

УДК 519.63

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АДАПТИВНОЙ СЕТКИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА БЕСКОНТАКТНОЙ ЛАЗЕРНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Михайлова И.Ю.

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г.  
Киев, Украина

*Рассматриваются результаты применения адаптивного алгоритма построения разностной сетки при решении нестационарного трехмерного уравнения теплопроводности методом расщепления по координатам, моделирующего температурное поле при бесконтактной лазерной деформации тонкой металлической пластины.*

### Введение

Развитие лазерных технологий дало возможность применять лазерное излучение в инженерии поверхности для контролируемого изменения структуры верхних слоев материалов. Это позволяет использовать температурные процессы, протекающие в материале, для создания структурных напряжений, необходимых для бесконтактной деформации. Однако, локальность воздействия лазерного излучения и высокая скорость протекания процессов затрудняют проведение их экспериментального исследования и обуславливают необходимость применения методов математического моделирования. В данной работе рассматривается использование метода конечных разностей для компьютерного моделирования высокоградиентных процессов бесконтактной лазерной деформации тонких металлических пластин.

### 1 Постановка задачи

Исследуемый объект представляет собой тонкую пластину с геометрическими размерами  $L_x, L_y, L_z$ . Все поверхности детали находятся в процессе теплообмена с окружающей средой, температура которой  $U_c$ . На поверхность пластины действует лазерный луч, который движется по поверхности с постоянной скоростью параллельно оси  $OY$  и нагревает ее в период времени  $[t_{нач}, t_{кон}]$ . Действие луча вызывает формирование на поверхности обработки теплового потока с плотностью  $q(x, y, t)$ . Необходимо определить распределение температуры в тонкой металлической пластине и соответствующие значения угла изгиба.

### 2 Математическая модель

Процесс нестационарного распределения температуры в металлической пластине может быть описан при помощи функции зависимости температуры от пространственных и временной координат  $U(x, y, z, t)$ , которая является решением уравнения теплопроводности [1]:

$$\frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 U(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right),$$

где  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$  – коэффициент температуропроводности,  $c$  – теплоемкость материала,  $\rho$  – плотность,  $\lambda$  – теплопроводность,  $x \in [0, L_x], y \in [0, L_y], z \in [0, L_z], t \in [t_{нач}, t_{кон}]$ .

Краевое условие на поверхности обработки в зоне действия лазерного излучения:

$$-\lambda \frac{\partial U}{\partial z} = \begin{cases} q(x, y, t), & \text{если } z = 0 \\ q(x, y, t) - L_{исп} \rho \frac{\partial \xi(x, y, t)}{\partial t}, & \text{если } z = \xi(x, y, t) \end{cases}$$

где  $L_{исп}$  – удельная теплота испарения,  $\xi(x, y, t)$  – глубина испаренного участка в точке  $(x, y)$  в момент

времени  $t$ .

Краевые условия на верхней и нижней поверхностях объекта вне зоны действия лазерного излучения и на остальных гранях расчетной области отражают теплообмен со средой по закону

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = -\alpha(U - U_c).$$

Начальная температура детали равна температуре окружающей среды:  $U(x, y, z, 0) = U_c$ .

Для определения угла изгиба используется модифицированная модель Волертсона [2]:

$$\theta = \frac{l}{L_z} \left( \alpha \Delta T - \frac{2\sigma_y}{E} \right),$$

где  $l$  – ширина нагретого участка,  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения,  $\Delta T$  – разность максимальных значений температур сканированного и несканированного участков,  $\sigma_y$  – граница текучести,  $E$  – модуль Юнга для материала.

### 3 Метод конечных разностей

Метод конечных разностей основан на дискретизации области определения с достаточно мелким шагом и состоит из 3-х этапов: дискретизации расчетной области, замены дифференциального уравнения в частных производных (ДУЧП) системами алгебраических уравнений, решения этих систем. Особенности данной задачи, а именно наличие зон с большими градиентами температур (рис. 1, а), требуют модификации алгоритмов реализации этих этапов.

Эффективность решения задачи в значительной степени зависит от первого этапа – дискретизации расчетной области, т.е. построения сетки. При увеличении количества узлов повышается точность, но увеличиваются затраты машинного времени в результате роста размерности системы алгебраических уравнений. Поскольку в данной задаче нагрев поверхности является локальным и очень интенсивным, узлы разностной сетки в зоне нагрева необходимо расположить очень плотно. Однако такое резкое изменение температуры будет наблюдаться лишь в незначительной части расчетной области. На участках более удаленных от луча изменения температуры незначительны, поэтому на них сетка может быть разреженной, что сократит общее количество узлов и, следовательно, уравнений. Таким образом, для задач моделирования лазерного воздействия необходимо применять адаптивные методы построения сеток, которые в процессе решения задачи анализируют поведение функции и перестраивают сетку, адаптируя ее к текущему состоянию: сгущают узлы в зонах высоких градиентов и разрежают в зонах малых (рис. 1, б).

Пусть приближенное решение найдено на  $(k-1)$  слое на неравномерной сетке в узлах  $(x_i, y_j, z_m)$ , где  $i=0, 1, \dots, n_1, j=0, 1, \dots, n_2, m=0, 1, \dots, n_3$ . Для построения адаптивной сетки на каждом временном шаге для каждой точки  $(x_i, y_j, z_m)$  оценивается точность полученных результатов, то есть сравниваются реальная погрешность  $e_{ijm}$  с допустимой  $e_{доп}$ . На основании этого изменяются величины пространственных шагов в окрестности данной точки, а также величина шага по времени. Если хотя бы для одного

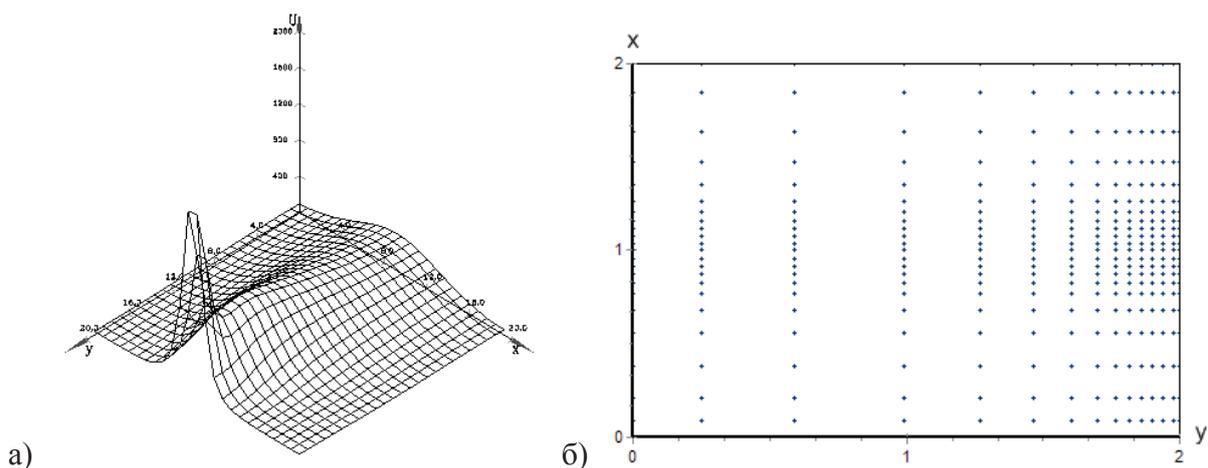


Рисунок 1. Температурное поле (а) и разностная сетка (б) при  $z=0$  и  $t=2c$

узла  $e_{ijm} > e_{oon}$ , результаты последнего временного шага аннулируются, уменьшается шаг по времени и строится новая сетка с уплотнением узлов в точках отказа. Если выполняются условия точности  $e_{ijm} < e_{oon}$ , результаты данного шага принимаются и уточняются. На основе реальных погрешностей  $e_{ijm}$  строится новая сетка, которая учитывает особенности поведения функции, и определяется новое значение шага по времени [3].

Для перехода от ДУЧП к системам алгебраических уравнений применим схему расщепления по координатам [4], которая реализуется в шесть этапов, на каждом из которых необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей.

Обозначим величину шагов сетки в направлении  $OX$  как  $h_{1,i} = x_i - x_{i-1}$ , в направлении  $OY$  как  $h_{2,j} = y_j - y_{j-1}$ , в направлении  $OZ$  как  $h_{3,m} = z_m - z_{m-1}$ . Обозначим также среднее арифметическое двух соседних шагов для узла  $(x_i, y_j, z_m)$  в каждом из координатных направлений как  $h_{1,c}, h_{2,c}, h_{3,c}$ ; шаг по времени как  $\tau = \tau_k = t_k - t_{k-1}$ ; значение приближенного решения в точке  $(x_i, y_j, z_m, t_k)$  через  $u_{ijm}^k$ . Каждый шаг схемы расщепления по координатам, которая имеет второй порядок точности по времени и пространственным переменным, реализует на неравномерной сетке переход с  $(k-1)$ -го временного слоя на  $(k+1)$ -й и заключается в выполнении шести этапов:

$$\frac{u^{k-\frac{2}{3}} - u^{k-1}}{\tau} = \Lambda_3 \frac{u^{k-\frac{2}{3}} + u^{k-1}}{2}, \quad \frac{u^{k-\frac{1}{3}} - u^{k-\frac{2}{3}}}{\tau} = \Lambda_2 \frac{u^{k-\frac{1}{3}} + u^{k-\frac{2}{3}}}{2},$$

$$\frac{u^k - u^{k-\frac{1}{3}}}{\tau} = \Lambda_1 \frac{u^k + u^{k-\frac{1}{3}}}{2}, \quad \frac{u^{k+\frac{1}{3}} - u^k}{\tau} = \Lambda_1 \frac{u^{k+\frac{1}{3}} + u^k}{2},$$

$$\frac{u^{k+\frac{2}{3}} - u^{k+\frac{1}{3}}}{\tau} = \Lambda_2 \frac{u^{k+\frac{2}{3}} + u^{k+\frac{1}{3}}}{2}, \quad \frac{u^{k+1} - u^{k+\frac{2}{3}}}{\tau} = \Lambda_3 \frac{u^{k+1} + u^{k+\frac{2}{3}}}{2},$$

где  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  – разностные операторы аппроксимации вторых производных на неравномерной сетке:

$$\Lambda_1 u_{ijm}^k = a \frac{h_{1,i+1} u_{i-1,j,m}^k - 2h_{1,c} u_{ijm}^k + h_{1,i} u_{i+1,j,m}^k}{h_{1,c} h_{1,i} h_{1,i+1}},$$

$$\Lambda_2 u_{ijm}^k = a \frac{h_{2,j+1} u_{i,j-1,m}^k - 2h_{2,c} u_{ijm}^k + h_{2,j} u_{i,j+1,m}^k}{h_{2,c} h_{2,j} h_{2,j+1}},$$

$$\Lambda_3 u_{ijm}^k = a \frac{h_{3,m+1} u_{i,j,m-1}^k - 2h_{3,c} u_{ijm}^k + h_{3,m} u_{i,j,m+1}^k}{h_{3,c} h_{3,m} h_{3,m+1}}.$$

#### 4 Результаты моделирования

Моделирование проводилось для тонкой пластины из стали конструкции 65Г с следующими значениями параметров:  $a = 51,3 \frac{Bm}{m^2 \cdot ^\circ C}$ ,  $L_x = 10$  см,  $L_y = 5$  см,  $L_z = 0,5$  см,  $q_{max} = 0,8E8 \frac{к\kappa}{сек^3}$ , радиус пятна  $r = 0,1$  мм, скорость движения лазеров  $v = 1,2 \cdot 10^{-2} \frac{см}{сек}$ ,  $U_c = 20^\circ$ ,  $T_{исп} = 1200^\circ C$ ,  $L_{исп} = 10800 \frac{Дж}{г}$ .

В результате моделирования получены значения угла изгиба, представленные в табл. 1.

Для данной задачи сложно найти точное аналитическое решение, поэтому для исследования эффективности адаптивного метода в качестве эталонного принималось решение, полученное на равномерной фиксированной сетке с малым шагом (число пространственных шагов  $n = 48$ , временной



Таблица 1. Расчетные значения углов деформации

Номер прохода	1	2	3	4
Расчетное значение угла, рад.	0,022	0,048	0,069	0,082

Таблица 2. Результаты расчетов с использованием фиксированной сетки

$\tau$	n	Максимальная абсолютная погрешность, °С	Время расчета, мин.:сек	Количество шагов
0,002	48	–	4:26	500
0,002	43	35	4:05	500
	39	60	3:53	
	32	101	3:31	
0,01	43	89	2:33	100
	39	104	2:22	
	32	137	2:13	

Таблица 3. Результаты расчетов с использованием адаптивной сетки

Допустимая относительная погрешность	Максимальная абсолютная погрешность, °С	Время расчета, мин.:сек	Кол-во шагов
0,1	103	0:51	24
0,15	118	0:47	19
0,2	135	0:45	17
0,25	113	0:40	16

Таблица 4. Результаты расчетов с использованием адаптивной и фиксированной сеток

Вид сетки	Максимальная абсолютная погрешность, °С	$\tau$	n	Допустимая относительная погрешность, %	Время расчета, мин.:сек	Кол-во шагов
Адаптивная	103	-	-	0,1	0:51	24
Фиксированная	101	0,002	32	-	3:31	500
Фиксированная	102	0,0025	36	-	3:02	250
Фиксированная	104	0,01	39	-	2:22	100

шаг  $\tau = 0.002$ ). Расчеты выполненные с использованием фиксированной (табл. 2) и адаптивной сеток (табл. 3), показывают, что при приблизительно одинаковой максимальной абсолютной погрешности, адаптивный метод требует в 2-3 раза меньше машинного времени для моделирования процесса бесконтактной лазерной деформации (табл. 4).

Расчеты выполнены на компьютере с параметрами Intel Core2 Duo, 1.96x2 ГГц, 2 Гб ОЗУ.

### Выводы

Моделирование высокоградиентных температурных полей с использованием адаптивной сетки позволяет в 2-3 раза ускорить процесс вычислений по сравнению с использованием фиксированной сетки. Однако данный метод имеет свои недостатки: узлы сгущаются не только в зонах с высоким градиентом температур, но и вне их. Поэтому лучше использовать неструктурированные сетки или безсеточные методы.

### Литература

- [1] Лазерні технології та комп'ютерне моделювання / Під ред. Л.Ф. Головка, С.О. Лук'яненка. – К.: Вістка, 2009. – 296 с.
- [2] Головка Л.Ф., Лукьяненко С.О., Михайлова И.Ю., Третьяк В.А. Моделирование процесса безконтактной лазерной деформации адаптивным методом // Электронное моделирование / Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины, 2011. – Вып. 3. – Том 33. – с. 71-84.
- [3] Лук'яненко С.О. Адаптивні обчислювальні методи моделювання об'єктів з розподіленими параметрами. – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка»», 2004. – 236 с.
- [4] Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука. – 1978. – 512 с.