2004. – 772 с.
11. Ионни Г. Л., Седол Я. Я. Статистическое моделирование систем телетрафика М.: Радио и связь, 1982. – 182 с.
12. Каминский В.Н. Оптимизация замкнутых стохастических систем с экспоненциальным обслуживанием // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1980. - № 6. – С. 68-76.

13. Корнышев Ю.Н., Пшеничников А.П., Харкевич А.Д. Теория телетрафика: Учебник для вузов. –М.: Радио и связь, 1996. – 272 с.
14. Крылов В.В., Самохвалова С.С. Теория телетрафика и ее приложения. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 288 с.
15. Крылов В.В. Теория телетрафика (Основы теории массового обслуживания для задач телекоммуникаций) – Н. Новгород: НГТУ, 2000.
16. Лагутин В.С., Степанов С.Н. Телетрафик мультисервисных сетей связи. – М.: Радио и связь, 2002. – 320 с.
17. Лившиц Б.С., Пшеничников А.П., Харкевич А.Д. Теория телетрафика Учебник для вузов. - 2-е изд., перераб. и доп. -М.: Связь, 1979. – 224 с.
18. Меликов А.З., Пономаренко Л.А., Паладюк В.В. Телетрафик: Модели, методы, оптимизация. –К.: ИПК «Политехника», 2007. – 256 с.
19. Меликов А.З., Пономаренко Л.А., Рюмшин Н.А. Математические модели много-поточковых систем обслуживания. – К.: Техника, 1991. – 265 с.
20. Назаров А. Н. Модели и методы расчета структурно-сетевых параметров АТМ сетей. -М.: Горячая линия Телеком, 2000. – 256 с.
21. Нейман В. И. Структуры систем распределения информации. 2-ое изд. перераб. и доп М.: Радио и связь, 1983. – 220 с.
22. Новиков О. А., Петухов И. Прикладные вопросы теории массового обслуживания М.: Советское радио, 1969.
23. Невдяев Л. М. Телекоммуникационные технологии, англо-русский толковый словарь-справочник М.: МЦНТИ. 2002.
24. Олифер В.Г., Олифер Н.А. Компьютерные сети: Принципы, технологии, протоколы: Учебник для вузов. №-е изд. \_СПб.: Питер, 2007. -956 с.
25. Олифер В.Г., Олифер Н.А. Искусство оптимизации трафика. LAN/ Журнал сетевых решений, декабрь 2001.
26. ПрохороваЮ. В. Вероятность и математическая статистика. М.: БРЭ. 1999. – 412 с.
27. Ромашкова О. Н. Обработка пакетной нагрузки информационных сетей М.: МИИТ.2001. – 258 с.

28. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения  
М.: Советское радио, 1971. – 515 с.
29. Таненбаум Е. Компьютерные сети. – СПб.: Питер, 2003.
30. Чисельні методи в інформатиці : підручник для ВНЗ / Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. - К. : Вид. група ВНУ, 2006. – 480 С.
31. Шварц М. Сети связи: протоколы, моделирование и анализ. В 2-х ч. Пер. с англ. – М.: Наука, 1992.
32. Шнепс М. А. Системы распределения информации. Методы расчета: Справочное пособие. М.: Связь, 1979. – 344 с.
33. Шнепс М. А. Численные методы теории телетрафика -М.: Связь, 1974.
34. H. Akimaru, K. Kawashima. Teletraffic. Theory and Application. – London: Springer Verlag, 1993. – 225 p.
35. Baskett, F.; Chandy, K. Mani; Muntz, R.R.; Palacios, F.G. Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers // Journal of the ACM, 1975, Volume 22 Issue 2.
36. Jackson J.R. Networks of waiting lines // Operations research, 1957, Vol.5, No 4. P.518-521.
37. Janevski T. Traffic analysis and design of wireless IP networks. – Boston: Artech House, 2003. -238 p.
38. Teletraffic engineering handbook. ITU-D SG 2/16 & ITC. Draft 2001-06-20. [www.itu.int/ITU-D/study\\_groups](http://www.itu.int/ITU-D/study_groups), 308 p.



## ДОДАТОК А - ТАБЛИЦІ ПЕРШОЇ ФОРМУЛИ ЕРЛАНГА

Таблиця А.1 - Пропускна здатність  $Y$  (Ерл) СМО при обслуговуванні викликів з імовірністю витрат  $p$ .

$\nu$	$p = 0,0001$	$p = 0,001$	$p = 0,005$	$\nu$	$p = 0,0001$	$p = 0,001$	$p = 0,005$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,0001	0,001	0,005	37	19,2	22,1	24,7
2	0,014	0,046	0,105	38	19,9	22,8	25,6
3	0,087	0,194	0,347	39	20,6	23,6	26,4
4	0,235	0,439	0,698	40	21,4	24,4	27,2
5	0,452	0,761	1,126	41	22,1	25,2	28,1
6	0,73	1,15	1,61	42	22,8	26,0	28,9
7	1,05	1,58	2,15	43	23,6	26,8	29,8
8	1,42	2,05	2,72	44	24,3	27,6	30,6
9	1,83	2,56	3,32	45	25,1	28,4	32,5
10	2,26	3,09	3,94	46	25,8	29,2	32,4
11	2,72	3,65	4,59	47	26,6	30,0	33,2
12	3,21	4,23	5,25	48	27,3	30,8	34,1
13	3,71	4,83	5,93	49	28,1	31,7	34,9
14	4,24	5,44	6,63	50	28,9	32,5	35,8
15	4,78	6,07	7,34	51	29,6	33,3	36,7
16	5,34	6,72	8,06	52	30,4	34,1	37,5
17	6,91	7,37	8,79	53	31,2	34,9	38,4
18	6,50	8,04	9,53	54	31,9	35,8	39,3
19	7,09	8,72	10,28	55	32,7	36,6	40,2
20	7,70	9,40	11,04	56	33,5	37,4	41,0
21	8,32	10,1	11,8	57	34,3	38,3	41,9
22	8,95	10,8	12,6	58	35,1	39,1	42,8
23	9,58	11,5	13,3	59	35,8	39,9	43,7
24	10,2	12,2	14,1	60	36,6	40,8	44,5
25	10,9	13,0	14,9	61	37,4	41,6	45,4
26	11,5	13,7	15,7	62	38,2	42,4	46,3
27	12,2	14,4	16,5	63	39,0	43,4	47,2
28	12,9	15,2	17,3	64	39,8	44,1	48,1
29	13,6	15,9	18,1	65	40,6	45,0	48,9
30	14,2	16,7	18,9	66	41,4	45,8	49,8
31	14,9	17,4	19,8	67	42,2	46,6	50,7
32	15,6	18,2	20,6	68	43,0	47,5	51,6
33	16,3	18,9	21,4	69	43,8	48,3	52,5
34	17,0	19,7	22,2	70	44,6	49,2	53,4
35	17,8	20,5	23,1	71	45,4	50,0	54,3
36	18,5	21,3	23,9	72	46,2	50,9	55,2

Продовження табл. А.1

1	2	3	4	5	6	7	8
73	47,0	51,7	56,1	126	91,3	98,2	104,5
74	47,8	52,6	57,0	128	93,1	100,1	106,3
75	48,6	53,5	57,9	130	94,8	101,8	108,2
76	49,4	54,3	58,8	132	96,5	103,6	110,0
77	50,2	55,2	59,7	134	98,2	105,4	111,8
78	51,1	56,0	60,6	136	100,0	107,2	113,7
79	51,9	56,9	61,5	138	101,7	109,0	115,6
80	52,7	57,8	62,4	140	103,4	110,8	117,4
81	53,5	58,6	63,3	142	105,1	112,6	119,3
82	54,3	59,5	64,2	144	106,9	114,4	121,2
83	55,1	69,3	65,1	146	108,6	116,2	123,0
84	56,0	61,2	66,0	148	110,4	118,0	124,9
85	56,8	62,1	66,9	150	112,1	119,8	126,8
86	57,6	62,9	67,8	152	113,8	121,7	128,7
87	58,4	63,8	68,7	154	115,6	123,5	130,5
88	59,3	64,6	69,6	156	117,3	125,3	132,3
89	60,1	65,5	70,5	158	119,1	127,1	134,2
90	60,9	66,4	71,4	160	120,8	128,9	136,1
91	61,8	67,3	72,3	162	122,6	130,7	138,0
92	62,6	68,2	73,2	164	124,3	132,6	139,9
93	63,4	69,0	74,1	166	126,1	134,4	141,8
94	64,2	69,9	75,0	168	127,9	136,2	143,6
95	65,1	70,8	75,9	170	129,6	138,0	145,5
96	65,9	71,7	76,9	172	131,4	139,8	147,4
97	66,8	72,5	77,8	174	133,1	141,7	149,3
98	67,6	73,4	78,7	176	134,9	143,5	151,1
99	68,4	74,3	79,6	178	136,7	145,3	153,0
100	69,3	75,5	80,5	180	138,4	147,2	154,9
102	70,9	76,3	82,3	182	140,2	149,0	156,8
104	72,6	78,2	84,2	184	142,0	150,8	158,7
106	74,3	80,4	86,0	186	142,7	152,6	160,6
108	76,0	82,2	87,9	188	145,5	154,4	162,5
110	77,7	84,0	89,7	190	147,3	156,2	164,4
112	79,4	85,7	91,6	192	149,1	158,1	166,2
114	81,1	87,6	93,3	194	150,8	159,9	168,1
116	82,8	89,4	95,2	196	152,6	161,7	170,0
118	84,5	91,2	97,0	198	154,4	163,6	171,8
120	86,2	92,9	98,9	200	156,2	165,4	173,7
122	87,9	94,6	100,7	202	158,0	167,3	175,6
124	89,6	96,4	102,6	204	159,7	169,1	177,5

Закінчення табл. А.1

1	2	3	4	5	6	7	8
206	161,5	171,0	179,5	320	264,7	277,1	288,2
208	163,3	172,8	181,4	330	273,9	286,5	297,8
210	165,1	174,6	183,3	340	283,1	295,9	307,4
212	166,9	176,5	185,2	350	292,3	305,4	317,1
214	168,7	178,3	187,1	360	301,5	314,8	326,7
216	170,5	180,2	189,0	370	310,7	324,2	336,3
218	172,3	182,0	190,8	380	319,9	333,7	346,0
220	174,0	183,9	192,7	390	329,1	343,2	355,7
222	175,8	185,7	194,6	400	338,4	352,7	365,4
224	177,6	187,6	196,5	410	347,7	362,1	375,0
226	179,4	189,4	198,4	420	356,9	371,6	384,7
228	181,2	191,3	200,3	430	366,3	381,1	394,4
230	183,0	193,1	202,2	440	375,5	390,6	404,0
232	184,8	195,0	204,1	450	384,8	400,1	413,7
234	186,6	196,9	206,1	460	394,1	409,6	423,4
236	188,4	198,7	208,0	470	403,4	419,1	433,1
238	190,2	200,6	209,9	480	412,7	428,6	442,8
240	192,0	202,4	211,8	490	422,0	438,2	452,5
242	193,8	204,3	213,7	500	431,4	447,8	462,2
244	195,6	206,1	215,5	550	478,2	495,6	510,8
246	197,4	208,0	217,4	600	525,2	543,4	559,5
248	199,2	209,9	219,3	650	572,3	591,4	608,3
250	201,0	211,7	221,3	700	619,5	639,5	657,1
260	210,0	221,0	230,8	750	666,8	687,7	706,0
270	219,1	230,3	240,3	800	714,3	735,9	754,9
280	228,2	239,6	249,8	850	761,8	784,2	803,9
290	237,3	248,9	259,4	900	809,4	832,5	852,9
300	246,4	258,3	269,0	1000	904,8	929,4	951,1
310	255,5	267,7	278,6	1100	1001,0	1027,0	1050,0

## ДОДАТОК Б – ТАБЛИЦЯ ІМОВІРНІСТІ ВТРАТ ЗА ЧАСОМ ПРИ ОБСЛУГОВУВАННІ ПРИМІТИВНОГО ПОТОКУ

Таблиця Б.1 – Імовірність втрат за часом при обслуговуванні  
примітивного потоку СМО з явними втратами

$\nu$	$\alpha$ , Ерл			
	0,05	0,10	0,15	0,20
1	2	3	4	5
$N = 10$				
1	0,3104	0,4737	0,5747	0,6429
2	$0,5844 \cdot 10^{-1}$	0,1539	0,2563	0,3396
3	$0,6772 \cdot 10^{-2}$	$0,3584 \cdot 10^{-1}$	$0,1823 \cdot 10^{-1}$	0,1368
4	$0,5076 \cdot 10^{-3}$	$0,5347 \cdot 10^{-2}$	$0,4986 \cdot 10^{-2}$	$0,3945 \cdot 10^{-1}$
$N = 20$				
1	0,4872	0,6552	0,7403	0,7917
2	0,1798	0,3709	0,4998	0,5876
3	$0,4848 \cdot 10^{-1}$	0,1737	0,2982	0,3997
4	$0,9602 \cdot 10^{-2}$	$0,6496 \cdot 10^{-1}$	0,1518	0,2423
5	$0,1438 \cdot 10^{-2}$	$0,1912 \cdot 10^{-1}$	$0,6393 \cdot 10^{-1}$	0,1269
6	$0,1677 \cdot 10^{-3}$	$0,4441 \cdot 10^{-2}$	$0,2189 \cdot 10^{-1}$	$0,05591 \cdot 10^{-1}$
$N = 30$				
1	0,5918	0,7436	0,8131	0,8530
2	0,2929	0,5101	0,6307	0,7049
3	0,1165	0,3146	0,4599	0,5592
4	$0,3647 \cdot 10^{-1}$	0,1698	0,3096	0,4210
5	$0,9036 \cdot 10^{-2}$	$0,7824 \cdot 10^{-1}$	0,1884	0,2963
6	$0,1804 \cdot 10^{-2}$	$0,3035 \cdot 10^{-1}$	0,1016	0,1916
7	$0,2963 \cdot 10^{-3}$	$0,9874 \cdot 10^{-2}$	$0,4768 \cdot 10^{-1}$	0,1118
8	$0,4073 \cdot 10^{-4}$	$0,2708 \cdot 10^{-2}$	$0,1929 \cdot 10^{-1}$	$0,5794 \cdot 10^{-1}$
9	$0,4752 \cdot 10^{-5}$	$0,6314 \cdot 10^{-3}$	$0,6706 \cdot 10^{-2}$	$0,2633 \cdot 10^{-1}$
$N = 50$				
1	0,7102	0,8305	0,8802	0,9074
2	0,4601	0,6659	0,7601	0,8133
3	0,2649	0,5106	0,6411	0,7182
4	0,1322	0,3700	0,5251	0,6229
5	$0,5615 \cdot 10^{-1}$	0,2498	0,4148	0,5286
6	$0,2017 \cdot 10^{-1}$	0,1548	0,3133	0,4367
7	$0,6158 \cdot 10^{-2}$	$0,8685 \cdot 10^{-1}$	0,2240	0,3492
8	$0,1614 \cdot 10^{-2}$	$0,4361 \cdot 10^{-1}$	0,1500	0,2683
9	$0,3675 \cdot 10^{-3}$	$0,1948 \cdot 10^{-1}$	$0,9294 \cdot 10^{-1}$	0,1964

Додаток Б – Таблиця імовірності втрат за часом при обслуговуванні примітивного потоку

Продовження табл. Б.1

1	2	3	4	5
10	$0,7349 \cdot 10^{-4}$	$0,7731 \cdot 10^{-2}$	$0,5282 \cdot 10^{-1}$	0,1358
11	$0,1303 \cdot 10^{-4}$	$0,2734 \cdot 10^{-2}$	$0,2732 \cdot 10^{-1}$	$0,8784 \cdot 10^{-1}$
12	$0,2063 \cdot 10^{-4}$	$0,8650 \cdot 10^{-3}$	$0,1281 \cdot 10^{-1}$	$0,5270 \cdot 10^{-1}$
13	$0,2935 \cdot 10^{-6}$	$0,2461 \cdot 10^{-3}$	$0,54440 \cdot 10^{-2}$	$0,2912 \cdot 10^{-1}$
14	$0,3774 \cdot 10^{-7}$	$0,6328 \cdot 10^{-4}$	$0,2094 \cdot 10^{-2}$	$0,2912 \cdot 10^{-1}$
15	$0,4403 \cdot 10^{-8}$	$0,1477 \cdot 10^{-4}$	$0,7324 \cdot 10^{-3}$	$0,6840 \cdot 10^{-2}$
$N = 100$				
1	0,8320	0,9083	0,9369	0,9519
2	0,6709	0,8165	0,8732	0,9032
3	0,5203	0,7253	0,8090	0,8538
4	0,3844	0,6351	0,7444	0,8039
5	0,2675	0,5468	0,6797	0,7534
6	0,1732	0,4614	0,6150	0,7024
7	0,1032	0,3801	0,5507	0,6511
8	$0,5602 \cdot 10^{-1}$	0,3041	0,4872	0,5996
9	$0,2754 \cdot 10^{-1}$	0,2352	0,4249	0,5480
10	$0,1224 \cdot 10^{-1}$	0,1747	0,3645	0,4966
11	$0,4928 \cdot 10^{-2}$	0,1238	0,3067	0,4456
12	$0,1804 \cdot 10^{-2}$	$0,8324 \cdot 10^{-1}$	0,2523	0,3952
13	$0,6032 \cdot 10^{-2}$	$0,5277 \cdot 10^{-1}$	0,2021	0,3450
14	$0,1852 \cdot 10^{-3}$	$0,3140 \cdot 10^{-1}$	0,1570	0,2983
15	$0,5248 \cdot 10^{-4}$	$0,1748 \cdot 10^{-1}$	0,1177	0,2526

ДОДАТОК В – КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ  $\chi^2$ 

## КРИТЕРІЮ ПІРСОНА

Таблиця В.1 - Критичні точки розподілу  $\chi^2$ 

Число мір свободи $k$	Рівень значущості $\alpha$					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,*	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

**ДОДАТОК Г – РЕЗУЛЬТАТИ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ М/М/3/Л//S**

$$T_1 = 10 \text{ хв}$$

$$T_2 = 30 \text{ хв}$$

$$\lambda = 6 \text{ ВИКЛ/ХВ}$$

$$h = 0,50 \text{ хв}$$

$$v = 3$$

$$N = 115$$

$$N_{\text{втр}} = 40$$

$$\frac{N_{\text{втр}}}{N} = 0,348$$

За першою формулою Ерланга імовірність втрат складає 0,346

Таблиця Г1. Моделювання реального процесу обслуговування в системі М/М/3/Л//S

№ виклику <i>i</i>	$r_i$	$r_i^*$	$z_i$	$t_i$	$\xi_i$	$t_{\text{зв.}i}$	№ каналу
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,150	0,237	0,317	10,317	0,720	11,037	1
2	0,658	0,065	0,070	10,386	1,370	11,757	2
3	0,095	0,288	0,391	10,778	0,623	11,401	3
4	0,419	0,750	0,145	10,923	0,144	-	втрата
5	0,009	0,828	0,776	11,699	0,095	11,794	1
6	0,975	0,536	0,004	11,703	0,312	12,015	3
7	0,578	0,977	0,091	11,795	0,012	11,807	1
8	0,790	0,732	0,039	11,834	0,156	11,990	1
9	0,345	0,639	0,177	12,012	0,224	12,235	1
10	0,054	0,014	0,487	12,498	2,138	14,637	1
11	0,835	0,089	0,030	12,528	1,207	13,736	2
12	0,556	0,208	0,098	12,626	0,786	13,412	3
13	0,775	0,533	0,043	12,669	0,315	-	втрата
14	0,452	0,711	0,132	12,801	0,171	-	втрата
15	0,153	0,932	0,313	13,114	0,035	-	втрата
16	0,761	0,929	0,046	13,160	0,037	-	втрата
17	0,412	0,793	0,148	13,308	0,116	-	втрата
18	0,508	0,333	0,113	13,421	0,550	13,971	3
19	0,284	0,441	0,210	13,631	0,409	-	втрата

Продовження табл. Г.1

1	2	3	4	5	6	7	8
20	0,341	0,090	0,179	13,810	1,206	15,016	2
21	0,136	0,995	0,333	14,143	0,003	14,145	3
22	0,463	0,547	0,128	14,271	0,302	14,573	3
23	0,455	0,275	0,131	14,403	0,646	-	втрата
24	0,217	0,983	0,254	14,657	0,009	14,666	1
25	0,331	0,569	0,184	14,841	0,282	15,123	1
26	0,746	0,169	0,049	14,890	0,889	15,780	3
27	0,007	0,092	0,823	15,713	1,192	16,905	1
28	0,394	0,660	0,155	15,868	0,208	16,076	2
29	0,457	0,580	0,130	15,999	0,272	16,271	3
30	0,807	0,292	0,036	16,034	0,616	-	втрата
31	0,227	0,904	0,247	16,282	0,050	16,332	2
32	0,618	0,004	0,080	16,362	2,724	19,086	2
33	0,751	0,158	0,048	16,410	0,924	17,334	3
34	0,078	0,850	0,425	16,835	0,081	-	втрата
35	0,955	0,589	0,008	16,843	0,264	-	втрата
36	0,534	0,120	0,105	16,947	1,062	18,009	1
37	0,618	0,218	0,080	17,028	0,761	-	втрата
38	0,662	0,135	0,069	17,096	1,000	-	втрата
39	0,386	0,924	0,158	17,255	0,039	-	втрата
40	0,045	0,730	0,518	17,773	0,157	17,930	3
41	0,849	0,029	0,027	17,800	1,777	-	втрата
42	0,151	0,545	0,315	18,115	0,303	18,419	1
43	0,186	0,772	0,280	18,395	0,129	18,525	3
44	0,337	0,501	0,181	18,577	0,346	18,923	1
45	0,188	0,590	0,278	18,855	0,264	19,118	3
46	0,152	0,364	0,314	19,169	0,506	19,674	1
47	0,034	0,409	0,561	19,730	0,447	20,177	1
48	0,800	0,918	0,037	19,767	0,043	19,810	2
49	0,777	0,691	0,042	19,809	0,185	19,994	3
50	0,022	0,498	0,637	20,446	0,349	20,795	1
51	0,442	0,127	0,136	20,582	1,032	21,615	2
52	0,786	0,355	0,040	20,622	0,518	21,141	3
53	0,692	0,120	0,061	20,684	1,061	-	втрата
54	0,576	0,523	0,092	20,776	0,325	-	втрата
55	0,341	0,950	0,179	20,955	0,026	20,981	1
56	0,442	0,934	0,136	21,091	0,034	21,125	1
57	0,497	0,123	0,117	21,208	1,047	22,255	1
58	0,117	0,781	0,358	21,565	0,123	21,689	3
59	0,766	0,527	0,044	21,610	0,320	-	втрата
60	0,794	0,440	0,038	21,648	0,411	22,059	2



Продовження табл. Г.1

1	2	3	4	5	6	7	8
61	0,446	0,065	0,135	21,783	1,367	23,150	3
62	0,891	0,076	0,019	21,802	1,289	-	втрата
63	0,617	0,713	0,080	21,883	0,169	-	втрата
64	0,315	0,713	0,192	22,075	0,169	22,244	2
65	0,415	0,737	0,146	22,221	0,153	-	втрата
66	0,098	0,344	0,386	22,608	0,533	23,141	1
67	0,114	0,791	0,363	22,970	0,117	23,088	2
68	0,644	0,876	0,073	23,044	0,066	-	втрата
69	0,862	0,606	0,025	23,068	0,251	-	втрата
70	0,514	0,463	0,111	23,179	0,385	23,564	1
71	0,324	0,741	0,188	23,367	0,150	23,517	2
72	0,458	0,295	0,130	23,497	0,611	24,108	3
73	0,514	0,037	0,111	23,608	1,645	25,253	1
74	0,949	0,825	0,009	23,616	0,096	23,712	2
75	0,634	0,444	0,076	23,692	0,405	-	втрата
76	0,864	0,411	0,024	23,717	0,444	24,161	2
77	0,281	0,895	0,212	23,929	0,056	-	втрата
78	0,950	0,614	0,009	23,937	0,244	-	втрата
79	0,781	0,698	0,041	23,978	0,180	-	втрата
80	0,499	0,689	0,116	24,094	0,186	-	втрата
81	0,193	0,885	0,274	24,369	0,061	24,430	2
82	0,982	0,523	0,003	24,372	0,324	24,695	3
83	0,637	0,043	0,075	24,447	1,572	26,019	2
84	0,653	0,405	0,071	24,518	0,452	-	втрата
85	0,350	0,864	0,175	24,692	0,073	-	втрата
86	0,549	0,372	0,100	24,792	0,494	25,286	3
87	0,089	0,045	0,403	25,195	1,547	-	втрата
88	0,835	0,774	0,030	25,226	0,128	-	втрата
89	0,536	0,853	0,104	25,329	0,080	25,409	1
90	0,322	0,125	0,189	25,518	1,040	26,558	1
91	0,883	0,523	0,021	25,539	0,324	25,862	3
92	0,473	0,215	0,125	25,664	0,769	-	втрата
93	0,515	0,522	0,111	25,774	0,325	-	втрата
94	0,666	0,083	0,068	25,842	1,245	-	втрата
95	0,285	0,801	0,209	26,052	0,111	26,163	2
96	0,662	0,729	0,069	26,120	0,158	26,278	3
97	0,052	0,067	0,492	26,613	1,355	27,968	1
98	0,756	0,862	0,047	26,659	0,074	26,733	2
99	0,940	0,263	0,010	26,669	0,668	27,337	3
100	0,930	0,195	0,012	26,681	0,816	-	втрата
101	0,833	0,366	0,030	26,712	0,503	-	втрата

Закінчення табл. Г.1

1	2	3	4	5	6	7	8
102	0,038	0,756	0,547	27,259	0,140	27,398	2
103	0,842	0,004	0,029	27,287	2,755	-	втрата
104	0,259	0,799	0,225	27,513	0,112	27,625	2
105	0,486	0,458	0,120	27,633	0,391	28,024	2
106	0,960	0,974	0,007	27,639	0,013	27,653	3
107	0,473	0,567	0,125	27,764	0,283	28,048	3
108	0,147	0,321	0,320	28,084	0,569	28,653	1
109	0,051	0,031	0,497	28,581	1,735	30,316	2
110	0,043	0,301	0,526	29,106	0,601	29,707	1
111	0,572	0,164	0,093	29,199	0,903	30,103	3
112	0,559	0,692	0,097	29,296	0,184	-	втрата
113	0,478	0,319	0,123	29,419	0,571	-	втрата
114	0,145	0,951	0,322	29,742	0,025	29,767	1
115	0,561	0,590	0,096	29,838	0,264	30,102	1
116	0,165	0,770	0,301	30,139	0,130	30,269	1

Навчальне видання

ВОРОПАЄВА Вікторія Яківна  
БЕССАРАБ Володимир Іванович  
ТУРУПАЛОВ Віктор Володимирович  
ЧЕРВИНСЬКИЙ Володимир Володимирович

**ТЕОРІЯ ТЕЛЕТРАФІКУ**

Навчальний посібник  
(українською мовою)

Дизайн обкладинки *Н.В. Червінська*

Підписано до друку 17.11.2011. Формат 60\*84/16.  
Папір офсетний. Друк різнографія.  
Ум. друк. арк. 11,7 Обл.-вид. арк. 10.1  
Наклад 300 прим. Замовлення № 150

Видавництво ДВНЗ «ДонНТУ»  
Україна, 83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58. Тел.: (062) 301-08-67

Свідоцтво про державну реєстрацію суб'єкта видавничої справи: серія ДК № 2982 від 21.09.2007

Надруковано в типографії ДВНЗ «ДонНТУ», 83000, м. Донецьк, вул. Артема, 58, 9-й учбовий корпус, тел.: (062) 301-09-67