УДК 519.876.5

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В ДИСКРЕТНО-БЕЗПЕРЕРВНИХ СИСТЕМАХ ЗА ДОПОМОГОЮ MAX-PLUS-АЛГЕБРИ

Василенко О.В., Бессараб В.І.
Донецький національних технічний університет

Розглядається методика створення математичних моделей дискретно-безперервних систем за допомогою апарату «Max-Plus»-алгебра та графів синхронізації, та вирішується проблема заборонених станів в подібних системах. Запропонована методика була застосована на прикладі опису виробничого об'єкту та створення керування для уникнення забороненого стану. Зроблені висновки стосовно можливості практичного застосування цих методів.

Вступ

Дискретно-безперервна система (ДБС) – це динамічна система, поведінку якої можна описати за допомогою дискретної послідовності подій. Дослідження, аналіз та розробка керування ДБС має достатньо великий практичний сенс, бо у сучасному світі можна знайти велику кількість прикладів подібних систем, для яких існує необхідність дослідження динаміки та розробки керування з метою уникнення заборонених станів. Наприклад, ДБС є конвеєрне виробництво, транспортні системи, системи керування базами даних, комунікаційні мережі, системи логістики, хімічні процеси, тощо. У цілому динаміка ДБС характеризується поняттями «синхронізація» та «паралелізм». Дослідження динаміки ДБС та розробка керування потребують наявності спеціальних математичних апаратів. Існують багато методів моделювання та аналізу ДБС. При цьому перевага надається тим математичним моделям, які є найбільш придатними для математичного аналізу, дозволяють робити прогнози стосовно поведінки системи та аналітично добре розробляти контролери. Використовуючи специфікацію моделі можливо розрахувати ансамбль всіх можливих послідовностей подій у майбутньому. Але навіть для систем малого порядку кількість можливих послідовностей подій може бути дуже значною. Це означає, що взагалі буде отримана більш складна модель системи (та відповідно розробка керування), якщо вона описує повну поведінку системи. Тому необхідно мати компактний, але також достатньо точний математичний опис системи, який також дозволяє знаходити ефективну стратегію керування.

Для моделювання й аналізу ДБС, а також для розробки керування застосовуються різні математичні засоби. Серед найбільш придатних апаратів зокрема використовуються скінченні автомати з часовими оцінками, мережі Петрі з часовими оцінками, «Max-Plus»-алгебра, темпоральна логіка, тощо. Але найбільш придатним математичним апаратом для вирішення проблем синхронізації процесів в дискретно-безперервних системах все ж є «Max-Plus»-алгебра, що дозволяє описувати детерміновану систему з часовими оцінками у зручному векторно-матричному вигляді, використовуючи при цьому потенціал мереж Петрі, а саме графів синхронізації. Крім того, для апарату «Max-Plus»-алгебри існують розроблені програмні засоби, серед яких виділимо Max-Plus-Algebra Toolbox [1] для популярного пакету програм MATLAB, що значно спрощує застосування на практиці цього математичного апарату.

Далі буде розглянуто задачу розробки математичної моделі системи за допомогою апарату «Max-Plus»-алгебри, та вирішення проблеми заборонених станів, на прикладі процесу обробки заготовок на токарно-фрезерувальному верстаті [2].

1 Вирішення задач та результати дослідження

Схема об'єкта керування представлена на рис. 1. Ділянка цеху складається з конвеєра, за допомогою якого подаються заготовки на обробку, та передаються далі після її завершення. Подача

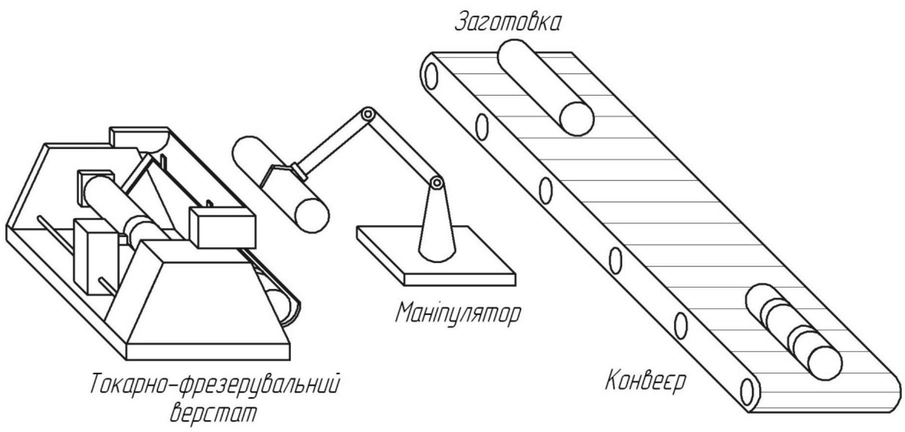

Рисунок 1. Схема об’єкта керування

нової заготовки конвеєром виконується тільки після розвантаження на нього обробленої заготовки. Операції розвантаження/завантаження заготовок до токарно-фрезерувального верстату виконує маніпулятор. У верстаті є бункер для однієї необробленої та однієї обробленої заготовки. Очевидним є використання маніпулятора окремо для виконання операції завантаження та окремо для операції розвантаження заготовок.

Математична модель об’єкта керування може бути представлена у вигляді графа синхронізації (рис. 2). Початкове маркування графа синхронізації відповідає стану процесу на рис. 1. Граф синхронізації описується за допомогою матриці системи A, використовуючи методику та позначення «Max-Plus»-алгебри [3, 4]:

$$A=\begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \tag{1}$$

та матриці керування B, вираз (2), яка враховує керовані переходи в системі:

$$B=\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}^T. \tag{2}$$

Далі складаємо матриці трансформації (3) та (4), що враховують початкове маркування графа синхронізації

$$(T_{A0})_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{якщо позиція } s_i \text{ не маркована,} \\ -\infty & \text{інакше;} \end{cases} \tag{3}$$

$$(T_{A1})_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{якщо позиція } s_i \text{ маркована,} \\ -\infty & \text{інакше.} \end{cases} \tag{4}$$

Для отримання рівняння динаміки системи попередньо розраховуємо наступні матриці:

$$A_0 = A \cdot T_{A0}\,, \tag{5}$$

$$A_1 = A \cdot T_{A1}\,, \tag{6}$$

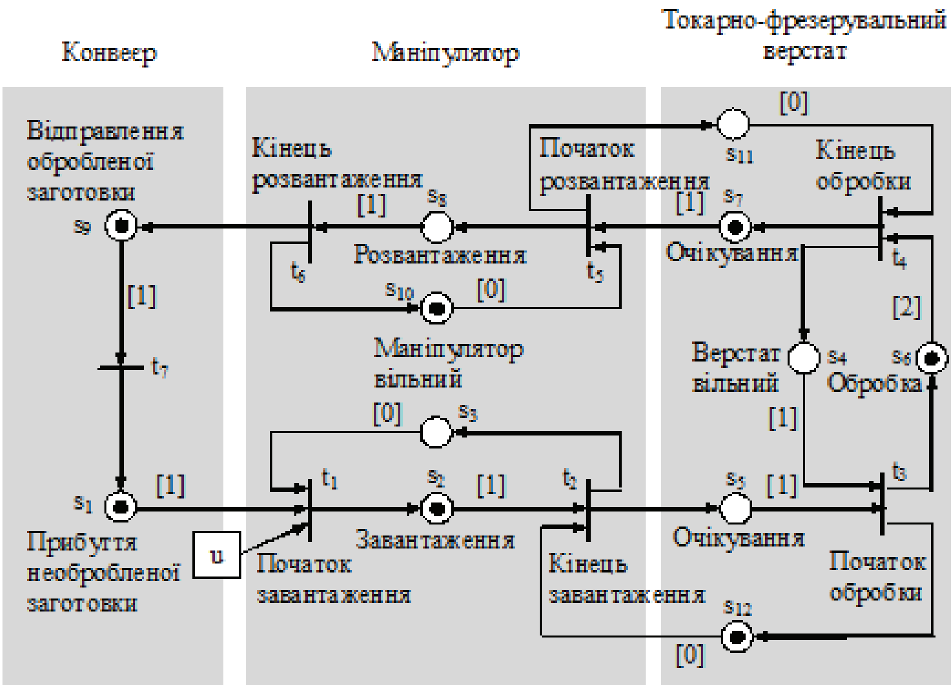

Рисунок 2. Граф синхронізації об'єкта керування

$$A^* = I \oplus A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \ldots \oplus A^{n-1}. \tag{7}$$

Для опису поведінки мереж Петрі без затримуючих керуючих впливів використовується матриця M:

$$M = A_0^* \cdot A_1 . \tag{8}$$

Поведінка некерованого графа синхронізації розраховується за формулою (9):

$$x(k+1) = M\, x(k). \tag{9}$$

Для наочного зображення процесів в ДБС часто використовують діаграми Ганта, що показують часи зайняття (маркування) окремих позицій. На отриманій діаграмі для некерованої системи (рис. 3) спостерігаються позиції s_2, s_6, s_8, (завантаження, обробка, розвантаження). Кольорами розрізняються цикли роботи системи.

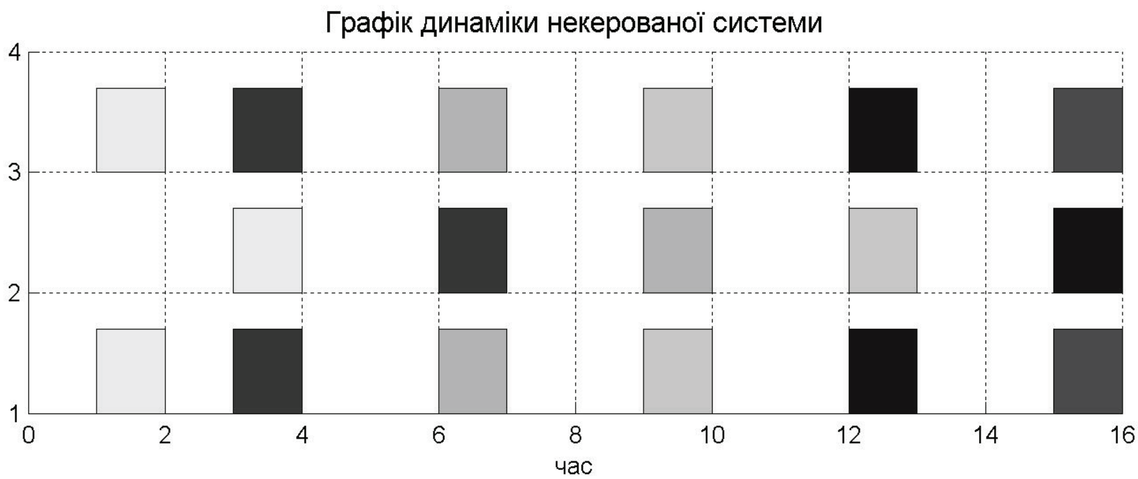

Рисунок 3. Графік динаміки в некерованій системі

Як можна побачити з рис. 3, в початковій некерованій системі існує суттєва проблема, що пов'язана з накладанням у часі процесів завантаження та розвантаження заготовок. Для вирішення проблем заборонених станів у ДБС застосовують керування, яке може затримати маркування окремих позицій, як на поточних, так і на наступних циклах. Керування виконується керованими переходами, на які впливає керування u.

До поведінки керованого графа синхронізації складаються прості вимоги:

– момент часу $x_i(k)$ k-го маркування позиції s_i повинен бути досягнутий через τ часові одиниці після k-го моменту часу маркування $x_j(k)$ позиції s_j;
– момент часу $x_i(k+1)$ $(k+1)$-го маркування позиції s_i повинен бути досягнутий через τ часові одиниці після k-го моменту часу маркування $x_j(k)$ позиції s_j.

У першому випадку відбувається затримка маркування позиції s_i під час одного циклу. Для виконання цієї умови в мережі Петрі вибирається керований перехід t_s, від якого йде шлях до позиції s_i. Нехай вага цього шляху дорівнює δ, тобто не раніш ніж через δ часові одиниці після запуску переходу t_s буде маркована позиція s_i. Якщо на перехід t_s впливає керуючий вплив u_m, тоді умови може бути виконана за допомогою наступного елемента матриці зворотного зв'язку R_0:

$$(R_0)_{mj} = \tau \otimes (-\delta). \tag{10}$$

Аналогічно для умови другого типу розраховується наступний елемент матриці R_1, що надає системі бажану поведінку:

$$(R_1)_{mj} = \tau \otimes (-\delta). \tag{11}$$

Для існуючої системи застосовуємо умову другого типу, а саме, позиція s_2 (завантаження) повинна маркуватися негайно після маркування позиції s_9 (завершення розвантаження).

Поведінка керованого графа синхронізації розраховується за формулою (12):

$$x(k+1) = (A_0 \oplus B R_0)^* (A_1 \oplus B R_1) x(k) = M_s\, x(k). \tag{12}$$

За допомогою рівняння (12) побудуємо графік динаміки процесу обробки в керованій системі (рис.4). Таким чином, з рис. 4 ми бачимо, що вдалося уникнути забороненого стану, тобто накладення у часі процесів розвантаження та завантаження.

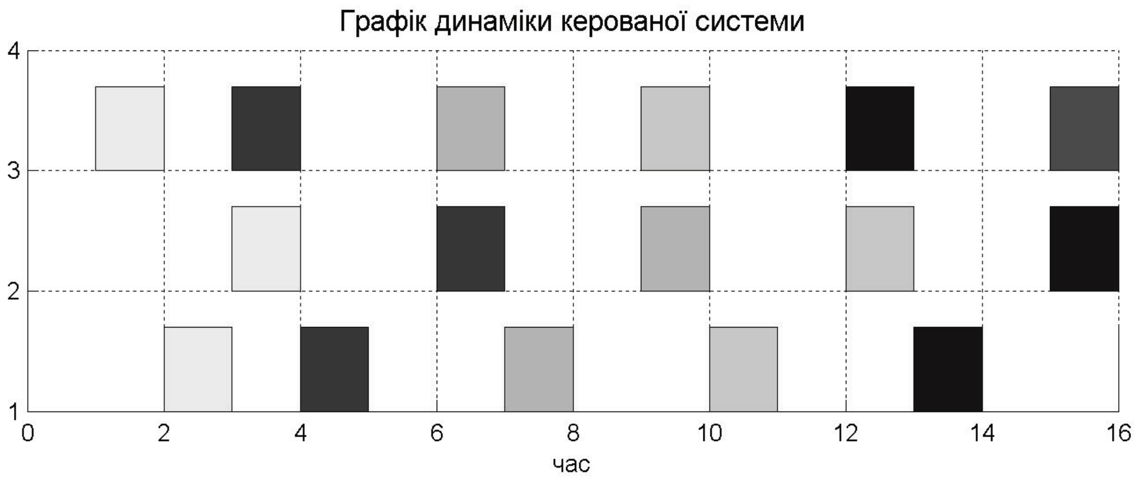

Рисунок 4. Графік динаміки в керованій системі

Динаміку ДБС також характеризують власне число λ та власні вектори v:

$$A \otimes \nu = \lambda \otimes \nu \,. \tag{13}$$

Для некерованої системи маємо:

$$\lambda = 3 \text{ та } v = [-4 \;\; -3 \;\; -3 \;\; -1 \;\; -3 \;\; 0 \;\; -1 \;\; -3 \;\; -2 \;\; -2 \;\; -3 \;\; 0]^T,$$

де бачимо заборонений стан $v_2 = v_8$.

Після застосування керування отримаємо:

$$\lambda = 3 \text{ та } v = [-4 \;\; -2 \;\; -3 \;\; -1 \;\; -3 \;\; 0 \;\; -1 \;\; -3 \;\; -2 \;\; -2 \;\; -3 \;\; 0]^T.$$

Тобто в керованій системі було досягнута бажана поведінка.

Висновки

На розглянутому в прикладі простої ДБС було показано, що апарат «Max-Plus»-алгебри може застосовуватися для опису реальних об'єктів, що є ДБС, для дослідження динаміки процесів та для вирішення проблем синхронізації та уникнення заборонених станів, які можуть призводити до небезпечних або небажаних ситуацій на об'єкті. Застосування методів «Max-Plus»-алгебри на практиці, а саме для моделювання ДБС, спрощується завдяки використанню програмного забезпечення Max-Plus-Algebra Toolbox для пакету MATLAB. Отримана математична модель керованої системи може використовуватися в подальшому при програмуванні логічних контролерів.

Література

[1] Jaroslaw Stanczyk. Max-Plus Algebra Toolbox for Matlab and GNU Octave – User Guide: Magdeburg 2005 – 102 p

[2] Mathias Kluwe. Automatisierung ereignisdiskreter und hybrider Systeme – Beiblätter zur Vorlesung. 2010 – 75 Seiten.

[3] Moßig. Algebraischer Steuerungsentwurf für eine Klasse ereignisdiskreter Prozesse mittels der Max-Plus-Algebra – Fortschr.-Ber. VDI Reihe 20 Nr. 224. Düsseldorf: VDI Verlag 1996. 144 Seiten, 34 Bilder, 8 Tabellen.

[4] Synchronization and Linearity / F. Baccelli, G. Cohen, G. Olsder, J. Quadrat, 1992. 485 Seiten..