УДК 681.5

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНИХ ВС ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СОДУ С КОНТРОЛЕМ ПОГРЕШНОСТИ НА ШАГЕ

И.А. Назарова
Донецкий национальный технический университет

В статті розглянуті програмно-алгоритмічні засоби підвищення ефективності паралельних ОС при чисельному вирішенні систем звичайних диференційних рівнянь з контролем локальної похибки. Розроблені ефективні обчислювальні схеми відображення методів на паралельні структури різної топології. Отримані порівняльні характеристики потенційного та реального паралелізму, проведені чисельні експерименти.

Применение параллельных вычислительных систем является стратегическим направлением развития современной компьютерной индустрии. Это обстоятельство вызвано не только принципиальным ограничением максимально возможного быстродействия обычных последовательных машин, но и практически постоянным существованием вычислительных задач, для решения которых возможностей существующих средств вычислительной техники всегда оказывается недостаточно. К таким задачам относится решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, используемое при моделировании различных динамических процессов с сосредоточенными параметрами.

В данной статье приводятся параллельные алгоритмы одношаговых методов численного решения задачи Коши, которые могут применяться для решения, как жестких, так и нежестких задач, а также исследуется эффективность их отображения на параллельные структуры различной архитектуры и топологии.

Для системы из m ОДУ:

$$\begin{cases} \overline{y}' = F(x,\overline{y}); \\ \overline{y}(x_0) = \overline{y}_0. \end{cases},$$

где $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$, $F = (f_1, f_2, ..., f_m)^T$, правая часть системы есть в общем случае нелинейная функция $F = \bar{f}$, задающая отображение: $F : R \times R^m \to R^m$.

Одношаговый метод типа Рунге-Кутты для решения нелинейной задачи Коши, описываемой СОДУ, имеет вид:

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h \cdot \sum_{i=1}^{s} b_i \cdot \bar{k}_i, \\ \bar{k}_i = F(x_n + c_i h, \bar{y}_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \bar{k}_j), \ i = \overline{1,s} \end{cases},$$

s-размерные вектора $c = (c_1, c_2, ..., c_s)^T$, $b = (b_1, b_2, ..., b_s)^T$ и $s \times s -$ матрица $A = (a_{ij}), i, j = \overline{1,s}$ описывают уникальный вариант метода и выбираются из соображений точности. Вид матрицы A задает тип численной схемы, положенной в основу метода. Если $a_{ij} = 0$ при $i \leq j$, то метод является явным и при наличии большой степени параллелизма, обладает условной устойчивостью. При полностью заполненной матрице имеем полностью неявную схему, применяемую для решения жестких задач. К достоинствам полностью неявных, одношаговых методов общего вида (на основе квадратурных формул Радо и Лобатто [1]) следует отнести хорошие характеристики устойчивости и точности, достаточные для решения жестких задач. Так например, $s-$ стадийный метод РадоIA имеет порядок практически в 2 раза больше, чем число стадий и обладает A-устойчивостью. Недостатками этих методов является высокая вычислительная сложность, обусловленная итерационным процессом определения стадийных коэффициентов, которая не позволяет эффективно применять эти методы на последовательных машинах. При решении СОДУ с использованием полностью неявных методов Рунге-Кутта все $m \cdot s$ неизвестных: $K = \left\| k_{ij} \right\|, i = 1,..,s; \ j = 1,..,m$ должны определяться одновременно, что существенно усложняет задачу (всего шаговых коэффициентов s и размерность каждого вектора $\bar{k}_i$ равна m). Заметим, что характеристики параллелизма для всех одношаговых методов не зависят от того, какой конкретно метод используется, поэтому исследования проводятся в общем виде.

С целью минимизировать вычислительные затраты для достижения некоторой заданной точности приближенного решения, численный алгоритм должен иметь механизм управления шагом интегрирования. Это возможно на основе информации об апостериорной локальной погрешности. Для реализации поставленной цели использовались альтернативные способа оценки погрешности на шаге:

1) дублирование шага по правилу Рунге;
2) вложенные пары схем;
3) технология локальной экстраполяции Ричардсона.

Учет специфики задачи позволяет во многих случаях строить более эффективные параллельные вычислительные алгоритмы, чем в случае применения стандартных численных схем. Поэтому отдельно рассматривается параллельное решение линейной задачи, в частности, предложены специальные методы решения однородных и неоднородных СЛОДУ с постоянными коэффициентами на основе экспоненциального метода [2] и эффективных алгоритмов умножения матриц.

Разработка параллельных алгоритмов осуществлялась по иерархической декомпозиционной методике с использованием аппарата графов влияния. Определение теоретических характеристик параллелизма выполнялось с помощью пакета *Mathematica® (Wolfram Research Inc.),* программная реализация осуществлялась при использовании стандарта передачи сообщений *MPI* (*Message Passing Interface*) на языке *C++*. Тестирование алгоритмов в данной работе производилось на базе *Argonne National Library MPICH-1.2.5,* одной из наиболее известных реализаций стандарта MPI для OS Windows. Все временные характеристики алгоритмов определялись с использованием функции *MPI_Barrier.* Для сокращения времени выполнения коллективных операций обмена использовались алгоритмы покоординатной маршрутизации.

На основе теоретического анализа вычислительной сложности параллельных алгоритмов с контролем локальной погрешности и численного эксперимента для тестовых задач можно сделать следующие выводы:

– в общем случае последовательные неявные методы Рунге-Кутты имеют достаточно большую вычислительную сложность по сравнению со своими явными аналогами;

– для высокоточных приложений ($10^{-15} - 10^{-20}$) и для сложных правых частей доминируют схемы локальной экстраполяции Ричардсона;

– для решения линейных однородных СОДУ с постоянными коэффициентами применение параллельных алгоритмов вложенных схем экспоненциального метода дает значительное сокращение накладных расходов.

Литература

1.Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 512с.

2.Арушунян О.Б., Залеткин С.Ф., Калиткин Н.Н. Тесты для вычислительного практикума по обыкновенным дифференциальным уравнениям. // Вычислительные методы и программирование, 2002, т.3, с.11-19.

Получено 01.06.07